УДК 519.95 (075.8)
ББК 518
Г 12

Гаврилов Г. П., Сапоженко А. А. **Задачи и упражнения по дискретной математике:** Учеб. пособие. — 3-е изд., перераб. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2005. — 416 с. — ISBN 5-9221-0477-2.

В пособие включены задачи и упражнения по конечнозначным логикам (в том числе по алгебре логики), по теории автоматов, теории алгоритмов, теории графов и сетей, теории кодирования, комбинаторике, минимизации булевых функций и синтезу схем и формул, реализующих булевы функции. Имеются задачи, предназначенные для первоначальной проработки и освоения методов дискретной математики, а также задачи для углубленного изучения предмета.

Второе издание — 1992 г.

Для студентов и преподавателей университетов и технических вузов, в которых изучается дискретная математика.

Табл. 41. Ил. 129. Библиогр. 37 назв.

Учебное издание

ГАВРИЛОВ Гарий Петрович
САПОЖЕНКО Александр Антонович

ЗАДАЧИ И УПРАЖНЕНИЯ ПО ДИСКРЕТНОЙ МАТЕМАТИКЕ

Редактор *Е.Ю. Ходан*
Корректор *Т.Ю. Вайсберг*
Оригинал-макет *Е.А. Королевой*
Оформление переплета *А.Ю. Алехиной*

ЛР № 071930 от 06.07.99. Подписано в печать 15.11.04. Формат 60×90/16.
Бумага офсетная. Печать офсетная. Усл. печ. л. 26. Уч.-изд. л. 28,6. Заказ №

Издательская фирма «Физико-математическая литература»
МАИК «Наука/Интерпериодика»
117997, Москва, ул. Профсоюзная, 90
E-mail: fizmat@maik.ru http://www.fml.ru

Отпечатано с диапозитивов
в ОАО «Чебоксарская типография № 1»
428019, г. Чебоксары, пр. И. Яковлева, 15

ISBN 5-9221-0477-2

© ФИЗМАТЛИТ, 2004, 2005
© Г. П. Гаврилов, А. А. Сапоженко, 2004, 2005

ISBN 5-9221-0477-2

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие к третьему изданию 6
Предисловие ко второму изданию 7

Глава I
Способы задания и простейшие свойства функций алгебры логики

§ 1. Функции алгебры логики и способы их задания. Операция суперпозиции 9

1. Основные понятия и факты, связанные с булевым кубом и булевыми функциями (9). 2. Элементы булева куба. Первичные представления о булевых функциях (15). 3. Формулы. Реализация булевых функций формулами (23). 4. Двойственные функции. Принцип двойственности (31). 5. Фиктивные и существенные переменные. Отождествление переменных у булевых функций (33).

§ 2. Специальные представления булевых функций 39

1. Разложения булевых функций по переменным. Совершенные дизъюнктивная и конъюнктивная нормальные формы (39). 2. Дизъюнктивные и конъюнктивные нормальные формы (47). 3. Полиномы Жегалкина (52).

Глава II
Замкнутые классы и полнота систем функций алгебры логики

§ 1. Понятия функциональной замкнутости и полноты 60
§ 2. Класс самодвойственных функций 64
§ 3. Класс линейных функций 68
§ 4. Классы функций, сохраняющих константы 72
§ 5. Класс монотонных функций 75
§ 6. Полнота и замкнутые классы 81

Глава III
***k*-значные логики**

§ 1. Представление функций k-значных логик формулами 88

1. Элементарные функции k-значных логик и соотношения между ними (88). 2. Разложение функций k-значных логик в первую и вторую формы (91).

§ 2. Замкнутые классы и полнота в k-значных логиках 92

1. Некоторые замкнутые классы k-значных логик. Представление функций из P_k полиномами по модулю k (92). 2. Исследование систем функций k-значной логики на полноту (97).

Глава IV

Ограниченно-детерминированные функции

§ 1. Отображения последовательностей 102

1. Основные понятия и факты, связанные с заданием детерминированных функций (102). 2. Типовые примеры (105). 3. Выявление свойства детерминированности функции. Эквивалентность детерминированных функций. Остаточные функции (111). 4. Выявление свойства ограниченной детерминированности функции. Порожденные и автономные функции. Строение классов эквивалентности. Мощности некоторых множеств отображений (119).

§ 2. Диаграммы, таблицы, канонические уравнения, схемы 126

1. Диаграммы Мура, канонические таблицы и канонические уравнения (126). 2. Операции над детерминированными функциями (145). 3. Реализация ограниченно-детерминированных функций схемами (159). 4. Замкнутые классы и полнота в множествах детерминированных и ограниченно-детерминированных функций (171).

Глава V

Элементы теории алгоритмов

§ 1. Машины Тьюринга и операции над ними. Функции, вычислимые на машинах Тьюринга 178

1. Простейшие свойства машин Тьюринга (178). 2. Операции над машинами Тьюринга (186). 3. Вычислимые функции (190).

§ 2. Классы вычислимых и рекурсивных функций 195

1. Операции суперпозиции, примитивной рекурсии и минимизации (195). 2. Некоторые специальные свойства рекурсивных функций (201).

Глава VI

Графы и сети

§ 1. Основные понятия теории графов 203

1. Простейшие свойства графов. Изоморфизм графов (203). 2. Ориентированные графы (210).

§ 2. Планарность и раскраска графов 215

§ 3. Деревья и сети 219

1. Корневые деревья (219). 2. Двухполюсные сети (223).

Глава VII

Элементы теории кодирования

§ 1. Алфавитное кодирование. Критерий однозначности кодирования . 230

§ 2. Коды с минимальной избыточностью 235

§ 3. Самокорректирующиеся коды 241
1. Расстояние Хэмминга, шары, сферы и циклы в n-мерном кубе (241). 2. Коды, обнаруживающие и исправляющие ошибки (244).
§ 4. Линейные коды 249

Глава VIII
Элементы комбинаторики

§ 1. Перестановки и сочетания. Свойства биномиальных коэффициентов 253
§ 2. Формула включений и исключений 262
§ 3. Возвратные последовательности, производящие функции, рекуррентные соотношения 265
§ 4. Теория Пойа 273
§ 5. Асимптотические оценки и неравенства 277
§ 6. Оценки в теории графов и сетей 284

Глава IX
Минимизация булевых функций

§ 1. Структура граней n-мерного куба. Покрытия и тесты для таблиц 290
§ 2. Методы построения сокращенной д. н. ф 296
§ 3. Методы построения тупиковых, минимальных и кратчайших д. н. ф. 301

Глава X
Реализация булевых функций схемами и формулами

§ 1. Схемы из функциональных элементов 306
§ 2. Контактные схемы и формулы 312

Ответы, указания, решения 324
Список литературы 412
Предметный указатель 414

ПРЕДИСЛОВИЕ К ТРЕТЬЕМУ ИЗДАНИЮ

Третье издание сборника задач выходит спустя четыре года после того как ушел из жизни Гарий Петрович Гаврилов. Со времени предыдущего издания прошло 11 лет. Необходимость переиздания ощущалась давно, поскольку сборник активно используется во многих вузах для проведения упражнений по дискретной математике. Отличия этого издания от предыдущего незначительны. Исправлены опечатки и некоторые ошибки. Некоторым изменениям подверглись теоретические введения к главам. Существенных изменений не потребовалось, поскольку материал книги по-прежнему соответствует программе по дискретной математике для университетов России. Некоторые изменения назревают. Например, в главе, посвященной теории алгоритмов, следовало бы, видимо, поместить задачи по сложности алгоритмов и сводимости. Это направление бурно развивается и находит все большие приложения. В комбинаторике и теории графов все более значительную роль находят вероятностные методы. Алгебраические методы теории кодирования находят все большее применение в криптографии. Эти тенденции ощущаются и, по-видимому, скоро найдут свое отражение в вузовских программах и учебниках.

Пользуясь случаем, выражаю признательность всем коллегам, активно использующим книгу в своей преподавательской и научной деятельности и высказавшим свои замечания и предложения, а также студентам и аспирантам, оказавшим помощь в подготовке нового издания.

А. А. Сапоженко

ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

Это пособие является существенной переработкой нашего «Сборника задач по дискретной математике», вышедшего в 1977 г.

В предлагаемой вниманию читателя книге значительно расширен набор задач тренировочного характера (упражнений) и задач среднего уровня трудности.

Пособие предназначено в основном для студентов младших курсов университетов и технических вузов, но может быть полезно также студентам старших курсов и аспирантам, применяющим методы и конструкции дискретной математики и желающим углубить свои знания в этой области. Преподаватели могут использовать его при подготовке упражнений для семинарских занятий. Основным теоретическим руководством по разделам дискретной математики, представленным в данном сборнике, является книга С. В. Яблонского «Введение в дискретную математику» (М.: Наука, 1986). Другие библиографические источники, могущие оказаться полезными при работе над различными главами, указаны в списке литературы, помещенном в конце данного пособия.

В сборнике десять глав. Первые пять глав посвящены алгебре логики, k-значным логикам, теории автоматов и теории алгоритмов. На материале этих глав читатель познакомится с такими важными понятиями дискретных функциональных систем, как булева и k-значная функции, дискретный преобразователь (автомат), вычислимая и рекурсивная функции, функционально полная система, операции суперпозиции, обратной связи, примитивной рекурсии и минимизации, а также составит достаточно четкое представление о различных способах задания дискретных функций (табличном, с помощью полиномов и нормальных форм, с помощью диаграмм, канонических уравнений и схем), об эквивалентных преобразованиях формул, эффективной вычислимости и некоторых конкретных формах определения алгоритма (машинах Тьюринга и рекурсивных функциях).

В главе VI содержатся задачи по теории графов, сетей и схем. Цель этой главы — познакомить читателя с языком и основополагающими понятиями и методами теории графов, широко применяемыми при описании и исследовании структурных свойств объектов в различных областях науки и техники. Приводятся задачи для закрепления основных понятий теории графов, на выявление планарности и по раскраске графов, на подсчет объектов с заданной геометрической структурой

и т. п. Авторы надеются, что преподаватель найдет здесь и такие задачи, с помощью которых удастся обучить студента математически строгому доказательству геометрически «очевидных» утверждений.

В главе VII представлены задачи о свойствах алфавитных кодов, кодов с минимальной избыточностью и самокорректирующихся кодов.

Глава VIII посвящена комбинаторике. При изучении дискретной математики часто приходится сталкиваться с вопросами существования, подсчета и оценки числа различных комбинаторных объектов. Поэтому полезно бывает знать основные принципы и методы комбинаторного анализа. В главу VIII включен не только традиционный комбинаторный материал (перестановки, сочетания, свойства биномиальных коэффициентов, принцип включения-исключения, возвратные последовательности, рекуррентные соотношения, производящие функции), но и современные разделы комбинаторной математики (теория Пойа, асимптотические оценки и неравенства).

В главе IX затронуты вопросы, относящиеся к минимизации булевых функций. Здесь представлены задачи о свойствах булева куба, характеризациях дизъюнктивных нормальных форм, алгоритмах на множествах д.н.ф.

Глава X содержит задачи по реализации булевых функций схемами из функциональных элементов, контактными схемами и формулами.

Для удобства читателя авторы сочли целесообразным поместить в каждом параграфе необходимые теоретические справки. Многие задачи снабжены ответами и указаниями. К сожалению, ограниченный объем не позволил включить подготовленные нами подробные указания и решения задач среднего и высокого уровней трудности.

По происхождению материал, включенный в задачник, весьма разнообразен. Есть и «фольклорные» задачи, есть задачи, возникшие при обработке журнальных статей, отдельные задачи заимствованы из других руководств. Основная часть задач придумана авторами при подготовке к семинарским занятиям и проведению экзаменов по дискретной математике, а также при написании данного пособия и ранее вышедшего сборника задач.

При написании настоящего пособия мы пытались учесть все замечания, которые были высказаны нам коллегами и читателями, приславшими свои отзывы о содержании «Сборника задач по дискретной математике». Всем им мы выражаем искреннюю благодарность.

В заключение отметим, что работа над пособием распределялась следующим образом: главы I, III–V, а также § 1, 2 главы VI и ответы ко всем этим главам и параграфам написаны Г. П. Гавриловым, главы II, VII–X, а также § 3 главы VI и ответы к ним написаны А. А. Сапоженко.

Г. П. Гаврилов, А. А. Сапоженко

Глава I

СПОСОБЫ ЗАДАНИЯ И ПРОСТЕЙШИЕ СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ

§ 1. Функции алгебры логики и способы их задания. Операция суперпозиции

1. Основные понятия и факты, связанные с булевым кубом и булевыми функциями. Набор $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$, где $\alpha_i \in \{0, 1\}$, $1 \leqslant i \leqslant n$, называется *булевым* или *двоичным набором* (*вектором*). Элементы набора часто называют *компонентами* или *координатами*. Кратко набор $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ обозначают через $\widetilde{\alpha}^n$ или $\widetilde{\alpha}$. Число n называется *длиной набора* $\widetilde{\alpha}^n$. *Весом* (или *нормой*) *набора* $\widetilde{\alpha}^n$ (обозначение $\|\widetilde{\alpha}^n\|$) называют число его координат, равных 1, т. е. $\|\widetilde{\alpha}^n\| = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i$.

Множество всех двоичных наборов длины n образует *n-мерный булев* (или *двоичный*) *куб*, который называют также *единичным n-мерным кубом* и обычно обозначают B^n (а иногда E_2^n). Применяя геометрическую терминологию, наборы $\widetilde{\alpha}^n \in B^n$ называют *вершинами куба* B^n. Множество всех вершин куба B^n, имеющих вес k, называется *k-м слоем куба* B^n (обозначение B_k^n). Каждому двоичному набору $\widetilde{\alpha}^n$ можно сопоставить число $\nu(\widetilde{\alpha}^n) = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot 2^{n-i}$ — *номер набора* $\widetilde{\alpha}^n$. Набор $\widetilde{\alpha}^n$ является двоичным разложением своего номера $\nu(\widetilde{\alpha}^n)$.

Расстоянием (*Хэмминга*) между вершинами $\widetilde{\alpha}$ и $\widetilde{\beta}$ куба B^n называется число $\rho(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}) = \sum\limits_{i=1}^{n} |\alpha_i - \beta_i|$; оно равно числу координат, в которых наборы $\widetilde{\alpha}$ и $\widetilde{\beta}$ отличаются друг от друга. Расстояние Хэмминга является *метрикой*, а куб B^n — *метрическим пространством*.

Наборы $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ и $\widetilde{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n)$ из B^n называются *соседними*, если $\rho(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}) = 1$, и *противоположными*, если $\rho(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}) = n$, т. е. соседние наборы различаются только в одной координате, а противоположные — во всех координатах. Говорят, что

набор $\widetilde{\alpha}^n$ *предшествует* набору $\widetilde{\beta}^n$ (или *не больше* набора $\widetilde{\beta}^n$), и применяют обозначение $\widetilde{\alpha}^n \preccurlyeq \widetilde{\beta}^n$, если $\alpha_i \leqslant \beta_i$ для всех $i = 1, \ldots, n$. Если $\widetilde{\alpha}_n \preccurlyeq \widetilde{\beta}_n$ и $\widetilde{\alpha}^n \neq \widetilde{\beta}^n$, то говорят, что набор $\widetilde{\alpha}^n$ *строго предшествует* набору $\widetilde{\beta}^n$ (или *строго меньше*, или *меньше* набора $\widetilde{\beta}^n$), и используют обозначение $\widetilde{\alpha}^n \prec \widetilde{\beta}^n$. Наборы $\widetilde{\alpha}^n$ и $\widetilde{\beta}^n$ называются *сравнимыми*, если либо $\widetilde{\alpha}^n \preccurlyeq \widetilde{\beta}^n$, либо $\widetilde{\beta}^n \preccurlyeq \widetilde{\alpha}^n$. В случае, когда ни одно из этих отношений не выполняется, наборы $\widetilde{\alpha}^n$ и $\widetilde{\beta}^n$ называются *несравнимыми*. Говорят, что набор $\widetilde{\alpha}^n$ *непосредственно предшествует* набору $\widetilde{\beta}^n$, если $\widetilde{\alpha}^n \prec \widetilde{\beta}^n$ и $\rho(\widetilde{\alpha}^n, \widetilde{\beta}^n) = 1$. Отношение $\preccurlyeq$ (его часто называют *отношением предшествования*) является *частным*

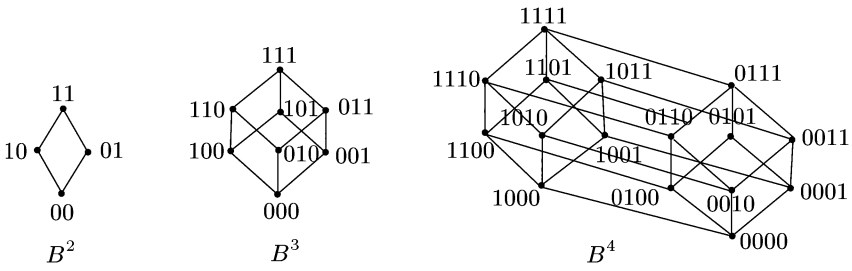


Рис. 1.1

порядком на множестве B^n. На рис. 1.1 приведены диаграммы частично упорядоченных множеств B^2, B^3 и B^4.

Функция $f(x_1, \ldots, x_n)$, определенная на множестве $B^n = \{0, 1\}^n$ и принимающая значения из множества $\{0, 1\}$, называется *функцией алгебры логики* (а также *булевой* или *булевской функцией*). Набор символов переменных $(x_1, \ldots, x_n)$ будет обозначаться также через $\widetilde{x}^n$ или $\widetilde{x}$, а множество тех же символов переменных — через X^n. Множество всех булевых функций, зависящих от переменных $x_1, \ldots, x_n$, будем обозначать через $P_2(X^n)$. При этом обычно полагают, что $n \geqslant 0$. *Нульместными* булевыми функциями (т. е. соответствующими $n = 0$) являются константы 0 и 1.

Булеву функцию $f(\widetilde{x}^n)$ при $n \geqslant 1$ можно задать таблицей $T(f)$ (табл. 1.1), в которой наборы $\widetilde{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{n-1}, \sigma_n)$ выписыва-

Таблица 1.1

x_1	x_2	...	x_{n-1}	x_n	$f(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n)$
0	0	...	0	0	$f(0, 0, \ldots, 0, 0)$
0	0	...	0	1	$f(0, 0, \ldots, 0, 1)$
0	0	...	1	0	$f(0, 0, \ldots, 1, 0)$
.....					.....
1	1	...	1	1	$f(1, 1, \ldots, 1, 1)$

ются в порядке возрастания их номеров (сверху вниз). Имея в виду такое *стандартное расположение наборов*, булеву функцию $f(\widetilde{x}^n)$

удобно задавать *вектором ее значений*: $\widetilde{\alpha}_f^{2^n} = (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{2^n-1})$, где координата α_i равна значению функции $f(\widetilde{x}^n)$ на наборе $\widetilde{\sigma}$, имеющем номер i $(i = 0, 1, \ldots, 2^n - 1)$.

Символом N_f обозначают множество $\{\widetilde{\sigma}^n \mid (\widetilde{\sigma}^n \in B^n)\,\&\,(f(\widetilde{\sigma}^n) = 1)\}$, т.е. множество всех наборов $\widetilde{\sigma}^n$ из B^n, на которых функция $f(\widetilde{x}^n)$ обращается в 1.

Булева функция $f(\widetilde{x}^n)$ при $n \geqslant 2$ может быть задана прямоугольной таблицей $\Pi_{k,n-k}(f)$ (табл. 1.2), в которой значение $f(\sigma_1, \ldots, \sigma_k, \sigma_{k+1}, \ldots, \sigma_n)$ функции $f(\widetilde{x}^n)$ помещается на пересечении «строки» $(\sigma_1, \ldots, \sigma_k)$ и «столбца» $(\sigma_{k+1}, \ldots, \sigma_n)$, $1 \leqslant k < n$.

Таблица 1.2

x_1	x_2	…	x_k	0	0	…	σ_{k+1}	…	1	x_{k+1}
0	0	…	0	0	0	…	σ_{k+2}	…	1	x_{k+2}
0	0	…	1	…						
…				0	1	…	σ_n	…	1	x_n
σ_1	σ_2	…	σ_k	$f(\widetilde{\sigma})$						
…										
1	1	…	1							

Булевы функции, задаваемые табл. 1.3 и табл. 1.4, будут считаться *элементарными*.

Таблица 1.3

x	0	1	f_1	f_2
0	0	1	0	1
1	0	1	1	0

Таблица 1.4

x_1	x_2	f_3	f_4	f_5	f_6	f_7	f_8	f_9
0	0	0	0	0	1	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1	1	0
1	0	0	1	1	0	0	1	0
1	1	1	1	0	1	1	0	0

Приведем обозначения и названия этих функций.

1. Функции 0 и 1 называются соответственно (*тождественным*) *нулем* и (*тождественной*) *единицей*.

2. Функция f_1 называется *тождественной функцией* и обозначается через x.

3. Функция f_2 называется *отрицанием* x, обозначается $\overline{x}$ или $\neg x$ (читается «не x»).

4. Функция f_3 называется *конъюнкцией* x_1 и x_2, обозначается $x_1 \,\&\, x_2$ или $x_1 \cdot x_2$, или $x_1 x_2$, или $\min(x_1, x_2)$ (читается «x_1 и x_2»).

5. Функция f_4 называется *дизъюнкцией* x_1 *и* x_2, обозначается $x_1 \vee x_2$ или $x_1 + x_2$, или $\max(x_1, x_2)$ (читается «x_1 или x_2»).

6. Функция f_5 называется *суммой по модулю* 2 x_1 *и* x_2, обозначается $x_1 \oplus x_2$ или $x_1 + x_2$ (читается «x_1 плюс x_2»).

7. Функция f_6 называется *эквиваленцией* (или *эквивалентностью*) x_1 *и* x_2, обозначается $x_1 \sim x_2$ или $x_1 \equiv x_2$, или $x_1 \leftrightarrow x_2$ (читается «x_1 эквивалентно x_2»).

8. Функция f_7 называется *импликацией* x_1 *и* x_2, обозначается $x_1 \to x_2$ или $x_1 \supset x_2$ (читается «x_1 имплицирует x_2» или «из x_1 следует x_2»).

9. Функция f_8 называется *штрихом Шеффера* x_1 *и* x_2, обозначается $x_1 \mid x_2$ (читается «не x_1 или не x_2» или «x_1 и x_2 не совместны»). В технической литературе функция $x_1 \mid x_2$ называется обычно *антиконъюнкцией* или «*не – и*».

10. Функция f_9 называется *стрелкой Пирса* x_1 *и* x_2, обозначается $x_1 \downarrow x_2$ (читается «ни x_1, ни x_2» или «не x_1 и не x_2»). В технической литературе функция $x_1 \downarrow x_2$ обычно называется *антидизъюнкцией* или «*не – или*» (а также *функцией Даггера* и *функцией Вебба*).

Функции 0 и 1 иногда рассматриваются как нульместные, т. е. зависящие от пустого множества переменных.

Символы $\neg$, $\&$, $\vee$, $\oplus$, $\sim$ и т. д., участвующие в обозначениях элементарных функций, называются *логическими связками* (или просто *связками*).

Зафиксируем некоторый алфавит переменных X (конечный или счетно-бесконечный). Пусть $\Phi = \{f_1^{(n_1)}, f_2^{(n_2)}, \dots\}$ — множество функциональных символов, где верхние индексы указывают «местность» (арность) символов. Иногда верхние индексы опускаются, но при этом арности предполагаются известными.

Определение 1. *Формулой над множеством* Φ называется всякое (и только такое) выражение вида:

1) f_k и $f_j(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n})$, где f_k — нульместный, а f_j — n-местный ($n \geqslant 1$) функциональные символы и $x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n}$ — переменные из множества X;

2) $f_m(\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2, \dots, \mathfrak{A}_s)$, где f_m — s-местный ($s \geqslant 1$) функциональный символ и $\mathfrak{A}_i$ — либо формула над Φ, либо переменная из X.

Для подчеркивания того факта, что в формуле $\mathfrak{A}$ используются *только переменные из* X (не обязательно все) или *только функциональные символы из* Φ (тоже не обязательно все), будем писать соответственно $\mathfrak{A}(X)$ и $\mathfrak{A}[\Phi]$.

Иногда формулу вида $f(x, y)$ записывают либо как (xfy), либо как xfy, а формулу $f(x)$ — как (fx) или fx. При этом символы f называют *связками*.

В алгебре логики обычно в качестве связок употребляют символы из множества $\mathfrak{S} = \{\neg, \&, \vee, \oplus, \sim, \to, \mid, \downarrow\}$.

Определение 2. *Формулой над* $\mathfrak{S}$ называется всякое (и только такое) выражение вида:

1) x — любая переменная из множества X;

2) $(\neg\mathfrak{A})$, $(\mathfrak{A}\,\&\,\mathfrak{B})$, $(\mathfrak{A}\vee\mathfrak{B})$, $(\mathfrak{A}\oplus\mathfrak{B})$, $(\mathfrak{A}\sim\mathfrak{B})$, $(\mathfrak{A}\to\mathfrak{B})$, $(\mathfrak{A}\mid\mathfrak{B})$, $(\mathfrak{A}\downarrow\mathfrak{B})$, где $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — формулы над $\mathfrak{S}$.

Замечание. Аналогично определяется понятие *формулы над* любым непустым подмножеством $\mathfrak{S}_1$ множества $\mathfrak{S}$; п. 1) из определения 2 надо оставить неизменным, а п. 2) видоизменить естественным образом: берутся только связки из $\mathfrak{S}_1$, и формулы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ должны быть формулами над $\mathfrak{S}_1$.

Обычно принимаются следующие соглашения для сокращения записи формул над множеством связок $\mathfrak{S}$:

а) внешние скобки у формул опускаются;

б) формула $(\neg\mathfrak{A})$ записывается в виде $\overline{\mathfrak{A}}$;

в) формула $(\mathfrak{A}\,\&\,\mathfrak{B})$ записывается в виде $(\mathfrak{A}\cdot\mathfrak{B})$ или $(\mathfrak{A}\mathfrak{B})$;

г) считается, что связка $\neg$ сильнее любой двухместной связки из множества $\mathfrak{S}$;

д) связка $\&$ считается сильнее, чем любая другая двухместная связка из множества $\mathfrak{S}$.

Эти соглашения позволяют, например, записать формулу $((((\neg x)\oplus y)\,\&\,z)\to((x\,\&\,(\neg y))\vee z))$ в виде $(\overline{x}\oplus y)z\to(x\overline{y}\vee z)$.

Употребляется также «смешанная» запись формул, например, $x\oplus f(\overline{y},\,z)$ или $x_1 f(x_2,\,0,\,x_3)\vee\overline{x}_2\overline{f}(x_1,\,\overline{x}_2,\,1)$.

Пусть каждому функциональному символу $f_i^{(n_i)}$ из множества $\Phi=\{f_1^{(n_1)},\,f_2^{(n_2)},\,\dots\}$ сопоставлена некоторая функция F_i: $B^{n_i}\to B=\{0,\,1\}$. Понятие *функции* $\varphi_{\mathfrak{A}}$, *реализуемой формулой* $\mathfrak{A}$ *над множеством* Φ, определяется (как и понятие формулы) по индукции:

1) если $\mathfrak{A}=f_i^{(n_i)}(x_{j_1},\,x_{j_2},\,\dots,\,x_{j_{n_i}})$, то для всякого набора $(\alpha_1,\,\alpha_2,\,\dots,\,\alpha_{n_i})$ значений переменных $x_{j_1},\,x_{j_2},\,\dots,\,x_{j_{n_i}}$ значение функции $\varphi_{\mathfrak{A}}$ равно $F_i(\alpha_1,\,\alpha_2,\,\dots,\,\alpha_{n_i})$;

2) если $\mathfrak{A}=\mathfrak{A}(y_1,\,\dots,\,y_k)=f(\mathfrak{A}_1,\,\mathfrak{A}_2,\,\dots,\,\mathfrak{A}_m)$, где $f\in\Phi$ и $\mathfrak{A}_l$ — либо формула над Φ, либо переменная из X, то $\varphi_{\mathfrak{A}}(\alpha_1,\,\dots,\,\alpha_k)=$ $=F(\beta_1,\,\beta_2,\,\dots,\,\beta_m)$, где F — функция, сопоставленная функциональному символу f, и β_p — значение функции $\varphi_{\mathfrak{A}_p}$ $(p=1,\,2,\,\dots,\,m)$, причем

$$\beta_p=\begin{cases}\alpha_q, & \text{если } \mathfrak{A}_p=y_q,\\ \varphi_{\mathfrak{A}_p}(\alpha_{p_1},\,\dots,\,\alpha_{p_s}), & \text{если } \mathfrak{A}_p=\mathfrak{A}_p(y_{p_1},\,\dots,\,y_{p_s})\end{cases}$$

(здесь s зависит, естественно, от p).

Если $\mathfrak{A}=f_i^{(n_i)}(x_{j_1},\,x_{j_2},\,\dots,\,x_{j_{n_i}})$, то функция $\varphi_{\mathfrak{A}}$, реализуемая формулой $\mathfrak{A}$, обычно обозначается через $F_i(x_{j_1},\,x_{j_2},\,\dots,\,x_{j_{n_i}})$. Если же $\mathfrak{A}=f(\mathfrak{A}_1,\,\mathfrak{A}_2,\,\dots,\mathfrak{A}_m)$, то $\varphi_{\mathfrak{A}}$ обозначается через $F(\varphi_{\mathfrak{A}_1}(y_{11},\,y_{12},\,\dots,\,y_{1s_1}),\ \varphi_{\mathfrak{A}_2}(y_{21},\,y_{22},\,\dots,\,y_{2s_2}),\,\dots,\,\varphi_{\mathfrak{A}_m}(y_{m1},\,y_{m2},\,\dots,\,y_{ms_m}))$;

здесь F — функция, сопоставленная функциональному символу f, а $\varphi_{\mathfrak{A}_i}(y_{i1}, y_{i2}, \ldots, y_{is_i})$ — функция, реализуемая формулой $\mathfrak{A}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$.

Понятие *функции* $\varphi_{\mathfrak{A}}$, *реализуемой формулой* $\mathfrak{A}$ *над множеством связок* $\mathfrak{S}$, вводится (также по индукции) следующим образом:

1) формуле $\mathfrak{A} = x$, где $x \in X$, сопоставляется тождественная функция $\varphi_{\mathfrak{A}}(x) = x$;

2) если $\mathfrak{A} = (\neg\, \mathfrak{B})$ или $\mathfrak{A} = (\mathfrak{B} \circ \mathfrak{C})$, где $\circ \in \{\&, \vee, \oplus, \sim, \to, |, \downarrow\}$, то соответственно $\varphi_{\mathfrak{A}} = \overline{\varphi}_{\mathfrak{B}}$, и $\varphi_{\mathfrak{A}} = \varphi_{\mathfrak{B}} \circ \varphi_{\mathfrak{C}}$ (здесь символ $\circ$ надо понимать уже как обозначение для соответствующей элементарной булевой функции; см. табл. 1.3 и табл. 1.4).

Пусть $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}(x_{i_1}, \ldots, x_{i_k})$, $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}(x_{j_1}, \ldots, x_{j_l})$ и $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ — множество тех переменных, которые встречаются хотя бы в одной из формул $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$, т. е. $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} = \{x_{i_1}, \ldots, x_{i_k}\} \cup \cup \{x_{j_1}, \ldots, x_{j_l}\}$. Формулы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ называются *эквивалентными* (обозначение: $\mathfrak{A} = \mathfrak{B}$ или $\mathfrak{A} \equiv \mathfrak{B}$), если на всяком наборе $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ значений переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ значения функций $\varphi_{\mathfrak{A}}$ и $\varphi_{\mathfrak{B}}$, реализуемых соответственно формулами $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$, совпадают, т. е. $\varphi_{\mathfrak{A}}(\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_k}) = \varphi_{\mathfrak{B}}(\alpha_{j_1}, \ldots, \alpha_{j_l})$.

Пусть Φ — множество функциональных символов или логических связок, а P — множество соответствующих им функций. *Суперпозицией над множеством* P называется всякая функция F, которую можно реализовать формулой над множеством Φ.

Пусть $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}[f_1^{(n_1)}, \ldots, f_s^{(n_s)}]$ и $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}[g_1^{(n_1)}, \ldots, g_s^{(n_s)}]$. Говорят, что формулы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ имеют *одинаковое строение*, если формула $\mathfrak{A}$ может быть получена из формулы $\mathfrak{B}$ путем замены каждого вхождения функционального символа $g_i^{(n_i)}$ на символ $f_i^{(n_i)}$ $(i = 1, \ldots, s)$. Строение формулы отражает индуктивный процесс ее порождения в соответствии с определением формулы (см. определения 1 и 2).

Строение формулы можно естественным образом характеризовать диаграммой (специальным графом, являющимся обычно ориентированным графом), вершинам которой приписаны функциональные символы (или логические связки) и символы переменных. Например, если формулы

$$\mathfrak{A} = f^{(2)}(g^{(2)}(x,\ h^{(1)}(y)),\ \varphi^{(2)}((x \,\&\, y),\ \psi^{(0)})), \quad \mathfrak{B} = \psi^{(0)},$$

$$\mathfrak{C} = g^{(2)}(x,\ x), \quad \mathfrak{D} = f^{(2)}(\varphi^{(2)}((x \vee y) \oplus z),\ y,\ h^{(1)}(x \,\&\, z))$$

рассматриваются над некоторым множеством Φ, содержащим логические связки $\&$, $\vee$, $\oplus$ и функциональные символы $f^{(2)}$, $g^{(2)}$, $h^{(1)}$, $\varphi^{(2)}$ и $\psi^{(0)}$ (и, возможно, что-то еще), то их строение описывается диаграммами, изображенными на рис. 1.2.

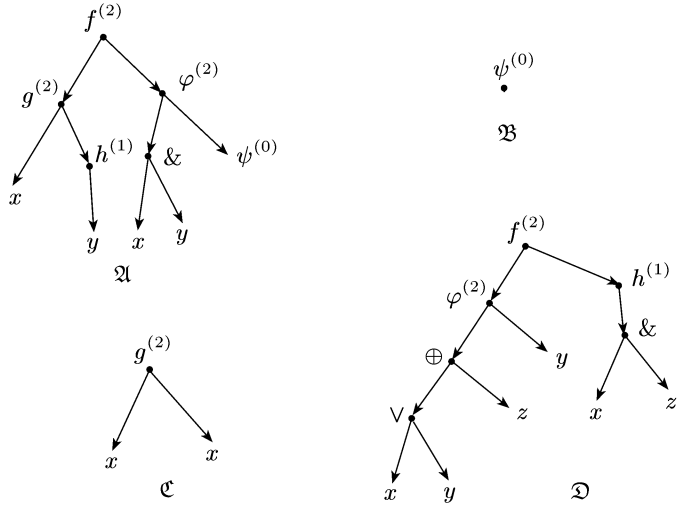


Рис. 1.2

Если нужно обратить внимание именно на строение формулы $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}[f_1, \ldots, f_s]$, то используют запись $\mathfrak{A} = C[f_1, \ldots, f_s]$.

2. Элементы булева куба. Первичные представления о булевых функциях.

Пример 1. Найти номер двоичного набора

$$\widetilde{\alpha} = (\underbrace{1\ldots1}_{m \text{ раз}}0\,\underbrace{1\ldots1}_{m \text{ раз}}\,\underbrace{0\ldots0}_{m \text{ раз}}), \quad m \geqslant 1.$$

Решение. Длина данного набора равна $3m+1$, а его i-я компонента равна 1 при $i = 1, \ldots, m, m+2, \ldots, 2m+1$ и равна 0 в противном случае. Следовательно,

$$\nu(\widetilde{\alpha}) = \sum_{i=1}^{3m+1} 2^{3m+1-i}\alpha_i = \sum_{i=1}^{m} 2^{3m+1-i} + \sum_{j=m+2}^{2m+1} 2^{3m+1-j} =$$
$$= 2^{2m+1}(2^m - 1) + 2^m(2^m - 1) = 2^m(2^{2m+1} - 2^m - 1).$$

Пример 2. Найти двоичный набор, являющийся разложением числа 325 (первая слева цифра в наборе должна быть равна 1).

Решение. Так как $\nu(\widetilde{\alpha}) = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot 2^{n-i}$, то для нахождения компонент набора $\widetilde{\alpha}$, имеющего номер $\nu(\widetilde{\alpha})$, можно применить процедуру «последовательного деления с остатком на число 2»:

а) делим $\nu(\widetilde{\alpha})$ на 2, остаток есть α_n, а частное $q_1 = \alpha_1 \cdot 2^{n-2} + \ldots$ $\ldots + \alpha_{n-2} \cdot 2 + \alpha_{n-1}$;

б) частное q_1 делим на 2, остаток равен α_{n-1}, частное $q_2 = \alpha_1 \cdot 2^{n-3} + \ldots + \alpha_{n-2}$ делим на 2, остаток равен a_{n-2} и т. д.

до тех пор, пока на некотором ($(n-1)$-м) шаге не получим частное $q_{n-1}=\alpha_1$ и остаток α_2.

В нашем случае $\nu(\widetilde{\alpha})=325$. Используем описанную процедуру:

1) делим 325 на 2, находим частное q_1 и остаток α_n; $q_1=162$, $\alpha_n=1$;

2) делим 162 на 2, частное равно 81, в остатке 0, т.е. $\alpha_{n-1}=0$, $q_2=81$;

3) делим 81 на 2, $q_3=40$, $\alpha_{n-2}=1$;

4) делим 40 на 2, $q_4=20$, $\alpha_{n-3}=0$;

5) делим 20 на 2, $q_5=10$, $\alpha_{n-4}=0$;

6) делим 10 на 2, $q_6=5$, $\alpha_{n-5}=0$;

7) делим 5 на 2, $q_7=2$, $\alpha_{n-6}=1$;

8) делим 2 на 2, частное равно 1, в остатке 0, т.е. $\alpha_{n-7}=0$ и $\alpha_{n-8}=\alpha_1=1$.

Следовательно, $n=9$ и $\widetilde{\alpha}=(1,0,1,0,0,0,1,0,1)$.

Замечание. Из формулы $\nu(\widetilde{\alpha})=\sum\limits_{i=1}^{n}\alpha_i\cdot 2^{n-i}$ видно, что для получения координаты α_i набора $\widetilde{\alpha}$ можно поступать следующим образом:

а) используя неравенство $2^{n-1}\leqslant\nu(\widetilde{\alpha})<2^n$, находим n;

б) делим $\nu(\widetilde{\alpha})$ на 2^{n-i+1} и получаем остаток $r_i=\alpha_i\cdot 2^{n-i}+\alpha_{i+1}\cdot 2^{n-i-1}+\ldots+\alpha_{n-1}\cdot 2+\alpha_n$;

в) делим $\nu(\widetilde{\alpha})$ на 2^{n-1} и получаем остаток $r_{i+1}=\alpha_{i+1}\cdot 2^{n-i-1}+\ldots+\alpha_{n-1}\cdot 2+\alpha_n$;

г) вычисляем разность r_i-r_{i+1} и делим ее на 2^{n-i}.

Полученное частное и есть значение координаты α_i. Например, если $\nu(\widetilde{\alpha})=325$ и нужно найти α_3 (см. пример 2), то имеем:

а) $2^{n-1}\leqslant 325<2^n$, значит, $n=9$, так как $2^8=256<325<2^9=512$;

б) делим 325 на $2^{9-3+1}=2^7=128$, получаем остаток, равный 69;

в) делим 325 на $2^{9-3}=2^6=64$ и получаем в остатке 5;

г) $r_2-r_3=64$, и поэтому $\alpha_3=64/64=1$.

Пример 3. Найти двоичный набор длины m, являющийся разложением числа $2^{m-1}-2$ $(m\geqslant 3)$.

Решение. Представим число $2^{m-1}-2$ в виде суммы степеней двойки:

$$2^{m-1}-2=2\,(2^{m-2}-1)=2\,(2^{m-3}+2^{m-4}+\ldots+2+1)=$$
$$=2^{m-2}+2^{m-3}+\ldots+2^2+2.$$

Значит, соответствующий числу $2^{m-1}-2$ двоичный набор длины m таков: $(0\underbrace{1\ldots 1}_{m-2\text{ раз}}0)$.

Пример 4. На множестве наборов

$$A=\{(00\underbrace{1\ldots 1}_{n-2\text{ раз}}),\ (10\underbrace{1\ldots 1}_{n-3\text{ раз}}0),\ (1\underbrace{0\ldots 0}_{n-3\text{ раз}}11),\ (01\underbrace{0\ldots 0}_{n-3\text{ раз}}1),\ (00\underbrace{1\ldots 1}_{n-3\text{ раз}}0),$$

где $n \geqslant 3$, указать естественный частичный порядок $\preccurlyeq$ и выяснить, имеются ли в этом множестве соседние и противоположные наборы.

Р е ш е н и е. Решая данную задачу, удобно просматривать наборы в порядке возрастания (или убывания) их весов, т.е. начинать с наборов меньшего (или большего) веса и переходить последовательно к наборам с бóльшим (соответственно с меньшим) весом.

Сначала рассмотрим случай $n = 3$. Множество A состоит из следующих наборов: (001), (100), (111), (011), (000). Очевидно, что $(000) \preccurlyeq (001) \preccurlyeq (011) \preccurlyeq (111)$ и $(000) \preccurlyeq (100) \preccurlyeq (111)$. Соседними являются наборы (000) и (001), (000) и (100), (001) и (011), (011) и (111). Пары противоположных наборов таковы: (000) и (111), (100) и (011).

Пусть теперь $n = 4$. Тогда множество A выглядит так: {(0011), (1010), (1011), (0101), (0010)}. Имеем $(0010) \preccurlyeq (0011) \preccurlyeq (1011)$ и $(0010) \preccurlyeq (1010)$; набор (0101) не сравним ни с одним из остальных наборов. Соседними являются наборы (0010) и (0011), (0010) и (1010), (0011) и (1011). Противоположных наборов только два: (0101) и (1010).

Предположим, что $n \geqslant 5$. Тогда

$$A = \{(0011\underbrace{1\ldots1}_{l\text{ раз}}), (101\underbrace{1\ldots10}_{l\text{ раз}}), (100\underbrace{\ldots0}_{l\text{ раз}}11), (0100\underbrace{\ldots01}_{l\text{ раз}}), (001\underbrace{1\ldots10}_{l\text{ раз}})\},$$

где $l = n - 4 \geqslant 1$. Обозначим эти наборы (в соответствии с порядком, в котором они выписаны выше) через $\widetilde{\alpha}_1$, $\widetilde{\alpha}_2$, $\widetilde{\alpha}_3$, $\widetilde{\alpha}_4$ и $\widetilde{\alpha}_5$. Возьмем набор $\widetilde{\alpha}_4 = (0100\underbrace{\ldots01}_{l\text{ раз}})$ (его вес равен 2) и посмотрим, сравним ли он с каким-либо другим набором. Так как у всех остальных наборов вторые компоненты нулевые, а веса не меньше 2, то они не могут быть сравнимы с набором $\widetilde{\alpha}_4$. Затем переходим к набору $\widetilde{\alpha}_3$ — сравниваем его с наборами $\widetilde{\alpha}_1$, $\widetilde{\alpha}_2$ и $\widetilde{\alpha}_5$. Нетрудно заметить, что начальные отрезки длины 3 наборов $\widetilde{\alpha}_1$ и $\widetilde{\alpha}_3$, а также наборов $\widetilde{\alpha}_5$ и $\widetilde{\alpha}_3$ не сравнимы. Значит, набор $\widetilde{\alpha}_3$ не сравним ни с $\widetilde{\alpha}_1$, ни с $\widetilde{\alpha}_5$. Далее, рассматривая третьи и последние компоненты наборов $\widetilde{\alpha}_2$ и $\widetilde{\alpha}_3$, видим, что эти наборы тоже не сравнимы. Берем теперь набор $\widetilde{\alpha}_1$ и сравниваем его с наборами $\widetilde{\alpha}_2$ и $\widetilde{\alpha}_5$. Очевидно, что $\widetilde{\alpha}_5 \preccurlyeq \widetilde{\alpha}_1$, но $\widetilde{\alpha}_1$ и $\widetilde{\alpha}_2$ — несравнимые наборы (достаточно обратить внимание на первые и последние компоненты этих двух наборов). Наконец, легко видеть, что $\widetilde{\alpha}_5 \preccurlyeq \widetilde{\alpha}_2$. Итак, имеем $\widetilde{\alpha}_5 \preccurlyeq \widetilde{\alpha}_1$ и $\widetilde{\alpha}_5 \preccurlyeq \widetilde{\alpha}_2$. Соседними являются наборы $\widetilde{\alpha}_1$ и $\widetilde{\alpha}_5$, а также $\widetilde{\alpha}_2$ и $\widetilde{\alpha}_5$. Противоположных наборов два: $\widetilde{\alpha}_2$ и $\widetilde{\alpha}_4$.

П р и м е р 5. Найти формулу для числа наборов $\widetilde{\alpha}^n$ из B^n, удовлетворяющих условию $\rho(\widetilde{\alpha}^n, \widetilde{\beta}^n) = [(n+1)/2]$ и $\rho(\widetilde{\alpha}^n, \widetilde{\gamma}^n) \leqslant [n/2]$, где $\widetilde{\beta}^n$ и $\widetilde{\gamma}^n$ — фиксированные наборы и $\rho(\widetilde{\beta}^n, \widetilde{\gamma}^n) = [n/2] + 1$.

Р е ш е н и е. Не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что $\widetilde{\beta}^n = \widetilde{0}^n$ и $\widetilde{\gamma}^n = (\underbrace{1\ \ldots\ 1}_{[n/2]+1\text{раз}}0\ldots0)$. Пусть $\widetilde{\alpha}^n$ — такой набор, что $\rho(\widetilde{\alpha}^n, \widetilde{0}^n) = [(n+1)/2]$ и $\rho(\widetilde{\alpha}^n, \widetilde{\gamma}^n) \leqslant [n/2]$. Предположим, что

среди первых его $[n/2]+1$ компонент ровно j единичных $(j \geqslant 1)$. Тогда из остальных $n-[n/2]-1$ компонент единичными будут $[(n+1)/2]-j$ штук. Следовательно, при фиксированном j набор $\widetilde{\alpha}^n$ можно выбрать $\binom{[n/2]+1}{j} \cdot \binom{n-[n/2]-1}{[(n+1)/2]-j}$ способами, но при этом должно выполняться условие $\rho(\widetilde{\alpha}^n, \widetilde{\gamma}^n) = [n/2]+1-j+[(n+1)/2]-j \leqslant [n/2]$, т. е. $2j \geqslant [(n+1)/2]+1$.

Таким образом, искомое число наборов равно

$$\sum_{\left[\frac{n+1}{2}\right] \geqslant j \geqslant \frac{1}{2}\left(1+\left[\frac{n+1}{2}\right]\right)} \binom{[n/2]+1}{j} \cdot \binom{n-[n/2]-1}{[(n+1)/2]-j}.$$

В частности, при $n=1$ имеем $\sum\limits_{1 \geqslant j \geqslant 1} \binom{1}{j} \cdot \binom{0}{1-j} = 1$ (если $\widetilde{\beta}^1 = \widetilde{0}^1$, то $\widetilde{\gamma}^1 = \widetilde{1}^1$ и $\widetilde{\alpha}^1 = \widetilde{\gamma}^1$), а при $n=2$ получаем $\sum\limits_{1 \geqslant j \geqslant 1} \binom{2}{j} \cdot \binom{0}{1-j} = 2$ (если $\widetilde{\beta}^2 = \widetilde{0}^2$, то $\widetilde{\gamma}^2 = \widetilde{1}^2$ и $\widetilde{\alpha}^2 = (01)$ и (10)). Здесь полагаем, как обычно, $\binom{0}{0} = 1$.

Пример 6. Найти число функций, зависящих от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (т. е. принадлежащих множеству $P_2(X^n)$) и удовлетворяющих условию: функция $f(\widetilde{x}^n)$ равна 0 на каждом наборе $\widetilde{\alpha}^n$, вес которого не превосходит $n/2$, а на всех остальных наборах значения функции произвольные $(n \geqslant 1)$.

Решение. Число наборов (из B^n), на которых значения функции f зафиксированы, равно

$$\sum_{0 \leqslant i \leqslant n/2} \binom{n}{i} = \sum_{0 \leqslant i \leqslant [n/2]} \binom{n}{i} = \begin{cases} 2^{n-1}, & \text{если } n \text{ нечетное}, \\ 2^{n-1} + \frac{1}{2}\binom{n}{n/2}, & \text{если } n \text{ четное}. \end{cases}$$

На каждом из остальных наборов значение функции f можно задавать произвольно (полагая его равным 0 или 1). Следовательно, число различных функций, удовлетворяющих сформулированному выше условию, равно $2^{2^{n-1}}$ при n нечетном и $2^{2^{n-1}-\frac{1}{2}\binom{n}{n/2}}$ при n четном.

Пример 7. Найти число функций в $P_2(X^n)$, удовлетворяющих условию: существует пара противоположных наборов, на которых функция f обращается в 1 (для разных функций f такие пары наборов могут не совпадать).

Решение. При решении данной задачи проще поступить следующим образом: подсчитать число функций в $P_2(X^n)$, не удовлетворяющих сформулированному условию, а затем вычесть полученное число из $|P_2(X^n)| = 2^{2^n}$. Функция $f(\widetilde{x}^n)$ не удовлетворяет указанному выше условию, если, какова бы ни была пара противоположных наборов, функция $f(\widetilde{x}^n)$ на них либо принимает разные значения, либо обращается в 0. Причем в том случае, когда соответствующие значения разные, надо различать две возможности (для каждой пары

противоположных наборов); например, если $\widetilde{\alpha}$ и $\widetilde{\beta}$ — пара противоположных наборов, то либо $f(\widetilde{\alpha})=0$, а $f(\widetilde{\beta})=1$, либо $f(\widetilde{\alpha})=1$, а $f(\widetilde{\beta})=0$. Таким образом, каждой паре противоположных наборов соответствуют три допустимые возможности. Остается заметить, что существует $2^n/2=2^{n-1}$ пар противоположных наборов длины n, и тогда получаем: число функций в $P_2(X^n)$, не удовлетворяющих описанному выше условию, равно $3^{2^{n-1}}$. Следовательно, искомое число функций есть $2^{2^n}-3^{2^{n-1}}$. (Например, при $n=1$ имеем $2^{2^1}-3^{2^0}=1$, а при $n=2$ получаем $2^{2^2}-3^{2^1}=16-9=7$.)

Пример 8. По каналу связи могут передаваться три сообщения: A, B и C. Известно, что к данному моменту времени осуществилось каждое из следующих событий:

1) передано не более чем одно из сообщений A и B;

2) сообщение A могло быть передано в том и только том случае, если были переданы оба сообщения B и C;

3) передано хотя бы одно из сообщений A и C.

Вытекает ли отсюда, что сообщение B не передавалось, а сообщение C было передано?

Решение. Сопоставим сообщениям A, B и C булевы переменные x, y и z соответственно. Считаем, что $x=1$ (аналогично $y=1$ и $z=1$) в том и только том случае, если сообщение A (соответственно сообщение B и сообщение C) было передано по каналу связи. Событиям 1), 2) и 3) отвечают следующие булевы функции: $\overline{xy}$, $x\sim yz$ и $x\vee z$ (это надо понимать так: второе событие, например, осуществляется тогда и только тогда, когда $x\sim yz=1$). Булева функция $f(x,\,y,\,z)$, соответствующая всем трем событиям, имеет вид $\overline{xy}\cdot(x\sim yz)\cdot(x\vee z)$. Преобразуем это выражение:

$$f(x,\,y,\,z)=(\overline{x}\vee\overline{y})\cdot(\overline{x}\cdot\overline{yz}\vee x\cdot yz)\cdot(x\vee z)=$$
$$=(\overline{x}\cdot\overline{yz}\vee\overline{x}\cdot\overline{y}\cdot\overline{yz})\cdot(x\vee z)=\overline{x}\cdot(\overline{yz}\vee\overline{y}\cdot(\overline{y}\vee\overline{z}))\cdot z=$$
$$=\overline{x}\cdot(\overline{y}\vee\overline{z})\cdot z=\overline{x}\cdot\overline{y}\cdot z.$$

Отсюда следует, что $f(x,\,y,\,z)=1$ тогда и только тогда, когда $x=0$, $y=0$ и $z=1$, т. е. когда сообщения A и B не передавались, а сообщение C было передано. Таким образом, на вопрос, поставленный в задаче, ответ утвердительный. Последний шаг в решении данной задачи можно расписать подробнее: для выяснения того, вытекает ли событие, указанное в вопросе задачи, из осуществимости событий 1), 2) и 3), надо посмотреть, выполняется ли эквивалентность $f(x,\,y,\,z)\to\overline{y}\cdot z=1$ (функция $\overline{y}\cdot z$ соответствует событию «сообщение B не передавалось, а сообщение C было передано»). Имеем

$$\overline{x}\cdot\overline{y}\cdot z\to\overline{y}\cdot z=\overline{\overline{x}\cdot\overline{y}\cdot z}\vee\overline{y}\cdot z=x\vee\overline{\overline{y}\cdot z}\vee\overline{y}\cdot z=x\vee 1=1,$$

т. е. действительно $f(x,\,y,\,z)\to\overline{y}\cdot z=1$.

Замечание. Преобразовывая выражения, задающие булевы функции, мы использовали основные эквивалентности алгебры логики (см. п. 3 после задачи 1.20).

1.1. Найти номера следующих двоичных наборов:
1) (1011); 2) (11001); 3) (11001101);
4) (010111101); 5) $(\underbrace{10\ldots01}_{m\text{ раз}})$, $m \geqslant 1$;
6) $(\underbrace{1\ldots1}_{m\text{ раз}}\underbrace{0\ldots0}_{2m\text{ раз}})$, $m \geqslant 1$; 7) $(\underbrace{10\ldots0}_{m\text{ раз}}\underbrace{1\ldots1}_{m\text{ раз}}\underbrace{0\ldots01}_{m\text{ раз}})$, $m \geqslant 1$.

1.2. Найти двоичный набор длины l, являющийся разложением числа n:
1) $l = 5$, $n = 28$; 2) $l = 8$, $n = 231$;
3) $l = m + 1$, $n = 2^m + 1$ $(m \geqslant 1)$;
4) $l = m$, $n = 3 \cdot 2^{m-2} - 1$ $(m \geqslant 2)$.

1.3. На множестве наборов A из B^n указать естественный частичный порядок $\preccurlyeq$. Выяснить, есть ли в множестве A соседние и противоположные наборы, и, если они имеются, выписать их:
1) $A = \{(00111), (01011), (00110), (10110), (11010), (01010), (11100), (11011)\}$;
2) $A = \{(010101), (110011), (101101), (010111), (110111), (101010), (100010)\}$;
3) $A = \{(1\underbrace{0\ldots0}_{n-2\text{ раз}}1), (11\underbrace{0\ldots0}_{n-2\text{ раз}}), (11\underbrace{0\ldots0}_{n-3\text{ раз}}1), (0\underbrace{1\ldots1}_{n-1\text{ раз}}), (\underbrace{0\ldots0}_{n-2\text{ раз}}11), (0\underbrace{1\ldots1}_{n-3\text{ раз}}01)\}$, $n \geqslant 4$;
4) $A = \{(\underbrace{10\ldots0}_{m-1\text{ раз}}\underbrace{1\ldots1}_{n-m\text{ раз}}), (\underbrace{10\ldots0}_{m-2\text{ раз}}\underbrace{1\ldots1}_{n-m-1\text{ раз}}01), (\underbrace{10\ldots0}_{m\text{ раз}}\underbrace{1\ldots1}_{n-m-1\text{ раз}}), (0\underbrace{1\ldots1}_{n-m-1\text{ раз}}\underbrace{0\ldots0}_{m-2\text{ раз}}11), (010\underbrace{\ldots0}_{m\text{ раз}}\underbrace{1\ldots1}_{n-m-2\text{ раз}}), (\underbrace{01\ldots1}_{n-m\text{ раз}}\underbrace{0\ldots0}_{m-1\text{ раз}})\}$, $n > m + 1 \geqslant 3$.

1.4. Найти:
1) число $|B_k^n|$ наборов $\widetilde{\alpha}^n$ веса k $(n \geqslant 1,\ n \geqslant k \geqslant 0)$;
2) число наборов $\widetilde{\alpha}^n$ из B^n, удовлетворяющих условию $2^{n-1} \leqslant \leqslant \nu(\widetilde{\alpha}^n) < 2^n$ $(n \geqslant 1)$;
3) число упорядоченных пар соседних наборов в B^n $(n \geqslant 1)$;
4) число упорядоченных пар $(\widetilde{\alpha}^n, \widetilde{\beta}^n)$ наборов из B^n таких, что $\rho(\widetilde{\alpha}^n, \widetilde{\beta}^n) = k$ $(n \geqslant k \geqslant 1)$;
5) число наборов $\widetilde{\alpha}^n$ из B^n, удовлетворяющих условию $\widetilde{\beta}^n \preccurlyeq \widetilde{\alpha}^n \preccurlyeq \preccurlyeq \widetilde{\gamma}^n$, где $\widetilde{\beta}^n$ и $\widetilde{\gamma}^n$ — два фиксированных набора и $\rho(\widetilde{\beta}^n, \widetilde{\gamma}^n) = k$ $(n \geqslant k \geqslant 1)$;
6) число наборов $\widetilde{\alpha}^n$ из B^n таких, что $\rho(\widetilde{\alpha}^n, \widetilde{\beta}^n) + \rho(\widetilde{\alpha}^n, \widetilde{\gamma}^n) \neq \neq \rho(\widetilde{\beta}^n, \widetilde{\gamma}^n)$, где $\widetilde{\beta}^n$ и $\widetilde{\gamma}^n$ — два фиксированных набора и $\rho(\widetilde{\beta}^n, \widetilde{\gamma}^n) = l$ $(n \geqslant l \geqslant 1)$;

7) число наборов $\widetilde{\alpha}^{2m} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{2m})$ из B^{2m}, удовлетворяющих условию: $\dfrac{l-1}{2} \leqslant \sum\limits_{i=1}^{l} \alpha_i \leqslant \dfrac{l+1}{2}$ для каждого $l = 1, 2, \ldots, 2m$ $(m \geqslant 1)$;

8) число наборов $\widetilde{\alpha}^{n}$ в B^n_k, у которых между любыми единичными компонентами находится не менее r нулевых компонент $(0 \leqslant r \leqslant n-2,\ 2 \leqslant k \leqslant n)$.

1.5. Показать, что:

1) два различных набора в B^n, имеющих одинаковый вес, несравнимы $(n \geqslant 2)$;

2) в B^n существует только два сравнимых противоположных набора $(n \geqslant 1)$;

3) в B^n существует множество, состоящее из $\binom{n-1}{[(n-1)/2]}$ попарно несравнимых наборов, не сравнимых с набором $(10\ldots0)$ $(n \geqslant 2)$;

4) всякое подмножество в B^n, содержащее не менее $n+2$ наборов, содержит пару несравнимых наборов $(n \geqslant 2)$;

5) число наборов в B^n, не сравнимых с фиксированным набором $\widetilde{\alpha}^{n}$, имеющим вес k, равно $2^n - 2^{n-k} - 2^k + 1$ $(n \geqslant 1$ и $n \geqslant k \geqslant 0)$;

6) если $\widetilde{\alpha}^{n}$ и $\widetilde{\beta}^{n}$ — два несравнимых набора из B^n $(n \geqslant 2)$, имеющих l общих единичных компонент $(l \geqslant 0)$, и $\|\widetilde{\alpha}^{n}\| = r$, $\|\widetilde{\beta}^{n}\| = s$, то число наборов, которые не сравнимы ни с одним из наборов $\widetilde{\alpha}^{n}$ и $\widetilde{\beta}^{n}$, равно $2^n + 2^{n+l-r-s} + 2^l + 2 - 2^{n-r} - 2^{n-s} - 2^r - 2^s$ (в частности, если наборы $\widetilde{\alpha}^{n}$ и $\widetilde{\beta}^{n}$ противоположные, то имеем $2^n - 2^{n-r+1} - 2^{r+1} + 4$ наборов).

1.6. Найти число функций в $P_2(X^n)$ (т. е. функций, зависящих от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$), удовлетворяющих условию:

1) на данных l наборах значения функции фиксированы, а на остальных произвольные $(1 \leqslant l \leqslant 2^n - 1,\ n \geqslant 1)$;

2) функция $f(\widetilde{x}^{n})$ равна 1 на всяком наборе $\widetilde{\alpha}^{n}$, вес которого удовлетворяет неравенствам $(n-1)/2 \leqslant \|\widetilde{\alpha}^{n}\| \leqslant n/2$, а на остальных наборах значения функции произвольные $(n \geqslant 2)$;

3) на противоположных наборах функция принимает одинаковые значения $(n \geqslant 1)$;

4) на каждой паре соседних наборов функция принимает противоположные значения $(n \geqslant 1)$;

5) функция равна 0 не менее чем на половине наборов $(n \geqslant 1)$;

6) функция $f(\widetilde{x}^{n})$ совпадает с функцией, получаемой из нее при перестановке переменных x_1 и x_2 $(n \geqslant 2)$;

7) функция $f(\widetilde{x}^{n})$ *симметрическая*, т. е. $f(x_1, x_2 \ldots, x_n) = f(x_{i_1}, x_{i_2} \ldots, x_{i_n})$ при любой подстановке $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ i_1 & i_2 & \ldots & i_n \end{pmatrix}$, $n \geqslant 1$;

8) если функция обращается в 1 на некотором наборе веса k $(0 \leqslant k \leqslant n-1)$, то она равна 1 и на всяком наборе большего веса $(n \geqslant 1)$.

1.7. 1) Булева функция $f(\widetilde{x}^3)$ определяется так. Она равна 1 только в тех случаях, когда $x_1 = 1$ либо когда выполняется следующее условие: переменные x_2 и x_3 принимают разные значения, а значение переменной x_1 меньше значения переменной x_3; в остальных случаях функция обращается в 0. Построить таблицы $T(f)$ и $\Pi_{1,2}(f)$ функции $f(\widetilde{x}^3)$ и выписать наборы множества N_f.

2) Булева функция $f(\widetilde{x}^4)$ задается следующим образом: она равна 0 только на таких наборах $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$, для которых справедливо неравенство $2\alpha_1 + \alpha_2 > \alpha_3 + 2\alpha_4$; на остальных наборах она обращается в 1. Построить таблицы $T(f)$ и $\Pi_{2,2}(f)$ этой функции и выписать наборы множества N_f.

3) Пусть наборы (x_1, x_2) и (x_3, x_4) задают двоичные разложения чисел ν_1 и ν_2 соответственно. Обозначим через $f_i(\widetilde{x}^4)$ i-й разряд двоичного разложения (f_2, f_1) числа $|\nu_1 - \nu_2|$, $i = 1, 2$. Построить прямоугольные таблицы $\Pi_{2,2}$ функций $f_1(\widetilde{x}^4)$ и $f_2(\widetilde{x}^4)$.

4) На аварийном пульте системы расположены четыре сигнальные лампочки: L_1, L_2, L_3, L_4. Система выключается только в том случае, когда выполняется хотя бы одно из следующих условий: а) загорелась лампочка L_1, но не загорелась лампочка L_2; б) загорелись лампочки L_2 и L_3, но не горит лампочка L_4; в) загорелась лампочка L_4 и не горит лампочка L_1. Построить таблицу $T(f)$ булевой функции $f(\widetilde{x}^4)$, характеризующей условия выключения системы, т. е. $f(\widetilde{x}^4) = 1$ тогда и только тогда, когда справедливо хотя бы одно из условий а), б), в); при этом предполагается, что $x_i = 1$, если лампочка L_i горит, и $x_i = 0$, если лампочка L_i не горит.

5) Для оценки гипотез H_1 и H_2 проводятся пять разнотипных экспериментов: A_1, A_2, A_3, A_4, A_5. Каждый эксперимент упорядочивает гипотезы по предпочтению относительно некоторого признака. Гипотеза H_1 принимается только в следующих случаях: а) в большинстве экспериментов предпочтение отдавалось H_1; б) в экспериментах A_1 и A_2 предпочтение отдавалось гипотезе H_2, но в эксперименте A_4 предпочтение отдано гипотезе H_1. Гипотеза H_2 принимается в случаях, когда: в) в экспериментах A_2 и A_3 предпочтение отдавалось ей, а в экспериментах A_1 и A_4 — гипотезе H_1; г) в экспериментах A_1 и A_5 предпочтение отдавалось гипотезе H_2, а в экспериментах A_3 и A_4 — гипотезе H_1. Полагаем $x_j = 0$, если эксперимент A_j «поддерживает» гипотезу H_1, и $x_j = 1$, если в эксперименте A_j предпочтение отдано гипотезе H_2 $(j = 1, \ldots, 5)$. Записать в виде булевых функций $f_{H_1}(\widetilde{x}^5)$ и $F_{H_2}(\widetilde{x}^5)$ условия принятия гипотез H_1 и H_2 $(f_{H_i}(\widetilde{\alpha}^5) = 1)$ тогда и только тогда, когда по набору $\widetilde{\alpha}^5$ принимается гипотеза H_i $(i = 1, 2)$. Выяснить, возможна ли такая ситуация, когда окажутся принятыми обе гипотезы.

6) Четырем членам B_1, B_2, B_3, B_4 некоторой комиссии сформулированы следующие условия посещения заседаний (хотя бы одно из них они должны выполнить): а) в заседании не участвует ни B_1, ни B_2, но должен быть B_3; б) в заседании принимают участие B_2 и B_4, но отсутствует B_3; в) на заседании должны присутствовать B_1 и B_4.

Выяснить, обязан ли присутствовать на заседании комиссии член B_3, если в нем не участвует B_2.

7) Проект принимается, если большинство из шести экспертов $C_1, \ldots, C_6$ высказалось в его пользу. Кроме того, проект все же принимается, если указанное условие не выполнено, но за принятие проекта высказались: а) либо эксперты C_1, C_2, C_3; б) либо эксперты C_2, C_4, C_5; в) либо эксперты C_1, C_5, C_6. Записать в виде булевой функции $f(\widetilde{x}^6)$ условие принятия проекта, считая, что $x_i = 1$ в том случае, когда i-й эксперт высказывается за принятие проекта, и $x_i = 0$ в противном случае. Выяснить, будет ли обязательно принят проект, если известно, что за его принятие высказались ровно трое из экспертов C_1, C_3, C_4 и C_6, а кто-то один из экспертов C_2 и C_5 высказался против.

3. Формулы. Реализация булевых функций формулами.

Пример 9. Доказать, что выражения $\mathfrak{A}_1 = \neg x) \to \neg(\neg y \,\&\, z$ и $\mathfrak{A}_2 = (x \vee (\neg y)) \to (x \,\&\, \neg y)$ не являются формулами над множеством логических связок $\{\neg,\ \&\ ,\ \vee,\ \to\}$, но что, добавляя скобки, каждое из этих выражений можно превратить в формулу над указанным множеством связок.

Решение. Для доказательства того, что некоторое выражение $\mathfrak{A}$ *не является формулой* над каким-то фиксированным множеством Φ (функциональных символов и/или логических связок), достаточно выявить какое-либо свойство, присущее каждой формуле над заданным множеством Φ, но которым не обладает выражение $\mathfrak{A}$. Утверждение о том, что любая формула над множеством Φ обладает выявленным свойством, обосновывается обычно по индукции — по «сложности» формул (например, по числу связок или по числу функциональных символов, входящих в формулы). В выражении $\mathfrak{A}_1 = \neg x) \to \neg(\neg y \,\&\, z$ нарушено несколько свойств, присущих формулам над множеством $\{\neg,\ \&\ ,\ \vee,\ \to\}$:

а) обе скобки, содержащиеся в $\mathfrak{A}_1$, не имеют парных им скобок;

б) отсутствуют внешние скобки;

в) не отделена скобками связка $\to$ от остальных связок.

Добавляя скобки, выражение $\mathfrak{A}_1$ можно превратить, например, в формулу или $((\neg x) \to (\neg(\neg(y \,\&\, z))))$, или $((\neg x) \to (\neg((\neg y) \,\&\, z)))$, или $((\neg x) \to ((\neg(\neg y)) \,\&\, z))$.

В выражении $\mathfrak{A}_2 = (x \vee (\neg y)) \to (x \,\&\, \neg y)$ не хватает только двух пар скобок: внешних и отделяющих связку $\&$ от связки $\neg$. Формула, соответствующая выражению $\mathfrak{A}_2$, имеет вид $((x \vee (\neg y)) \to (x \,\&\, (\neg y)))$.

Для обоснования того, что оба выражения $\mathfrak{A}_1$ и $\mathfrak{A}_2$ не являются формулами над множеством связок $\{\neg,\ \&\ ,\ \vee,\ \to\}$, достаточно, например, установить справедливость такого утверждения: всякая формула над множеством связок $\{\neg,\ \&\ ,\ \vee,\ \to\}$, отличная от формул вида x, y, $\ldots$, обладает парой внешних скобок.

Доказательство этого факта проведем по индукции — по числу связок $\neg$, $\&$, $\vee$, $\to$ в формулах.

Базис индукции. Если в формуле $\mathfrak{A}$ только одна связка, то с точностью до переименования переменных (с отождествлением)

формула $\mathfrak{A}$ имеет один из следующих видов: $\mathfrak{A} = (\neg x)$, $\mathfrak{A} = (x \,\&\, y)$, $\mathfrak{A} = (x \vee y)$ и $\mathfrak{A} = (x \to y)$. Следовательно, базис индукции справедлив.

Индуктивный шаг. Предположим, что доказываемое утверждение верно для формул, содержащих не более s связок $(s \geqslant 1)$, и установим его истинность для формул с числом связок, равным $s+1$. Имеем или $\mathfrak{A} = (\neg \mathfrak{B})$, или $\mathfrak{A} = (\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{C})$, или $\mathfrak{A} = (\mathfrak{B} \vee \mathfrak{C})$, или $\mathfrak{A} = (\mathfrak{B} \to \mathfrak{C})$, причем одна из подформул $\mathfrak{B}$ или $\mathfrak{C}$ в формулах трех последних видов может быть (с точностью до переименования переменных) формулой, равной x. Очевидно, что индуктивный шаг также справедлив.

Пример 10. Построив таблицы функций, реализуемых формулами $\mathfrak{A} = ((x \downarrow y) \to ((y \oplus (x \vee z)) \mid z))$ и $\mathfrak{B} = ((x \vee \overline{y}) \sim (x \to (y \oplus \oplus (x \,\&\, z))))$, выяснить, эквивалентны ли эти формулы.

Решение. Принимая во внимание тот факт, что функция $x \to y$ обращается в 0 только на наборе $(1, 0)$, а функция $x \downarrow y$ равна 1 лишь на наборе $(0, 0)$, мы можем упростить процедуру построения таблицы функции $\varphi_{\mathfrak{A}}(x, y, z)$, реализуемой формулой $\mathfrak{A}$. В самом деле, $\varphi_{\mathfrak{A}} = 0$ тогда и только тогда, когда $x \downarrow y = 1$ и $(y \oplus (x \vee z)) \mid z = 0$, т. е. когда $x = y = 0$ и $(0 \oplus (0 \vee z)) \mid z = z \mid z = \overline{z} = 0$. Следовательно, $\varphi_{\mathfrak{A}} = 0$ только при $x = y = 0$ и $z = 1$ (табл. 1.5). Таблицу функции $\varphi_{\mathfrak{B}}(x, y, z)$, реализуемой формулой $\mathfrak{B}$, будем строить шаг за шагом (табл. 1.6).

Таблица 1.5

x	y	z	$\varphi_{\mathfrak{A}}$
0	0	0	1
0	0	1	0
0	1	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	0	1	1
1	1	0	1
1	1	1	1

Таблица 1.6

x	y	z	$\overline{y}$	$\varphi_1 = x \vee \overline{y}$	$x \cdot z$	$\varphi_2 = y \oplus x \cdot z$	$\varphi_3 = x \to \varphi_2$	$\varphi_{\mathfrak{B}} = \varphi_1 \sim \varphi_3$
0	0	0	1	1	0	0	1	1
0	0	1	1	1	0	0	1	1
0	1	0	0	0	0	1	1	0
0	1	1	0	0	0	1	1	0
1	0	0	1	1	0	0	0	0
1	0	1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	0	1	1	1
1	1	1	0	1	1	0	0	0

Сравнивая таблицы функций $\varphi_{\mathfrak{A}}$ и $\varphi_{\mathfrak{B}}$, видим, что $\varphi_{\mathfrak{A}} \neq \varphi_{\mathfrak{B}}$. Значит, формулы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ неэквивалентны.

Пример 11. Используя основные эквивалентности (см. п. 3 после задачи 1.20), установить эквивалентность формул

$$\mathfrak{A} = (x \downarrow \overline{y}) \to (\overline{x}z \to ((\overline{x} \mid (y \sim z)) \vee (\overline{x \cdot y} \oplus z)))$$

и

$$\mathfrak{B} = ((x \to y) \mid (x \downarrow (y\overline{z}))) \vee \overline{yz}.$$

Решение. Применяя основные эквивалентности $8,$в), $9,$а) и $9,$б), получаем $\mathfrak{A} = \overline{\overline{x \vee \overline{y}} \vee \overline{x}z} \vee (\overline{\overline{x}(y \sim z)} \vee (\overline{xy} \oplus z))$. Используя затем основные эквивалентности $7,$д), $4,$а), $8,$б) и $8,$а), имеем $\mathfrak{A} = (x \vee \overline{y}) \vee \vee (x \vee \overline{z}) \vee ((x \vee (y \oplus z)) \vee ((\overline{x} \vee \overline{y})\overline{z} \vee \overline{xyz}))$. Далее применяем основ-

ные эквивалентности 2, 7, в), 7, д), 1, 3 и 8, а): $\mathfrak{A} = x \vee \overline{y} \vee \overline{z} \vee y\overline{z} \vee \overline{y}z \vee \vee \overline{x}\overline{z} \vee \overline{y}\overline{z} \vee xyz$. Наконец, воспользовавшись правилом поглощения 5, а), приходим к соотношению $\mathfrak{A} = x \vee \overline{y} \vee \overline{z}$. Преобразуем теперь к такому же виду и формулу $\mathfrak{B}$. Имеем $\mathfrak{B} = (\overline{x} \vee y)\overline{x \vee y\overline{z}} \vee \overline{y} \vee \overline{z}$ (здесь были использованы основные эквивалентности 8, в), 9, а), 9, б) и 4, а)). Далее, применяя основные эквивалентности 4, а), 7, д) и 4, б), получаем $\mathfrak{B} = x\overline{y} \vee x \vee y\overline{z} \vee \overline{y} \vee \overline{z}$. С помощью закона поглощения 5, а) последнее выражение преобразуется к такому: $x \vee \overline{y} \vee \overline{z}$. Тем самым эквивалентность формул $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ доказана.

1.8. Выяснить, какие из нижеприводимых выражений являются формулами над множеством логических связок $S = \{\neg, \&, \vee, \oplus, \sim, \to\}$. Проверить, можно ли некоторые из приведенных ниже выражений (и какие), не являющиеся формулами над S, превратить в формулы, добавляя скобки:

1) $x \to x$; 2) $x \vee (\neg y)$; 3) $x \oplus (\& y)$; 4) $(x \vee y) \to (x \oplus (\neg z))$;
5) $(x \leftarrow y)$; 6) $(x \&) \neg x$; 7) $(x \oplus (z))$; 8) $\neg(x \to ((\neg x) \& y))$;
9) $(x \sim y) \neg y$; 10) $((x \to (\neg y)) \sim ((x \vee (y \& z)) \oplus y))$; 11) $(\neg x \to y)$;
12) $((x \& (\neg x)) \vee (x \oplus (x \to x)) \vee (\neg x))$.

1.9. Выяснить, является ли выражение A формулой над множеством Φ. Проверить, можно ли, добавляя скобки, запятые и переменные (не обязательно все эти знаки), превратить некоторые из приведенных ниже выражений (и какие) в формулы над соответствующими множествами Φ:

1) $A = g^{(1)}(f^{(2)}(1, x))$, $\Phi = \{f^{(2)}, g^{(1)}\}$;
2) $A =)x(\varphi^{(1)}$, $\Phi = \{h^{(1)}, \varphi^{(1)}\}$;
3) $A = (\varphi^{(1)}(f^{(2)}(x, \varphi^{(1)}(x))))$, $\Phi = \{f^{(2)}, \varphi^{(1)}\}$;
4) $A = f^{(2)}(g^{(2)}(xy), h^{(2)}(1, y))$, $\Phi = \{1, f^{(2)}, g^{(2)}, h^{(2)}\}$;
5) $A = g^{(2)}(\varphi^{(3)}(x, y, f^{(1)}(x)), f^{(1)}x)$, $\Phi = \{f^{(1)}, g^{(2)}, \varphi^{(3)}\}$;
6) $A = h^{(1)}(f^{(2)}(g^{(2)}(x, h^{(1)}(x)), h^{(1)}(y)))$,
$\Phi = \{0, f^{(2)}, g^{(2)}, h^{(1)}, \varphi^{(2)}\}$;
7) $A = h^{(2)}(\varphi^{(1)}(1), g^{(2)}(2, \varphi^{(1)}(x)))$, $\Phi = \{1, 2, g^{(2)}, h^{(2)}, \varphi^{(1)}\}$;
8) $A = g^{(2)}(1, \varphi^{(2)}(x, h^{(1)}(\varphi^{(2)}(x, y))))$,
$\Phi = \{1, g^{(3)}, h^{(1)}, \varphi^{(2)}\}; \varphi^{(2)}\}$;
9) $A = g^{(2)}(h^{(2)}(1, \varphi^{(3)}(2, x, f^{(1)}(x))))$,
$\Phi = \{1, 2, f^{(1)}, g^{(2)}, h^{(2)}, \varphi^{(3)}\}$;
10) $A = h^{(1)}(x, \varphi^{(2)}(x, f^{(1)}(1)))$, $\Phi = \{1, f^{(1)}, h^{(1)}, \varphi^{(2)}\}$.

1.10. Выписать все подформулы формулы A над множеством Φ:

1) $A = ((x \sim y) \to ((\neg y) \to (x \vee z)))$, $\Phi = \{\neg, \vee, \sim, \to\}$;
2) $A = (((x \& y) \& z) \oplus (((\neg x) \oplus y) \vee z))$, $\Phi = \{\neg, \&, \vee, \oplus, \to\}$;
3) $A = f^{(2)}(g^{(2)}(1, x), h^{(3)}(x, 1, \varphi^{(1)}(g^{(2)}(x, x))))$,
$\Phi = \{1, 2, f^{(2)}, g^{(2)}, h^{(3)}, \varphi^{(1)}\}$;
4) $A = g^{(1)}(f^{(3)}(h^{(2)}(1, x), \varphi^{(3)}(1, y, g^{(1)}(1)), g^{(1)}(x)))$,
$\Phi = \{1, f^{(3)}, g^{(1)}, h^{(2)}(1, \square), \varphi^{(3)}(1, \square, \square)\}$,

символом $\square$ указаны «пустые» места;

5) $A = f^{(2)}(g^{(1)}(x \to y),\ h^{(1)}(x \,\&\, y))$, $\Phi = \{f^{(2)},\ f_1^{(2)},\ f_2^{(2)}\}$,
где $f_1^{(2)}(\square,\ \square) = g^{(1)}(\square \to \square)$ и $f_2^{(2)}(\square,\ \square) = h^{(1)}(\square \,\&\, \square)$ (здесь символом $\square$ указаны те «пустые» места, которые характеризуют «арность» соответствующих логических связок).

1.11. Выяснить, сколькими способами можно расставить скобки в выражении A, чтобы всякий раз получалась формула над множеством логических связок $\{\neg,\ \&\,,\ \vee,\ \oplus,\ \to,\ \downarrow\}$, если:
1) $A = \neg\, x \oplus y \to x$; 2) $A = x \to x \downarrow x \to x$;
3) $A = x \vee y \,\&\, \neg\, x \downarrow z$; 4) $A = \neg\, x \oplus \neg\, y \to \neg\, z$;
5) $A = \neg\,\neg\, x \downarrow \neg\,\neg\,\neg\, y$; 6) $A = x \vee \neg\, y \oplus x \oplus x\, \neg\, x$.

1.12. *Сложностью формулы* над множеством связок $\mathfrak{I} = \{\neg,\ \&\,,\ \vee,\ \oplus,\ \sim,\ \to, |,\ \downarrow\}$ назовем число связок в ней. Индукцией по сложности формулы доказать, что в формуле:
1) ненулевой сложности содержится хотя бы одна пара скобок;
2) число левых скобок равно числу правых скобок;
3) нет двух связок, стоящих рядом;
4) нет двух символов переменных, стоящих рядом.

1.13. *Индексом связки в формуле* назовем разность между числом левых скобок, предшествующих рассматриваемой связке в данной формуле, и числом правых скобок, предшествующих этой связке. Доказать, что всякая формула ненулевой сложности над множеством $\mathfrak{S}$ (см. предыдущую задачу):
1) содержит единственную связку индекса 1;
2) единственным образом представляется в каком-нибудь одном из видов $(\neg\,\mathfrak{A})$, $(\mathfrak{A} \,\&\, \mathfrak{B})$, $(\mathfrak{A} \vee \mathfrak{B})$, $(\mathfrak{A} \oplus \mathfrak{B})$, $(\mathfrak{A} \sim \mathfrak{B})$, $(\mathfrak{A} \to \mathfrak{B})$, $(\mathfrak{A} \mid \mathfrak{B})$, $(\mathfrak{A} \downarrow \mathfrak{B})$, где $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — формулы над множеством $\mathfrak{S}$.

1.14. Рассмотрим *бесскобочную* (*польскую*) *запись* формул над множеством связок $\mathfrak{S} = \{\neg,\ \&\,,\ \vee,\ \oplus,\ \sim,\ \to, |,\ \downarrow\}$: вместо $(\neg\, x)$, $(x \,\&\, y)$, $(x \vee y)$, $(x \oplus y)$, $(x \sim y)$, $(x \to y)$, $(x \mid y)$, $(x \downarrow y)$ будем писать $\neg\, x$, $\&\, xy$, $\vee xy$, $\oplus xy$, $\sim xy$, $\to xy$, $\mid xy$, $\downarrow xy$. Соответствующим образом записываются и более сложные формулы; например, формула $(((\neg\, x) \to y) \,\&\, (\neg(z \downarrow x)))$ в бесскобочной записи будет иметь вид $\&\to \neg\, xy\ \ \neg\downarrow zx$. Доказать, что если каждую из связок $\&\,,\ \vee,\ \oplus,\ \sim,\ \to,\ |,\ \downarrow$ оценить числом $+1$, связку $\neg$ — числом 0, а каждый символ переменной — числом -1, то в бесскобочной записи произвольное выражение A над множеством $\mathfrak{S}$ будет формулой тогда и только тогда, когда сумма оценок всех вхождений символов в A равна -1 и в каждом собственном начальном отрезке выражения A (т. е. в непустом и отличном от всего A) эта сумма неотрицательна.

1.15. Построить диаграмму, характеризующую строение формулы A над множеством Φ:
1) $A = ((\neg(x \to (\neg\, y))) \oplus ((z \vee (y \,\&\, x)) \downarrow y))$,
$\Phi = \{\neg,\ \&\,,\ \vee,\ \oplus,\ \to,\ \downarrow\}$;
2) $A = (((x \to y) \to (\neg((x \mid y) \to (x \mid z)))) \to ((\neg\, y) \to z))$,
$\Phi = \{\neg,\ \to,\ |\}$;
3) $A = (((((x \oplus y) \oplus x) \oplus y) \oplus z) \oplus (x \oplus z))$, $\Phi = \{\oplus\}$;

4) $A = ((((x \downarrow y) \mid (y \downarrow x)) \mid z) \downarrow (x \mid z)), \quad \Phi = \{|, \downarrow\};$

5) $A = f^{(1)}(g^{(2)}(f^{(1)}(x),\ h^{(2)}(g^{(2)}(x,\ f^{(1)}(y)),\ f^{(1)}(x)))),$
$\Phi = \{f^{(1)},\ g^{(2)},\ h^{(2)}\};$

6) $A = f^{(3)}(g^{(1)}(f^{(3)}(x,\ x,\ x)),\ h^{(2)}(x,\ g^{(1)}(f^{(3)}(x,\ y,\ y))),\ y),$
$\Phi = \{f^{(3)},\ g^{(1)},\ h^{(2)}\};$

7) $A = f^{(2)}(((x \to (\neg\, y)) \to z),\ g^{(1)}((x \oplus y) \to z)),$
$\Phi = \{f^{(2)},\ g^{(1)},\ \neg,\ \to,\ \oplus\}.$

1.16. Восстановить формулы по диаграммам из рис. 1.3.

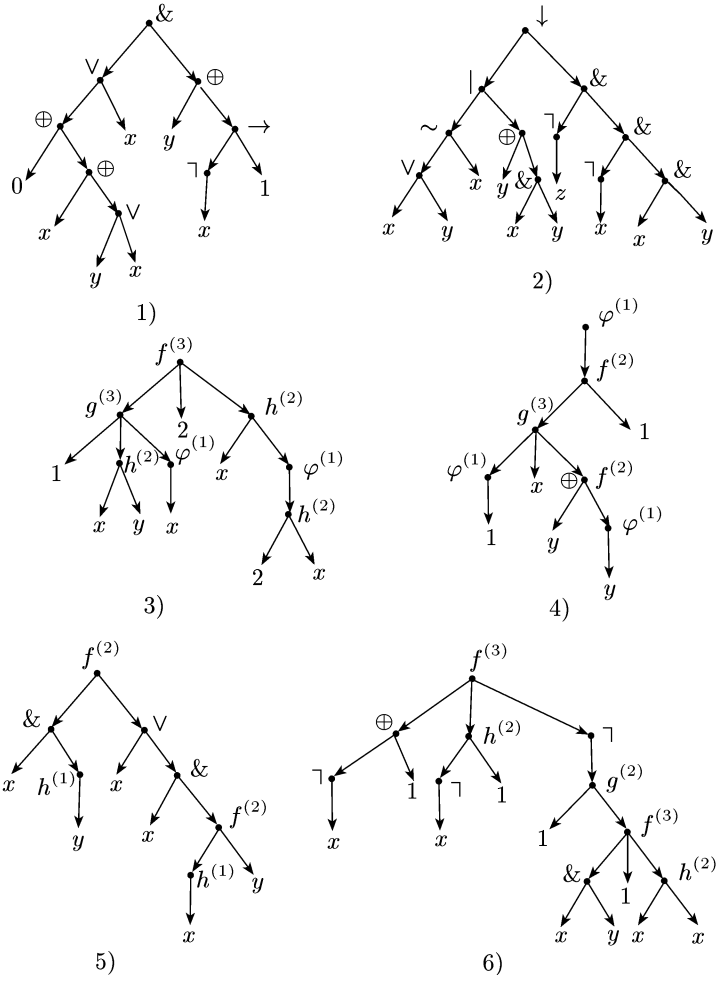


Рис. 1.3

1.17. Построить таблицы функций, реализуемых следующими формулами над множеством связок $\mathfrak{S} = \{\neg, \&, \vee, \oplus, \sim, \to, |, \downarrow\}$:

1) $((x \to \overline{y}) \vee (x \oplus z)) \cdot (y \mid z)$; 2) $((\overline{x} \cdot y) \downarrow (x \mid y)) \to (z \to \overline{y})$;

3) $\overline{(x \sim y) \vee (\overline{y} \to z)} \downarrow ((x \oplus z) \vee y)$; 4) $\overline{\overline{x} \to y} \oplus ((x \to z) \sim y) \cdot z$;

5) $\overline{(x \vee \overline{y}) \to ((x \downarrow \overline{y}) \mid z)} \downarrow y$; 6) $\overline{(x \sim y) \to (\overline{x} \cdot \overline{z} \to y)} \to \overline{x} \cdot z$;

7) $((x \downarrow y) \mid z) \mid x) \downarrow y$; 8) $((x \to y) \oplus (x \to y \cdot z)) \mid (x \downarrow y)$.

1.18. По функциям $f(x_1, x_2)$ и $g(x_1, x_2)$, заданным векторно, построить векторное представление функции h:

1) $\widetilde{\alpha}_f = (0010)$, $\widetilde{\alpha}_g = (1000)$, $h(x_1, x_2, x_3) = f(x_1, x_3) \,\&\, g(x_2, x_1)$;

2) $\widetilde{\alpha}_f = (0100)$, $\widetilde{\alpha}_g = (1101)$,
$$h(x_1, x_2) = f(x_1, g(x_2, x_1)) \vee g(x_2, f(x_1, x_1));$$

3) $\widetilde{\alpha}_f = (1001)$, $\widetilde{\alpha}_g = (1110)$,
$$h(x_1, x_2, x_3, x_4) = f(x_1, x_3) \oplus g(x_2, f(x_1, x_4)),$$
для функции h построить и таблицу $\Pi_{2,2}(h)$;

4) $\widetilde{\alpha}_f = (0110)$, $\widetilde{\alpha}_g = (1011)$, $h(x_1, x_2, x_3) = f(g(x_1, x_3), f(x_2, x_1))$;

5) $\widetilde{\alpha}_f = (1101)$, $\widetilde{\alpha}_g = (0111)$,
$$h(x_1, x_2) = f(g(x_1, x_2), x_2) \to g(x_2, f(x_2, x_1));$$

6) $\widetilde{\alpha}_f = (1000)$, $\widetilde{\alpha}_g = (0110)$, $h(x_1, x_2, x_3, x_4) =$
$$= f(x_1, f(x_2, x_1)) \vee g(f(x_1, x_2), g(x_1, x_3))) \oplus f(g(x_3, x_4), f(x_2, x_2)),$$
для функции h построить и таблицу $\Pi_{2,2}(h)$.

1.19. Построив таблицы соответствующих функций, выяснить, эквивалентны ли формулы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$:

1) $\mathfrak{A} = (x \to y) \oplus ((y \to \overline{z}) \to x \cdot y)$, $\mathfrak{B} = \overline{y \cdot z \to x}$;

2) $\mathfrak{A} = (x \vee \overline{y}) \downarrow (\overline{x} \to (y \to z))$, $\mathfrak{B} = \overline{y \to (x \vee z)}$;

3) $\mathfrak{A} = x \to ((y \to z) \to y \cdot z)$, $\mathfrak{B} = (x \vee (y \to z)) \cdot (x \oplus y)$;

4) $\mathfrak{A} = \overline{(x \downarrow y) \vee (x \sim z)} \mid (x \oplus y \cdot z)$, $\mathfrak{B} = \overline{x} \cdot (y \cdot z) \vee \overline{x \to z}$;

5) $\mathfrak{A} = ((x \vee y) \cdot \overline{z} \to ((x \sim \overline{z}) \oplus \overline{y})) \cdot ((x \oplus y) \cdot \overline{z})$,
$$\mathfrak{B} = (x \to yz) \,\&\, \overline{x \to y};$$

6) $\mathfrak{A} = (\overline{x} \vee y) \to ((y \mid \overline{z}) \to (x \sim x \cdot z))$, $\mathfrak{B} = xy \vee (\overline{x \to x\overline{y}} \to z)$;

7) $\mathfrak{A} = (x \mid \overline{y}) \to ((y \downarrow \overline{z}) \to (x \oplus z))$, $\mathfrak{B} = x \cdot (y \cdot z) \oplus (\overline{x} \to z)$;

8) $\mathfrak{B} = (((x \mid y) \downarrow \overline{z}) \mid y) \downarrow (\overline{y} \to z)$,
$$\mathfrak{B} = ((x \mid y) \downarrow (y \mid \overline{z})) \cdot (x \to (y \to z));$$

9) $\mathfrak{A} = (x \cdot y \to z) \vee ((x \downarrow y) \mid z)$,
$$\mathfrak{B} = ((x \to y \cdot z) \oplus (x \sim y)) \vee (y \to x \cdot z);$$

10) $\mathfrak{A} = \overline{x \oplus y \cdot z} \cdot \overline{\overline{y} \to x \cdot z} \cdot (\overline{x} \downarrow y)$, $\mathfrak{B} = \overline{(x \cdot y \to (y \downarrow z)) \vee x \cdot z \cdot z}$.

1.20. Построив таблицы для соответствующих функций, убедиться в справедливости следующих эквивалентностей:

1) $x \vee y = (x \to y) \to y$; 2) $x \sim y = (x \to y) \,\&\, (y \to x)$;

3) $x \downarrow y = ((x \mid x) \mid (y \mid y)) \mid ((x \mid x) \mid (y \mid y))$;

4) $x \vee (y \sim z) = (x \vee y) \sim (x \vee z)$;
5) $x \,\&\, (y \sim z) = ((x \,\&\, y) \sim (x \,\&\, z)) \sim x$;
6) $x \to (y \sim z) = (x \to y) \sim (x \to z)$;
7) $x \vee (y \to z) = (x \vee y) \to (x \vee z)$;
8) $x \,\&\, (y \to z) = (x \to y) \to (x \,\&\, z)$;
9) $x \to (y \vee z) = (x \to y) \vee (x \to z)$;
10) $x \to (y \,\&\, z) = (x \to y) \,\&\, (x \to z)$;
11) $x \to (y \to z) = (x \to y) \to (x \to z)$.

При оперировании с функциями алгебры логики бывают полезны следующие эквивалентности (большинство из них называют обычно *основными эквивалентностями* алгебры логики).

1. $x \circ y = y \circ x$ — коммутативность связки $\circ$, где символ $\circ$ является общим обозначением для связок $\&$, $\vee$, $\oplus$, $\sim$, $|$, $\downarrow$.

2. $(x \circ y) \circ z = x \circ (y \circ z)$ — ассоциативность связки $\circ$, где $\circ$ — общее обозначение для связок $\&$, $\vee$, $\oplus$, $\sim$.

3. а) $x \,\&\, (y \vee z) = (x \,\&\, y) \vee (x \,\&\, z)$ — дистрибутивность конъюнкции относительно дизъюнкции;

б) $x \vee (y \,\&\, z) = (x \vee y) \,\&\, (x \vee z)$ — дистрибутивность дизъюнкции относительно конъюнкции;

в) $x \,\&\, (y \oplus z) = (x \,\&\, y) \oplus (x \,\&\, z)$ — дистрибутивность конъюнкции относительно сложения по mod 2.

4. а) $\overline{x \,\&\, y} = \overline{x} \vee \overline{y}$; б) $\overline{x \vee y} = \overline{x} \,\&\, \overline{y}$ (правила де Моргана).

5. а) $x \vee (x \,\&\, y) = x$; б) $x \,\&\, (x \vee y) = x$ (правила поглощения).

6. а) $x \vee (\overline{x} \,\&\, y) = x \vee y$; б) $x \,\&\, (\overline{x} \vee y) = x \,\&\, y$.

7. а) $x \,\&\, \overline{x} = x \,\&\, 0 = x \oplus x = 0$;

б) $x \vee \overline{x} = x \vee 1 = x \sim x = x \to x = 1$;

в) $x \vee x = x \,\&\, x = x \,\&\, 1 = x \vee 0 = x \oplus 0 = x$;

г) $x \oplus 1 = x \to 0 = x \sim 0 = x \mid x = x \downarrow x = \overline{x}$; д) $\overline{\overline{x}} = x$.

8. а) $x \oplus y = (x \,\&\, \overline{y}) \vee (\overline{x} \,\&\, y) = (x \vee y) \,\&\, (\overline{x} \vee \overline{y})$;

б) $x \sim y = \overline{x \oplus y} = (x \,\&\, y) \vee (\overline{x} \,\&\, \overline{y}) = (x \vee \overline{y}) \,\&\, (\overline{x} \vee y)$;

в) $x \to y = \overline{x} \vee y = ((x \,\&\, y) \oplus x) \oplus 1$.

9. а) $x \mid y = \overline{x \,\&\, y} = \overline{x} \vee \overline{y}$; б) $x \downarrow y = \overline{x \vee y} = \overline{x} \cdot \overline{y}$.

В справедливости этих эквивалентностей можно убедиться путем построения таблиц соответствующих им функций.

1.21. Используя приведенные выше (основные) эквивалентности и соотношения из задачи 1.20, доказать эквивалентность формул $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$:

1) $\mathfrak{A} = (\overline{x} \to y) \to (\overline{x} \cdot y \sim (x \oplus y))$, $\mathfrak{B} = (\overline{x \cdot y} \to x) \to y$;
2) $\mathfrak{A} = (x \cdot y \vee (\overline{x} \to y \cdot z)) \sim ((\overline{x} \to \overline{y}) \to z)$, $\mathfrak{B} = (x \to y) \oplus (y \oplus z)$;
3) $\mathfrak{A} = (x \oplus y \cdot z) \to (\overline{x} \to (y \to z))$, $\mathfrak{B} = x \to ((y \to z) \to x)$;

4) $\mathfrak{A} = (\overline{x} \to (\overline{y} \to (x \sim z))) \cdot (x \sim (y \to (z \vee (x \to y))))$,
$\mathfrak{B} = (x \to (y \to z)) \to x$;
5) $\mathfrak{A} = (\overline{x} \vee \overline{y} \cdot z) \to ((x \to y) \to ((y \vee z) \to \overline{x}))$,
$\mathfrak{B} = (x \to y) \to (\overline{y} \to \overline{x})$;
6) $\mathfrak{A} = (x \cdot \overline{y} \vee \overline{x} \cdot z) \oplus ((y \to z) \to \overline{x} \cdot y)$, $\mathfrak{B} = \overline{(x \cdot (\overline{y} \cdot \overline{z}) \oplus y) \oplus z}$;
7) $\mathfrak{A} = x \to ((\overline{x} \cdot \overline{y} \to (\overline{x} \cdot \overline{z} \to y)) \to y) \cdot z$, $\mathfrak{B} = \overline{x \cdot (y \to \overline{z})}$;
8) $\mathfrak{A} = \overline{(x \sim y) \to (x \to \overline{z})} \vee (x \oplus \overline{y} \cdot z)$, $\mathfrak{B} = x \sim (z \to y)$;
9) $\mathfrak{A} = \overline{(x \vee \overline{y} \cdot \overline{z}) \cdot (\overline{x} \to \overline{y} \cdot z)} \cdot (x \to (y \sim z))$,
$\mathfrak{B} = ((x \to y) \sim (y \to (x \to z))) \oplus x \cdot (y \cdot z)$;
10) $\mathfrak{A} = \overline{((x \vee y) \to y \cdot z) \vee (y \to x \cdot z)} \vee (x \to (\overline{y} \to z))$,
$\mathfrak{B} = (x \to y) \vee z$.

1.22. Выписать все булевы функции, зависящие только от переменных из множества $\{x, y\}$ и являющиеся суперпозициями над множеством P:

1) $P = \{u_1 \to u_2,\ u_1 \cdot u_2\}$; 2) $P = \{u_1 \sim u_2,\ u_1 \vee u_2\}$;
3) $P = \{u_1 \oplus u_2,\ u_1 \oplus 1\}$; 4) $P = \{(u_1 \vee u_2) \to u_1 \cdot u_2\}$;
5) $P = \{u_1 \vee u_2 \cdot u_3,\ u_1 \oplus u_2\}$; 6) $P = \{u_1 \cdot u_2,\ u_1 \oplus u_2 \oplus u_3\}$;
7) $P = \{u_1 \cdot u_2 \vee u_1 \cdot u_3 \vee u_2 \cdot u_3,\ u_1 \cdot (u_2 \vee u_3)\}$.

1.23. *Глубина формулы* $\mathfrak{A}$ *над множеством* Φ (обозначение $\operatorname{dep}_\Phi(\mathfrak{A})$) определяется по индукции:

(а) если $\mathfrak{A}$ — символ переменной или 0-местный функциональный символ, то $\operatorname{dep}_\Phi(\mathfrak{A}) = 0$;

(б) если $\mathfrak{A} = f^{(n)}(\mathfrak{A}_1, \ldots, \mathfrak{A}_n)$, где $n \geqslant 1$ и $F^{(n)} \in \Phi$, то $\operatorname{dep}_\Phi(\mathfrak{A}) = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \operatorname{dep}_\Phi(\mathfrak{A}_i) + 1$.

Выяснить, верно ли, что указанная ниже формула $\mathfrak{A}$ имеет минимально возможную глубину среди формул над множеством Φ, реализующих функцию f:

1) $\mathfrak{A} = (x \to (y \oplus y)) \oplus y$, $f = x \sim y$, $\Phi = \{\oplus, \to\}$;
2) $\mathfrak{A} = x \sim (y \sim (x \vee y))$, $f = x \cdot y$, $\Phi = \{\vee, \sim\}$;
3) $\mathfrak{A} = (x \mid x) \mid ((x \mid y) \mid y)$, $f = x \vee y$, $\Phi = \{|\}$;
4) $\mathfrak{A} = \overline{x \cdot \overline{y}}$, $f = x \to y$, $\Phi = \{\neg,\ \&\}$;
5) $\mathfrak{A} = (x \to y) \to \overline{y \to x}$, $f = x \oplus y$, $\Phi = \{\neg, \to\}$;
6) $\mathfrak{A} = ((x \to y) \to y) \sim (x \sim y)$, $f = x \cdot y$, $\Phi = \{\sim, \to\}$;
7) $\mathfrak{A} = ((x \downarrow x) \downarrow (y \downarrow y) \downarrow ((x \downarrow x) \downarrow (y \downarrow y))$, $f = x \mid y$, $\Phi = \{\downarrow\}$;
8) $\mathfrak{A} = ((x \to y) \cdot (y \to z)) \cdot (z \to x)$, $f = (x \vee y \vee z) \to x \cdot y \cdot z$,
$\Phi = \{\&, \to\}$;
9) $\mathfrak{A} = (x \to y) \to (x \to 0) \cdot y$, $f = x \oplus y$, $\Phi = \{0, \to,\ \&\}$;
10) $\mathfrak{A} = ((x \to z) \to y) \cdot (z \to (y \to x))$, $f = x \cdot y \vee x \cdot \overline{z} \vee y \cdot \overline{z}$,
$\Phi = \{\&, \to\}$.

1.24. 1) Пусть булева функция $f(x, y)$ удовлетворяет соотношению $f(f(x,\ f(y,\ z)),\ f(f(x,\ y),\ f(x,\ z))) = 1$. Доказать, что тогда

справедливы следующие эквивалентности:

а) $f(x,\, x) = 1$; б) $f(x,\, f(y,\, x)) = 1$;

в) $f(f(f(x,\, y),\, f(x,\, z)),\, f(x,\, f(y,\, z))) = 1$;

г) $f(f(x,\, y),\, f(f(x,\, f(y,\, z)),\, f(x,\, z))) = 1$;

д) $f(f(x,\, f(y,\, z)),\, f(y,\, f(x,\, z))) = 1$.

2) Выяснить, вытекают ли эквивалентности б), в) и г) из д).

4. Двойственные функции. Принцип двойственности. Пусть $f(x_1, \ldots, x_n)$ — произвольная булева функция, зависящая от $n \geqslant 1$ переменных. Функция $\overline{f(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n)}$, обозначаемая обычно $f^*(x_1, \ldots, x_n)$ (или, подробнее, $[f(x_1, \ldots, x_n)]^*$), называется *двойственной* (к) *функции* $f(x_1, \ldots, x_n)$. При $n = 0$ полагают (по определению), что функция 0 двойственна 1, а 1 двойственна 0. Если функция $f(\widetilde{x}^n)$ совпадает с функцией, которая двойственна ей, т. е. с $f^*(\widetilde{x}^n)$, то она называется *самодвойственной*. Самодвойственными являются, например, функции x, $\overline{x}$ и $x \oplus (y \oplus z)$.

Справедлив следующий *принцип двойственности.*

Если функция f реализуется формулой $\mathfrak{A}$, имеющей строение $C[f_1, \ldots, f_s]$, то двойственная ей функция f^* реализуется формулой $\mathfrak{A}^*$, имеющей такое же строение, как и формула $\mathfrak{A}$, и $\mathfrak{A}^* = C[f_1^*, \ldots, f_s^*]$; в частности, если $\mathfrak{A} = \Phi(\varphi_1^{(n_1)}, \ldots, \varphi_r^{(n_r)})$, то $\mathfrak{A}^* = \Phi^*\big([\varphi_1^{(n_1)}]^*, \ldots, [\varphi_r^{n_r)}]^*\big)$.

Пример 12. С использованием принципа двойственности построить формулу, реализующую функцию, двойственную функции $f = (x \vee (1 \to y)) \vee y\overline{z} \vee \overline{(\overline{x} \mid \overline{y \downarrow z})}$. Полученную формулу по возможности упростить.

Решение. Так как $(x \vee y)^* = x \cdot y$, $1^* = 0$, $(x \to y)^* = \overline{\overline{x} \to \overline{y}} = \overline{x \vee \overline{y}} = \overline{x} \cdot y$, $(x \cdot y)^* = x \vee y$, $(\overline{x})^* = \overline{x}$, $(x \mid y)^* = x \downarrow y$ и $(x \downarrow y)^* = x \mid y$, то $f^* = (x(\overline{0}y))(y \vee \overline{z})\overline{(\overline{x} \downarrow y \mid z)}$. Применяя коммутативный и ассоциативный законы для конъюнкции, а также эквивалентности $\overline{0} = 1$, $1 \cdot x = x$, $x \cdot x = x$, $\overline{\overline{x}} = x$, $x \downarrow y = \overline{x} \cdot \overline{y}$ и $x \mid y = \overline{x} \vee \overline{y}$, получаем $f^* = x \cdot y \cdot (y \vee \overline{z}) \cdot \overline{\overline{x}} \cdot \overline{\overline{y \mid \overline{z}}} = x \cdot y \cdot (y \vee \overline{z})\,\&\, x(\overline{y} \vee \overline{\overline{z}}) = x \cdot y \cdot (y \vee \overline{z}) \cdot (\overline{y} \vee z)$. Раскрывая скобки в последнем выражении и используя эквивалентности $x \cdot x = x$, $x \cdot \overline{x} = 0$, $x \cdot 0 = 0$ и $x \vee 0 = x$, имеем $f^* = x \cdot y \cdot (y \cdot \overline{y} \vee y \cdot z \vee \overline{z} \cdot \overline{y} \vee \overline{z} \cdot z) = xyz$.

1.25. Используя непосредственно определение двойственности булевых функций, а также основные эквивалентности и соотношения из задачи 1.20, выяснить, является ли функция g двойственной к функции f:

1) $f = x \oplus y$, $g = x \sim y$; 2) $f = x \mid y$, $g = x \downarrow y$;

3) $f = x \to y$, $g = \overline{x} \cdot y$;

4) $f = (\overline{x} \to \overline{y}) \to (y \to x)$, $g = (x \to y) \cdot (\overline{y} \to \overline{x})$;

5) $f = x \oplus y \oplus z$, $g = x \oplus y \oplus z$; 6) $f = x \cdot y \vee z$, $g = x \cdot (y \vee z)$;
7) $f = xy \oplus xz \oplus yz$, $g = xy \vee xz \vee yz$;
8) $f = x \cdot y \to z$, $g = \overline{x} \cdot \overline{y} \cdot z$;
9) $f = (x \vee y \vee z) \cdot t \vee x \cdot y \cdot z$, $g = (x \vee y \vee z) \cdot t \vee x \cdot y \cdot z$;
10) $f = xy \vee yz \vee zt \vee tx$, $g = xz \vee yt$;
11) $f = (x \vee y) \to (z \oplus t)$, $g = (x \mid y) \cdot (z \sim t)$;
12) $f = (x \to y) \cdot (z \to t)$, $g = (x \to \overline{z}) \cdot (x \to t) \cdot (\overline{y} \to \overline{z}) \cdot (\overline{y} \to t)$.

Замечание. Если функция задана в табличной или векторной форме, то при построении функции, двойственной ей, удобно бывает использовать тот факт, что на противоположных наборах двойственные функции принимают противоположные значения, т. е. если $f = f(x_1, \ldots, x_n)$ и $g = f^*(\widetilde{x}^n)$, то $g(\overline{\gamma}_1, \ldots, \overline{\gamma}_m) = \overline{f(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)}$ при любом наборе $(\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$. В частности, если функция f задана вектором $\widetilde{\alpha}_f = (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{2^n-2}, \alpha_{2^n-1})$, то функция f^* задается вектором $(\overline{\alpha}_{2^n-1}, \overline{\alpha}_{2^n-2}, \ldots, \overline{\alpha}_1, \overline{\alpha}_0)$.

1.26. Пусть $\mathfrak{A}$ — формула над множеством $S = \{0, 1, \neg, \&, \vee, \oplus, \sim, |, \to\}$. Формула $\mathfrak{A}^*$ над тем же множеством S называется *двойственной* (*к*) *формуле* $\mathfrak{A}$, если она получается из $\mathfrak{A}$ заменой каждого вхождения одного символа из пар $(0, 1)$, $(\&, \vee)$, $(\oplus, \sim)$, $(|, \downarrow)$ на другой символ из той же пары.

1) Доказать, что если функция f реализуется формулой $\mathfrak{A}$ над множеством S, то двойственная ей функция f^* реализуется формулой $\mathfrak{A}^*$ (доказательство провести двумя способами: а) непосредственно, используя индукцию по «сложности формулы», т. е. по числу вхождений в нее символов из множества S; б) применяя принцип двойственности).

2) Показать, что если формулы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ (над множеством S) эквивалентны, то эквивалентны также формулы $\mathfrak{A}^*$ и $\mathfrak{B}^*$.

1.27. С использованием принципа двойственности построить формулу, реализующую функцию, двойственную к функции f, и убедиться в том, что полученная формула эквивалентна формуле $\mathfrak{A}$:

1) $f = x \cdot 1 \vee y \cdot (z \vee 0) \vee \overline{x} \cdot \overline{y} \cdot \overline{z}$, $\mathfrak{A} = x \cdot (y \oplus z)$;
2) $f = (x \downarrow y) \oplus ((x \mid y) \downarrow (\overline{x} \sim y \cdot z))$, $\mathfrak{A} = x \cdot \overline{y} \vee \overline{x} \cdot y \vee \overline{y} \cdot z$;
3) $f = (\overline{x} \vee \overline{y} \vee (y \cdot \overline{z} \oplus 1)) \downarrow z$, $\mathfrak{A} = x \vee y \vee \overline{z}$;
4) $f = x \cdot y \vee y \cdot \overline{z} \vee \overline{y} \cdot z$, $\mathfrak{A} = x \cdot \overline{y} \cdot \overline{z} \vee y \cdot z$;
5) $f = ((x \to y) \vee z) \cdot (y \cdot \overline{z} \to (x \oplus y \cdot z))$, $\mathfrak{A} = (x \oplus y) \cdot z$;
6) $f = (((x \vee \overline{y} \vee (y \cdot z \sim 1)) \oplus 1) \to 0) \mid y$, $\mathfrak{A} = \overline{x \cdot z \vee y}$;
7) $f = (x \vee y \vee \overline{z}) \to (x \cdot \overline{y} \sim (x \oplus y \cdot \overline{z}))$, $\mathfrak{A} = (x \sim z) \cdot \overline{y}$;
8) $f = x \cdot y \vee y \cdot z \vee z \cdot t$, $\mathfrak{A} = x \cdot z \vee z \cdot y \vee y \cdot t$;
9) $f = (x \vee y \vee \overline{z}) \cdot \overline{t} \vee \overline{x} \cdot y \cdot z$, $\mathfrak{A} = (\overline{x} \vee y \vee z) \cdot \overline{t} \vee x \cdot y \cdot \overline{z}$;
10) $f = (x \cdot (y \cdot z \vee 0) \sim (t \cdot 1 \vee \overline{x} \cdot y)) \vee \overline{y} \cdot t$, $\mathfrak{A} = (x \vee (z \oplus t)) \cdot \overline{y}$.

5. Фиктивные и существенные переменные. Отождествление переменных у булевых функций. Переменная x_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ функции $f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)$ называется *существенной*, если можно указать такие наборы $\widetilde{\alpha}$ и $\widetilde{\beta}$, соседние по i-й компоненте (т.е. $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, 0, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n)$ и $\widetilde{\beta} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, 1, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n)$), что $f(\widetilde{\alpha}) \neq f(\widetilde{\beta})$. В противном случае переменная x_i называется *фиктивной* (или *несущественной*) переменной функции $f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)$. Две функции $f(\widetilde{x}^n)$ и $g(\widetilde{y}^m)$ называются *равными*, если множества их существенных переменных совпадают и на любых двух наборах $\widetilde{\alpha}^n$ и $\widetilde{\beta}^m$, различающихся, быть может, только значениями несущественных переменных, значения функций одинаковы: $f(\widetilde{\alpha}^n) = g(\widetilde{\beta}^m)$. Если $f(\widetilde{x}^n)$ и $g(\widetilde{y}^m)$ — равные функции, то одну из них можно получить из другой путем добавления и/или изъятия фиктивных переменных.

Пусть $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n$. Говорят, что *функция* $\varphi(x_1, \ldots, x_{i_1-1}, x, x_{i_1+1}, \ldots, x_{i_2-1}, x_{i_2+1}, \ldots, x_{i_k-1}, x_{i_k+1}, \ldots, x_n)$ *получена из функции* $f(\widetilde{x}^n)$ *путем отождествления переменных* $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}$, если φ является результатом подстановки переменной x в функцию f на места переменных $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}$. В качестве x можно взять любую переменную, не входящую в множество $X^n \backslash \{x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}\}$.

Пример 13. Перечислить все существенные и фиктивные переменные функции $f(\widetilde{x}^4) = (1100001111000011)$.

Решение. Сравнивая значения функции на всех парах наборов, соседних по переменной x_4, видим, что

$$f(0,0,0,0) = f(0,0,0,1) = f(0,1,1,0) = f(0,1,1,1) = \\ = f(1,0,0,0) = f(1,0,0,1) = f(1,1,1,0) = f(1,1,1,1) = 1,$$

$$f(0,0,1,0) = f(0,0,1,1) = f(0,1,0,0) = f(0,1,0,1) = \\ = f(1,0,1,0) = f(1,0,1,1) = f(1,1,0,0) = f(1,1,0,1) = 0,$$

т.е. $f(x_1, x_2, x_3, 0) \equiv f(x_1, x_2, x_3, 1)$. Следовательно, переменная x_4 фиктивная. Далее, так как $f(0,0,0,0) = 1$, а $f(0,0,1,0) = 0$ и $f(0,1,0,0) = 0$, то переменные x_3 и x_2 существенные. Наконец, принимая во внимание соотношения $f(0, x_2, x_3, x_4) = (11000011) = f(1, x_2, x_3, x_4)$, заключаем, что переменная x_1 фиктивная. Итак, у функции $f(\widetilde{x}^4)$ переменные x_1 и x_4 фиктивные, а переменные x_2 и x_3 существенные. (Нетрудно убедиться в том, что $f(\widetilde{x}^4) = x_2 \sim x_3$.)

Пример 14. Перечислить все фиктивные и существенные переменные функции $f(\widetilde{x}^4) = ((x_1\overline{x}_2 \vee x_3) \sim (\overline{x}_1 x_4 \vee x_2\overline{x}_3)) \to (((x_2 \oplus \oplus x_4) \vee x_3) \mid (\overline{x}_1 \cdot (\overline{x}_2 \to (x_3 \oplus \overline{x}_4))))$.

Решение. Для решения данной задачи можно действовать так же, как при решении предыдущей, т.е. сравнивать значения функции на парах соседних наборов, чтобы выяснить, совпадают или нет соответствующие подфункции функции $f(\widetilde{x}^4)$ (ибо переменная x_i фиктивна тогда и только тогда, когда $f_0^{x_i}(\widetilde{x}^4) = f_1^{x_i}(\widetilde{x}^4)$). Однако при

задании булевой функции в «аналитической форме» для выяснения того, какие переменные у нее существенные (а какие фиктивные), иногда бывает полезно преобразовать исходное выражение к некоторому специальному виду, например к совершенной дизъюнктивной нормальной форме или полиному Жегалкина (см. § 2, пп. 2 и 3). Оказывается, что переменная x_i функции $f(\widetilde{x}^n)$ является фиктивной тогда и только тогда, когда:

1) в совершенной д. н. ф. этой функции вместе с каждой элементарной конъюнкцией вида $x_i^{\sigma_i}K$ содержится и элементарная конъюнкция $x_i^{\overline{\sigma}_i}K$ (см. задачу 2.16) или

2) в полиноме Жегалкина, реализующем эту функцию, переменная x_i отсутствует.

Для решения сформулированной задачи мы сначала преобразуем (с помощью основных эквивалентностей) исходное аналитическое задание функции $f(\widetilde{x}^4)$ к достаточно простой дизъюнктивной нормальной форме (см. § 2, п. 2), а затем, подставляя на места соответствующих переменных 0 и 1, получим нужные нам подфункции функции $f(\widetilde{x}^4)$ и сравним их между собой.

Сначала воспользуемся эквивалентностями $x \to y = \overline{x} \vee y$, $\overline{\overline{x}} = x$, $\overline{x \sim y} = x \oplus y$ и $x \mid y = \overline{x} \vee \overline{y}$. Получаем

$$f(\widetilde{x}^4) = ((x_1\overline{x}_2 \vee x_3) \oplus (\overline{x}_1\overline{x}_4 \vee x_2\overline{x}_3)) \vee \\ \vee \overline{(x_2 \oplus x_4) \vee x_3} \vee \overline{\overline{x}_1(x_2 \vee (x_3 \oplus \overline{x}_4))}.$$

Далее применяем эквивалентности

$$x \oplus y = \overline{x}y \vee \overline{x}y, \quad \overline{x \vee y} = \overline{x} \cdot \overline{y}, \quad \overline{x \oplus y} = x \sim y = xy \vee \overline{x}\,\overline{y},$$
$$\overline{x \cdot y} = \overline{x} \vee \overline{y}, \quad \overline{\overline{x}} = x, \quad \overline{x \oplus \overline{y}} = \overline{x \oplus y \oplus 1} = x \oplus y = x\overline{y} \vee \overline{x}y.$$

Это приводит нас к такому соотношению:

$$f(\widetilde{x}^4) = (x_1\overline{x}_2 \vee x_3)\overline{\overline{x}_1x_4 \vee x_2\overline{x}_3} \vee \overline{x_1\overline{x}_2 \vee x_3}(\overline{x}_1x_4 \vee x_2\overline{x}_3) \vee \\ \vee (x_2x_4 \vee \overline{x}_2\overline{x}_4)\overline{x}_3 \vee x_1 \vee \overline{x}_2(x_3\overline{x}_4 \vee \overline{x}_3x_4).$$

Так как $\overline{\overline{x}_1x_4 \vee x_2\overline{x}_3} = \overline{\overline{x}_1x_4} \cdot \overline{x_2\overline{x}_3} = (x_1 \vee \overline{x}_4) \cdot (\overline{x}_2 \vee x_3)$ и $\overline{x_1\overline{x}_2 \vee x_3} = \overline{x_1\overline{x}_2} \cdot \overline{x}_3 = (\overline{x}_1 \vee x_2)\overline{x}_3$, то из последнего выражения для $f(\widetilde{x}^4)$ после раскрытия скобок получаем формулу

$$x_1\overline{x}_2 \vee x_1\overline{x}_2x_3 \vee x_1\overline{x}_2x_4 \vee x_1\overline{x}_2x_3\overline{x}_4 \vee x_1x_2\overline{x}_3 \vee \\ \vee x_1x_3 \vee \overline{x}_2x_3\overline{x}_4 \vee x_3\overline{x}_4 \vee \overline{x}_1\overline{x}_3x_4 \vee \overline{x}_1x_2\overline{x}_3 \vee \overline{x}_1x_2\overline{x}_3x_4 \vee \\ \vee x_2\overline{x}_3 \vee x_2\overline{x}_3x_4 \vee \overline{x}_2\overline{x}_3\overline{x}_4 \vee x_1 \vee \overline{x}_2x_3\overline{x}_4 \vee \overline{x}_2\overline{x}_3x_4.$$

С помощью правила поглощения $\mathfrak{A} \vee \mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{A}$ эта формула может быть преобразована к следующему виду:

$$x_1 \vee x_3\overline{x}_4 \vee x_2\overline{x}_3 \vee \overline{x}_1\overline{x}_3x_4 \vee \overline{x}_2\overline{x}_3\overline{x}_4 \vee \overline{x}_2\overline{x}_3x_4.$$

С использованием эквивалентностей $x \vee \overline{x} = 1$ и $x \cdot 1 = x$ получаем

$$f(\widetilde{x}^4) = x_1 \vee x_3\overline{x}_4 \vee x_2\overline{x}_3 \vee \overline{x}_1\overline{x}_3\overline{x}_4 \vee \overline{x}_2\overline{x}_3(\overline{x}_4 \vee x_4) = \\ = x_1 \vee x_3\overline{x}_4 \vee \overline{x}_1\overline{x}_3\overline{x}_4 \vee \overline{x}_3(x_2 \vee \overline{x}_2) = x_1 \vee x_3\overline{x}_4 \vee \overline{x}_1\overline{x}_3x_4 \vee \overline{x}_3.$$

Наконец, применяя еще раз правило поглощения и эквивалентность $x\overline{y} \vee \overline{x} = \overline{x} \vee \overline{y}$, имеем $f(\widetilde{x}^4) = x_1 \vee \overline{x}_3 \vee \overline{x}_4$. Отсюда сразу следует, что переменная x_2 фиктивная. Далее, так как $f(0, 0, 1, 1) = 0$, а $f(1, 0, 1, 0) = f(0, 0, 0, 1) = f(0, 0, 1, 0) = 1$, то остальные три переменные у функции $f(\widetilde{x}^4)$ существенные.

Пример 15. Выяснить, можно ли, отождествляя и переименовывая переменные в функции $f(\widetilde{x}^4) = (x_1 \vee x_2 \vee \overline{x}_3)\overline{x}_4 \vee \overline{x}_1\overline{x}_2x_4$, получить функцию $g_1(x_1, x_2) = x_1 \vee x_2$ или функцию $g_2(x_1, x_2) = x_1 \mid x_2$.

Решение. Легко заметить, что $f(0) = 1$ и $f(1) = 0$. Следовательно, всякая функция, которая получается из функции $f(\widetilde{x}^4)$ путем отождествления и переименования переменных, на нулевом наборе равна 1, а на единичном — 0. В то же время функция $g_1(\widetilde{x}^2)$ этому условию не удовлетворяет ($g_1(0, 0) = 0$ и $g_1(1, 1) = 1$). Значит, функцию g_1 из функции f описанным выше способом построить нельзя.

Далее, хотя функция g_2 на $\widetilde{0}$ равна 1 и на $\widetilde{1}$ равна 0, отсюда еще не следует, что ее можно получить из функции f, отождествляя и переименовывая переменные. Чтобы выяснить, получается или нет указанным способом из функции f функция g_2, можно, естественно, перебрать все возможности построения из функции f двуместных функций (с помощью отождествления и переименования переменных) и сравнить полученные функции с функцией g_2. При этом нужно будет рассмотреть семь вариантов: 1) $x_1 = x_2 = x_3 = x$, $x_4 = y$; 2) $x_1 = x_2 = x_4 = x$, $x_3 = y$; 3) $x_1 = x_3 = x_4 = x$, $x_2 = y$; 4) $x_2 = x_3 = x_4 = x$, $x_1 = y$; 5) $x_1 = x_2 = x$, $x_3 = x_4 = y$; 6) $x_1 = x_3 = x$, $x_2 = x_4 = y$; 7) $x_1 = x_4 = x$, $x_2 = x_3 = y$.

Такая процедура несколько утомительна. Можно поступить иначе. Предположим, что функцию g_2 указанным путем из функции f построить можно. Из соотношений $g_2(0, 1) = g_2(1, 0) = 1$ следует, что должна существовать пара противоположных наборов $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ и $\widetilde{\beta} = (\overline{\alpha}_1, \overline{\alpha}_2, \overline{\alpha}_3, \overline{\alpha}_4)$, на которых функция f обращается в 1, т. е. функция $\varphi(x_1, x_2, x_3, x_4) = f(x_1, x_2, x_3, x_4) \,\&\, f(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3, \overline{x}_4)$ не должна быть равна 0.

Тот набор (любой), на котором функция $\varphi(\widetilde{x}^4)$ равна 1 (если $\varphi \not\equiv \not\equiv 0$), и определит соответствующее отождествление переменных. Имеем

$$\varphi(\widetilde{x}^4) = ((x_1 \vee x_2 \vee \overline{x}_3)\overline{x}_4 \vee \overline{x}_1\overline{x}_2x_4) \cdot ((\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \vee x_3)x_4 \vee x_1x_2\overline{x}_4) =$$
$$= x_1x_2\overline{x}_4(x_1 \vee x_2 \vee \overline{x}_3) \vee \overline{x}_1\overline{x}_2x_4(\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \vee x_3) = x_1x_2\overline{x}_4 \vee \overline{x}_1\overline{x}_2x_4.$$

Очевидно, что $\varphi(\widetilde{x}^4)$ равна 1 только на наборах (1, 1, 0, 0), (1, 1, 1, 0), (0, 0, 0, 1) и (0, 0, 1, 1). Взяв, например, набор (1, 1, 0, 0), приходим к такому отождествлению: $x_1 = x_2 = x$ и $x_3 = x_4 = y$; оно дает

$$f(x, x, y, y) = (x \vee x \vee \overline{y})\overline{y} \vee \overline{x}\,\overline{x}y = x\overline{y} \vee \overline{y} \vee \overline{x}y = \overline{x} \vee \overline{y} = x \mid y.$$

Набор (1, 1, 1, 0) дает отождествление $x_1 = x_2 = x_3 = x$ и $x_4 = y$ и функцию

$$f(x, x, x, y) = (x \vee x \vee \overline{x})\,\overline{y} \vee \overline{x} \cdot \overline{x} \cdot y = \overline{y} \vee \overline{x}y = \overline{x} \vee \overline{y} = x \mid y.$$

Других отождествлений (с точностью до переименования переменных), дающих функцию g_2, нет. Итак, функцию $g_2(x_1, x_2)$ из функции $f(\widetilde{x}^4)$ с помощью отождествления и переименования переменных получить можно, а именно $g_2(x_1, x_2) = f(x_1, x_1, x_2, x_2) = f(x_1, x_1, x_1, x_2)$.

1.28. Указать все фиктивные переменные функции f:

1) $f(\widetilde{x}^3) = (10101010)$; 2) $f(\widetilde{x}^3) = (01100110)$;

3) $f(\widetilde{x}^3) = (11110011)$; 4) $f(\widetilde{x}^4) = (1011010110110101)$;

5) $f(\widetilde{x}^4) = (0101111101011111)$; 6) $f(\widetilde{x}^4) = (1100110000110011)$.

1.29. Показать, что x_1 — фиктивная переменная функции f (реализовав для этой цели функцию f формулой, не содержащей явно переменную x_1):

1) $f(\widetilde{x}^2) = (x_2 \to x_1) \cdot (x_2 \downarrow x_2)$; 2) $f(\widetilde{x}^2) = (x_1 \sim x_2) \vee (x_1 \mid x_2)$;

3) $f(\widetilde{x}^3) = ((x_1 \oplus x_2) \to x_3) \cdot \overline{x_3 \to x_2}$;

4) $f(\widetilde{x}^3) = ((x_1 \vee x_2) \to x_1 \sim x_3)) \cdot x_1 \to (x_2 \vee x_3)$;

5) $f(\widetilde{x}^3) = ((x_1 \vee x_2 \cdot \overline{x}_3) \sim (\overline{x}_1 \to \overline{x}_2 \cdot x_3)) \cdot (x_2 \downarrow x_3)$;

6) $f(\widetilde{x}^3) = ((x_1 \vee x_2 \vee \overline{x}_3) \to (x_1 \cdot x_2 \mid x_3)) \oplus (x_2 \to x_1) \cdot x_3$;

7) $f(\widetilde{x}^4) = (x_1 \to ((x_2 \to x_3) \to x_4)) \sim \overline{x}_1 \cdot (x_2 \to x_3) \cdot \overline{x}_4$;

8) $f(\widetilde{x}^4) = (x_1 \cdot \overline{x}_2 \vee x_3) \cdot (x_2 \vee x_1 \cdot x_4) \to (x_1 \to (x_2 \to x_3))$;

9) $f(\widetilde{x}^4) = (x_1x_2 \vee x_3x_4) \cdot (x_1 \oplus x_2 \oplus x_3) \to x_4) \oplus$
$\oplus (x_1x_2(x_3 \to x_4) \vee x_3x_4)$;

10) $f(\widetilde{x}^4) = ((x_1 \mid x_2) \downarrow ((x_1 \downarrow x_4) \mid (x_3 \downarrow x_4))) \mid ((x_1 \mid x_3) \mid x_2)$.

1.30. Перечислить существенные переменные следующих функций:

1) $f(\widetilde{x}^2) = ((x_1 \vee x_2) \to x_1 \cdot x_2) \oplus (x_1 \to x_2) \cdot (x_2 \to x_1)$;

2) $f(\widetilde{x}^2) = (x_1 \to ((x_2 \to x_1) \to x_2)) \sim (x_1 \vee x_2)$;

3) $f(\widetilde{x}^2) = (x_1 \oplus (x_2 \to (x_1 \sim x_2))) \vee \overline{x_1 \to x_2}$;

4) $f(\widetilde{x}^2) = (x_1 \cdot x_2 \oplus (x_1 \to x_2)) \to (x_1 \sim x_1 \cdot x_2)$;

5) $f(\widetilde{x}^2) = (\overline{x}_1 \cdot x_2 \to (\overline{x}_1 \to \overline{x}_2)) \to x_1 \cdot \overline{x}_2$;

6) $f(\widetilde{x}^3) = (x_1 \to x_2 \cdot x_3) \cdot (x_2 \to x_1 \cdot x_3) \vee (x_1 \sim x_2)$;

7) $f(\widetilde{x}^3) = ((x_1 \to \overline{x}_2) \oplus (x_2 \to \overline{x}_3)) \oplus (x_2 \to x_3)$;

8) $f(\widetilde{x}^3) = ((x_1 \vee x_2 \cdot \overline{x}_3) \to (x_2 \to x_1 \cdot x_3)) \to (x_1 \vee x_3)$;

9) $f(\widetilde{x}^3) = ((x_1 \downarrow (x_2 \mid x_3)) \downarrow (x_2 \mid (x_1 \downarrow x_3))) \downarrow (x_1 \mid x_2)$;

10) $f(\widetilde{x}^4) = (x_1 \cdot x_2 \oplus x_3 \cdot x_4) \vee ((x_1 \cdot x_3 \sim x_2) \to x_4) \vee \overline{x}_1 \cdot x_3$.

1.31. 1) Доказать, что если у функции $f(\widetilde{x}^n)$ $(n \geqslant 1)$ имеются фиктивные переменные, то она принимает значение 1 на четном числе наборов.

2) Выяснить, верно ли утверждение, обратное к 1).

3) Пусть функция $f(\widetilde{x}^n)$ такова, что $|N_f| = 2^m(2l-1)$, где $m \geqslant 0$ и $l \geqslant 1$. Каково максимально возможное число фиктивных переменных у этой функции?

1.32. Пусть функция $f(\widetilde{x}^n)$ задана вектором $\widetilde{\alpha}_f = (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{2^n-1})$. Доказать, что если x_k — фиктивная переменная, то $\alpha_i = \alpha_{2^n-k+i}$ для всех i, удовлетворяющих условию $s \cdot 2^{n-k+1} \leqslant i \leqslant (2s+1) \cdot 2^{n-k} - 1$, где $s = 0, 1, \ldots 2^{k-1} - 1$.

1.33. С использованием результатов задач 1.31, 1) и 1.32 выяснить, какие переменные функции f являются существенными:

1) $f(\widetilde{x}^4) = (1001001100110010)$; 2) $f(\widetilde{x}^4) = (0110011101110110)$;
3) $f(\widetilde{x}^4) = (1100001100111100)$; 4) $f(\widetilde{x}^4) = (0001000101110111)$;
5) $f(\widetilde{x}^4) = (0011110000111100)$; 6) $f(\widetilde{x}^4) = (0001100101101110)$;
7) $f(\widetilde{x}^4) = (0110110110110111)$; 8) $f(\widetilde{x}^4) = (0000000111111110)$;
9) $f(\widetilde{x}^4) = (0111011110101010)$.

1.34. Выяснить, при каких n $(n \geqslant 2)$ функция $f(\widetilde{x}^n)$ зависит существенно от всех своих переменных:

1) $f(\widetilde{x}^n) = (x_1 \vee x_2 \vee \ldots \vee x_n) \to$
$\to ((x_1 \vee x_2) \cdot (x_2 \vee x_3) \cdot \ldots \cdot (x_{n-1} \vee x_n) \cdot (x_n \vee x_1))$;
2) $f(\widetilde{x}^n) = (x_1x_2 \vee x_2x_3 \vee \ldots \vee x_{n-1}x_n \vee x_nx_1) \to$
$\to (x_1x_2 \oplus x_2x_3 \oplus \ldots \oplus x_{n-1}x_n \oplus x_nx_1)$;
3) $f(\widetilde{x}^n) = ((x_1 \vee x_2 \vee \ldots \vee x_n) \to x_1 \cdot x_2 \cdot \ldots \cdot x_n) \to$
$\to (x_1 \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_n \oplus 1)$;
4) $f(\widetilde{x}^n) = (x_1 \to (x_2 \to \ldots \to (x_{n-1} \to x_n) \ldots)) \to$
$\to (x_1 \to x_n)(x_2 \to x_n) \ldots (x_{n-1} \to x_n)$;
5) $f(\widetilde{x}^n) = (x_1 \mid x_2) \oplus (x_2 \mid x_3) \oplus \ldots \oplus (x_{n-1} \mid x_n) \oplus (x_n \mid x_1)$;
6) $f(\widetilde{x}^n) = (x_1 \to x_2)(x_2 \to x_3) \ldots (x_{n-1} \to x_n)(x_n \to x_1) \sim$
$\sim (x_1 \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_n)$.

1.35. Булевы функции $f(\widetilde{x}^n)$ $(n \geqslant 1)$ и $g(\widetilde{y}^m)$ $(m \geqslant 1)$ существенно зависят от всех своих переменных. Переменные $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_m$ попарно различные. Показать, что функция $f(g(y_1, \ldots, y_m), x_2, \ldots, x_n)$ существенно зависит от всех своих переменных.

1.36. Доказать, что всякая булева симметрическая функция (см. задачу 1.6, 7)), отличная от константы, существенно зависит от всех своих переменных.

1.37. Пусть $n \geqslant 1$ и функции $f(\widetilde{x}^n)$ и $g(\widetilde{x}^n)$ таковы, что сумма $f(\widetilde{x}^n) \oplus g(\widetilde{x}^n)$ обращается в 1 на нечетном числе наборов. Доказать, что для всякого $i = 1, \ldots, n$ переменная x_i является существенной хотя бы у одной из функций, f или g.

1.38. Через $P^c(X^n)$ $(n \geqslant 1)$ обозначим множество всех булевых функций, зависящих от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и при этом от каждой из них существенным образом.

1) Выписать все функции множества $P^c(X^2)$.
2) Найти число элементов множества $P^c(X^3)$.
3) Доказать, что $|P^c(X^n)| = \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \cdot 2^{2^{n-k}}$.
4) Показать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|P^c(X^n)|}{2^{2^n}} = 1$.

1.39. Выяснить, можно ли из функции f, отождествляя и переименовывая в ней переменные, получить функцию g:

1) $f(\widetilde{x}^3) = (11001011)$, $g(\widetilde{x}^2) = (1011)$;
2) $f(\widetilde{x}^3) = (10101100)$, $g(\widetilde{x}^2) = (1000)$;
3) $f(\widetilde{x}^3) = (00110010)$, $g(\widetilde{x}^2) = (0110)$;
4) $f(\widetilde{x}^4) = (0110110111100011)$, $g(\widetilde{x}^3) = (01100111)$;
5) $f(\widetilde{x}^4) = (1111110100011011)$, $g(\widetilde{x}^2) = (1001)$;
6) $f(\widetilde{x}^3) = x_1x_2 \vee x_1\overline{x}_3 \vee x_2\overline{x}_3$, $g(\widetilde{x}^2) = x_1x_2$;
7) $f(\widetilde{x}^3) = (x_1 \vee x_2)x_3 \oplus x_1\overline{x}_2$, $g(\widetilde{x}^2) = x_1 \vee x_2$;
8) $f(\widetilde{x}^3) = (x_1 \to (x_2 \to x_3)) \to (x_1 \to x_3)$, $g(\widetilde{x}^2) = x_1 \to x_2$;
9) $f(\widetilde{x}^4) = (x_1x_2 \vee \overline{x}_3\overline{x}_4) \to (x_1\overline{x}_2 \to (x_3 \vee x_4))$, $g(\widetilde{x}^3) = x_1 \to (x_2 \vee x_3)$;
10) $f(\widetilde{x}^4) = (x_1\overline{x}_2 \vee x_3\overline{x}_4) \oplus (\overline{x}_1\overline{x}_4 \vee x_2\overline{x}_3)$, $g(\widetilde{x}^2) = x_1 \mid x_2$.

1.40. 1) Доказать, что если функция $f(\widetilde{x}^3)$ существенно зависит от всех своих переменных и удовлетворяет условию $f(\widetilde{0}) = f(\widetilde{1})$, то найдется пара переменных, отождествляя которые можно получить функцию, существенно зависящую от двух переменных.

2) Показать, что условие $f(\widetilde{0}) = f(\widetilde{1})$ отбросить нельзя.

1.41. Пусть $n \geqslant 2$ и функция $f(\widetilde{x}^n)$ такова, что $|N_f| > 2^{n-1}$. Показать, что при отождествлении в ней любых двух переменных получается функция, отличная от тождественного нуля.

1.42. 1) Пусть функция $f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ $(n \geqslant 3)$ удовлетворяет условию: сумма $f(0, 0, x_3, \ldots, x_n) \oplus f(1, 1, x_3, \ldots, x_n)$ обращается в 1 на нечетном числе наборов. Доказать, что в этом случае функция $f(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n)$ существенно зависит от всех $n - 1$ переменных.

2) Показать, что утверждение 1) справедливо и в том случае, когда вместо суммы $f(0, 0, x_3, \ldots, x_n) \oplus f(1, 1, x_3, \ldots, x_n)$ берется импликация $f(0, 0, x_3, \ldots, x_n) \to f(1, 1, x_3, \ldots, x_n)$. Однако заменить $\oplus$ на $\&$ или $\vee$ нельзя.

1.43. Доказать, что число $Q(g(\widetilde{x}^n))$ тех функций $f(x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1})$, из которых отождествлением переменных можно получить данную функцию $g(\widetilde{x}^n) = g(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, удовлетворяет соотношению

$$\lim_{n\to\infty} \frac{Q(g(\widetilde{x}^n))}{n \cdot 2^{2^n}} = 1.$$

1.44. Пусть функция $f(\widetilde{x}^n)$ удовлетворяет условию: для некоторых наборов $\widetilde{\alpha}^n$, $\widetilde{\beta}^n$ и $\widetilde{\gamma}^n$ таких, что $\widetilde{\alpha}^n \prec \widetilde{\beta}^n \prec \widetilde{\gamma}^n$, выполняются соотношения $f(\widetilde{\alpha}^n) = f(\widetilde{\gamma}^n) \neq f(\widetilde{\beta}^n)$. Доказать, что:

1) функция $f(\widetilde{x}^n)$ зависит существенно не менее чем от двух переменных;

2) можно так отождествить переменные у функции $f(\widetilde{x}^n)$, что получится функция, существенно зависящая не менее чем от двух, но не более чем от трех переменных.

1.45. Доказать, что если функция $f(\widetilde{x}^n)$ существенно зависит не менее чем от двух переменных, то найдутся три набора $\widetilde{\alpha}^n$, $\widetilde{\beta}^n$ и $\widetilde{\gamma}^n$, удовлетворяющие условиям $\rho(\widetilde{\alpha}^n, \widetilde{\beta}^n) = \rho(\widetilde{\beta}^n, \widetilde{\gamma}^n) = 1$, $\widetilde{\alpha}^n \neq \widetilde{\gamma}^n$ и $f(\widetilde{\alpha}^n) = f(\widetilde{\gamma}^n) \neq f(\widetilde{\beta}^n)$.

1.46. Последовательность вершин $\widetilde{\beta}_0, \widetilde{\beta}_1, \ldots, \widetilde{\beta}_{k-1}, \widetilde{\beta}_n$ куба B^n называется *цепью (длины k), соединяющей вершины $\widetilde{\beta}_0$ и $\widetilde{\beta}_k$*, если $\rho(\widetilde{\beta}_i, \widetilde{\beta}_{i+1}) = 1$ при $i = 0, 1, \ldots, k-1$. Пусть функция $f(\widetilde{x}^n)$ изменяет свое значение m раз $(m \geqslant 1)$ в вершинах некоторой цепи $\widetilde{\beta}_0, \widetilde{\beta}_1, \ldots, \widetilde{\beta}_{k-1}, \widetilde{\beta}_n$, соединяющей вершины $\widetilde{\beta}_0$ и $\widetilde{\beta}_k$ такие, что $\rho(\widetilde{\beta}_0, \widetilde{\beta}_k) = k$. Доказать, что функция $f(\widetilde{x}^n)$ существенно зависит не менее чем от m переменных.

1.47. Доказать, что если функция $f(\widetilde{x}^n)$ существенно зависит от переменной x_i $(1 \leqslant i \leqslant n)$, то двойственная ей функция $f^*(\widetilde{x}^n)$ также зависит существенно от переменной x_i.

§ 2. Специальные представления булевых функций

1. Разложения булевых функций по переменным. Совершенные дизъюнктивная и конъюнктивная нормальные формы. Пусть $f(\widetilde{x}^n)$ — булева функция и $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n$. Функцию, получаемую из $f(\widetilde{x}^n)$ подстановкой на места переменных $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}$ констант $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k$ соответственно, называют $x_{i_1}^{\sigma_1} x_{i_2}^{\sigma_2} \ldots x_{i_k}^{\sigma_k}$*-компонентой функции* $f(\widetilde{x}^n)$ или *подфункцией функции* $f(\widetilde{x}^n)$ и обозначают через $f^{i_1, i_2, \ldots, i_k}_{\sigma_1 \sigma_2 \ldots \sigma_k}(\widetilde{x}^n)$ или $S^{i_1, i_2, \ldots, i_k}_{\sigma_1 \sigma_2 \ldots \sigma_k} f(\widetilde{x}^n)$. При $k = 0$ подфункция функции $f(\widetilde{x}^n)$ просто совпадает с самой этой функцией. Если $k \neq 0$ и $k \neq n$, то подфункция $f^{i_1, i_2, \ldots, i_k}_{\sigma_1 \sigma_2 \ldots \sigma_k}(\widetilde{x}^n)$ называется *собственной*. Подфункции функции $f(\widetilde{x}^n)$ *различны*, если они отличаются как функции от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Справедливо следующее представление:

$$f(\widetilde{x}^n) = \bigvee_{(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k)} x_{i_1}^{\sigma_1} x_{i_2}^{\sigma_2} \ldots x_{i_k}^{\sigma_k} f^{i_1, i_2, \ldots, i_k}_{\sigma_1 \sigma_2 \ldots \sigma_k}(\widetilde{x}^n), \qquad (1)$$

где $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n$ $(k \geqslant 1)$ и дизъюнкция берется по всем наборам $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k)$ из B^k.

Это представление называется *разложением функции* $f(\widetilde{x}^n)$ *по* k переменным $x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_k}$.

Если $k = 1$ и $i_1 = i$, то выражение (1) можно записать в форме

$$f(\widetilde{x}^n) = \overline{x}_i \cdot f(x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_n) \vee \\ \vee x_i \cdot f(x_1, \ldots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \ldots, x_n). \qquad (2)$$

Представление (2) называется *разложением функции* $f(\widetilde{x}^n)$ *по переменной* x_i. Оно бывает полезно при доказательстве каких-либо свойств булевых функций по индукции.

При $k = n$ представление (1) имеет вид

$$f(\widetilde{x}^n) = \bigvee_{(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n)} x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \ldots x_n^{\sigma_n} f(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n), \tag{3}$$

и его называют *разложением функции* $f(\widetilde{x}^n)$ *по всем* n *переменным.*

Если $f(\widetilde{x}^n) \not\equiv 0$, то выражение (3) можно записать в иной форме:

$$f(\widetilde{x}^n) = \bigvee_{\widetilde{\sigma}:f(\widetilde{\sigma})=1} x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \ldots x_n^{\sigma_n}, \tag{4}$$

где дизъюнкция берется по всем наборам $\widetilde{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) \in B^n$, на которых функция $f(\widetilde{x}^n)$ обращается в 1.

Правая часть формулы (4) называется *совершенной дизъюнктивной нормальной формой* (сокращенно *совершенной д. н. ф.*) функции $f(\widetilde{x}^n)$.

Кроме приведенных выше разложений булевых функций, широко используются еще такие разложения:

а) $$f(\widetilde{x}^n) = \mathop{\&}_{(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_k)} \left(x_{i_1}^{\overline{\sigma}_1} \vee x_{i_2}^{\overline{\sigma}_2} \vee \ldots \vee x_{i_k}^{\overline{\sigma}_k} \vee f^{i_1,i_2,\ldots,i_k}_{\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_k}(\widetilde{x}^n) \right), \tag{5}$$

где $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n$ $(k \geqslant 1)$ и конъюнкция берется по всем наборам $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k)$ из B^k;

б) $$f(\widetilde{x}^n) = (\overline{x}_i \vee f(x_1, \ldots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \ldots, x_n)) \times$$
$$\times (x_i \vee f(x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_n)); \tag{6}$$

в) $$f(\widetilde{x}^n) = \mathop{\&}_{(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n)} \left(x_1^{\overline{\sigma}_1} \vee x_2^{\overline{\sigma}_2} \vee \ldots \vee x_n^{\overline{\sigma}_n} \vee f(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) \right); \tag{7}$$

г) $$f(\widetilde{x}^n) = \mathop{\&}_{\widetilde{\sigma}:f(\widetilde{\sigma})=0} \left(x_1^{\overline{\sigma}_1} \vee x_2^{\overline{\sigma}_2} \vee \ldots \vee x_n^{\overline{\sigma}_n} \right), \tag{8}$$

где конъюнкция берется по всем наборам $\widetilde{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) \in B^n$, на которых функция $f(\widetilde{x}^n)$ обращается в 0, и предполагается, что $f(\widetilde{x}^n) \not\equiv 1$; правая часть формулы (8) называется *совершенной конъюнктивной нормальной формой* (сокращенно *совершенной к. н. ф.*) функции $f(\widetilde{x}^n)$;

д) $$f(\widetilde{x}^n) = \bigoplus_{(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_k)} x_{i_1}^{\sigma_1} x_{i_2}^{\sigma_2} \ldots x_{i_k}^{\sigma_k} f^{i_1,i_2,\ldots,i_k}_{\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_k}(\widetilde{x}^n), \tag{9}$$

где $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n$ $(k \geqslant 1)$ и суммирование ведется по $\bmod 2$ и по всем наборам $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_k)$ из B^k;

е) $$f(\widetilde{x}^n) = \overline{x}_i f(x_1, \ldots, x_{i-1}, 0, x_{i+1}, \ldots, x_n) \oplus$$
$$\oplus\, x_i f(x_1, \ldots, x_{i-1}, 1, x_{i+1}, \ldots, x_n); \tag{10}$$

ж) $$f(\widetilde{x}^n) = \bigoplus_{(\sigma_1,\sigma_2,\ldots,\sigma_n)} x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \ldots x_n^{\sigma_n} f(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n); \tag{11}$$

з) $$f(\widetilde{x}^n) = \bigoplus_{\widetilde{\sigma}:f(\widetilde{\sigma})=1} x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \ldots x_n^{\sigma_n}, \tag{12}$$

где суммирование (по $\bmod 2$) ведется по всем наборам $\widetilde{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) \in B^n$, на которых функция $f(\widetilde{x}^n)$ обращается в 1.

Пример 1. Разложить по переменной x_1, применяя формулы (2) и (6), и представить в совершенных д. н. ф. и к. н. ф. следующие функции:

1) $f_1(x_1, x_2) = \overline{x}_1$; 2) $f_2(x_1, x_2) = x_2$; 3) $f_3(x_1, x_2) = x_1 \vee x_2$;

4) $f_4(x_1, x_2) = x_1 \to x_2$; 5) $f_5(x_1, x_2, x_3) = x_2 \sim x_3$;

6) $f_6(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 \to \overline{x}_3$.

Решение. 1) Так как $f_1(0, x_2) = \overline{0} = 1$ и $f_1(1, x_2) = \overline{1} = 0$, то, используя формулы (2) и (6), получаем $f_1(x_1, x_2) = \overline{x}_1 = \overline{x}_1 \cdot 1 \vee \vee x_1 \cdot 0 = (\overline{x}_1 \vee 0) \cdot (x_1 \vee 1)$. Далее имеем $f_1(0, 0) = f_1(0, 1) = 1$ и $f_1(1, 0) = f_1(1, 1) = 0$. Значит, для построения совершенной д. н. ф. функции f_1 надо взять наборы (0, 0) и (0, 1) (функция f_1 равна 1 только на них), каждому из этих наборов сопоставить соответствующую конъюнкцию (набору (0, 0) — конъюнкцию $x_1^0x_2^0 = \overline{x}_1\overline{x}_2$, набору (0, 1) — конъюнкцию $x_1^0x_2^1 = \overline{x}_1x_2$), а затем полученные конъюнкции соединить знаком дизъюнкции: $\overline{x}_1\overline{x}_2 \vee \overline{x}_1x_2$.

Аналогично, для построения совершенной к. н. ф. функции f_1 надо взять все наборы, на которых f_1 обращается в 0, т. е. наборы (1, 0) и (1, 1), каждому из этих наборов сопоставить соответствующую дизъюнкцию (набору (1, 0) — дизъюнкцию $x_1^1 \vee x_2^{\overline{0}} = x_1^0 \vee x_2^1 = \overline{x}_1 \vee x_2$, набору (1, 1) — дизъюнкцию $x_1^{\overline{1}} \vee x_2^{\overline{1}} = x_1^0 \vee x_2^0 = \overline{x}_1 \vee \overline{x}_2$), а затем полученные дизъюнкции соединить знаком конъюнкции: $(\overline{x}_1 \vee x_2) * * (\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2)$.

2) $f_2(0, x_2) = x_2$ и $f_2(1, x_2) = x_2$. Значит, разложения (2) и (6) по переменной x_1 для функции f_2 таковы: $f_2(x_1, x_2) = \overline{x}_1 \cdot x_2 \vee x_1 \cdot x_2$ и $f_2(x_1, x_2) = (\overline{x}_1 \vee x_2) \cdot (x_1 \vee x_2)$. Далее, $f_2(0, 0) = f_2(1, 0) = 0$ и $f_2(0, 1) = f_2(1, 1) = 1$. Следовательно, совершенная д. н. ф. функции f_2 имеет вид $x_1^0 \cdot x_2^1 \vee x_1^1 \cdot x_2^1 = \overline{x}_1x_2 \vee x_1x_2$, а совершенная к. н. ф. такова: $(x_1^{\overline{0}} \vee x_2^{\overline{0}}) \cdot (x_1^{\overline{1}} \vee x_2^{\overline{0}}) = (x_1^1 \vee x_2^1) \cdot (x_1^0 \vee x_2^1) = (x_1 \vee x_2) \cdot (\overline{x}_1 \vee x_2)$.

3) $f_3(0, x_2) = 0 \vee x_2 = x_2$, $f_3(1, x_2) = 1 \vee x_2 = 1$. Поэтому имеем $f_3(x_1, x_2) = \overline{x}_1 \cdot x_2 \vee x_1 \cdot 1$ и $f_3(x_1, x_2) = (\overline{x}_1 \vee 1) \cdot (x_1 \vee x_2)$. Вычисляя значения функции f_3 на различных наборах значений переменных, получаем $f_3(0, 0) = 0$, $f_3(0, 1) = f_3(1, 0) = f_3(1, 1) = 1$. Затем строим совершенные дизъюнктивную и конъюнктивную нормальные формы функции f_3:

$$x_1^0x_2^1 \vee x_1^1x_2^0 \vee x_1^1x_2^1 = \overline{x}_1x_2 \vee x_1\overline{x}_2 \vee x_1x_2, \quad x_1^{\overline{0}} \vee x_2^{\overline{0}} = x_1^1 \vee x_2^1 = x_1 \vee x_2.$$

4) $f_4(0, x_2) = 0 \to x_2 = 1$, $f_4(1, x_2) = 1 \to x_2 = 0 \vee x_2 = x_2$. Следовательно, $f_4(x_1, x_2) = \overline{x}_1 \cdot 1 \vee x_1 \cdot x_2$ и $f_4(x_1, x_2) = (\overline{x}_1 \vee x_2)$ & & $(x_1 \vee 1)$. Далее, $f_4(0, 0) = f_4(0, 1) = f_4(1, 1) = 1$ и $f_4(1, 0) = 0$. Значит, совершенная д. н. ф. функции f_4 имеет вид $x_1^0x_2^0 \vee x_1^0x_2^1 \vee \vee x_1^1x_2^1 = \overline{x}_1\overline{x}_2 \vee \overline{x}_1x_2 \vee x_1x_2$, а совершенная к. н. ф. такова: $x_1^{\overline{1}} \vee x_2^{\overline{0}} = = x_1^0 \vee x_2^1 = \overline{x}_1 \vee x_2$.

5) $f_5(0, x_2, x_3) = f_5(1, x_2, x_3) = x_2 \sim x_3$. Поэтому разложения этой функции по переменной x_1, полученные по формулам (2) и (6), таковы: $\overline{x}_1 \cdot (x_2 \sim x_3) \vee x_1 \cdot (x_2 \sim x_3)$ и $(\overline{x}_1 \vee (x_2 \sim x_3))(x_1 \vee (x_2 \sim x_3))$. Вычисляя значения функции f_5 на различных наборах значений пе-

ременных, имеем $f_5(0,0,0)=f_5(1,0,0)=f_5(0,1,1)=f_5(1,1,1)=1$ и $f_5(0,0,1)=f_5(1,0,1)=f_5(0,1,0)=f_5(1,1,0)=0$. Совершенная д. н. ф. у f_5 имеет вид

$$x_1^0x_2^0x_3^0\vee x_1^1x_2^0x_3^0\vee x_1^0x_2^1x_3^1\vee x_1^1x_2^1x_3^1=\overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3\vee x_1\overline{x}_2\overline{x}_3\vee\overline{x}_1x_2x_3\vee x_1x_2x_3,$$

а совершенная к. н. ф. такова:

$$(x_1^{\overline{0}}\vee x_2^{\overline{0}}\vee x_3^{\overline{1}})\cdot(x_1^{\overline{1}}\vee x_2^{\overline{0}}\vee x_3^{\overline{1}})\cdot(x_1^{\overline{0}}\vee x_2^{\overline{1}}\vee x_3^{\overline{0}})\cdot(x_1^{\overline{1}}\vee x_2^{\overline{1}}\vee x_3^{\overline{0}})=$$
$$=(x_1\vee x_2\vee\overline{x}_3)\cdot(\overline{x}_1\vee x_2\vee\overline{x}_3)\cdot(x_1\vee\overline{x}_2\vee x_3)\cdot(\overline{x}_1\vee\overline{x}_2\vee x_3).$$

6) $f_6(0,x_2,x_3)=0\to\overline{x}_3=1$, $f_6(1,x_2,x_3)=1\cdot x_2\to\overline{x}_3=x_2\to\overline{x}_3$. Следовательно, разложения этой функции по переменной x_1, полученные по формулам (2) и (6), имеют вид $\overline{x}_1\cdot 1\vee x_1\cdot(x_2\to\overline{x}_3)$ и $(\overline{x}_1\vee(x_2\to\overline{x}_3))\cdot(\overline{x}_1\vee 1)$. Вычисляем значения функции f_6 на различных наборах значений переменных: $f_6(0,0,0)=f_6(0,0,1)=f_6(0,1,0)=f_6(0,1,1)=f_6(1,0,0)=f_6(1,0,1)=f_6(1,1,0)$ и $f_6(1,1,1)=0$. Значит, совершенная д. н. ф. функции f_6 такова: $\overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3\vee\overline{x}_1\overline{x}_2x_3\vee\overline{x}_1x_2\overline{x}_3\vee\overline{x}_1x_2\overline{x}_3\vee x_1\overline{x}_2x_3\vee x_1x_2\overline{x}_3$. Совершенная к. н. ф. функции имеет вид $\overline{x}_1\vee\overline{x}_2\vee\overline{x}_3$.

Замечание. Совершенная дизъюнктивная нормальная форма функции $f(x_1)=\overline{x}_1$ (как функции от одной переменной $\overline{x}_1$) совпадает с совершенной к. н. ф. и есть просто $\overline{x}_1$. В самом деле, $f(0)=1$ и $f(1)=0$; следовательно, совершенная д. н. ф. функции $f(x_1)=\overline{x}_1$ имеет вид $x_1^0=\overline{x}_1$ и совершенная к. н. ф. такова же: $\overline{x}_1^1=x_1^0=\overline{x}_1$. Аналогичное утверждение справедливо и для функции $f(x_2)=x_2$: ее совершенные дизъюнктивная и конъюнктивная нормальные формы совпадают с ней самой, т. е. с x_2. Эти факты интересно сравнить с соответствующими результатами для функций f_1 и f_2 из приведенного выше примера.

Пример 2. Представить в совершенной д. н. ф. и совершенной к. н. ф. функцию $f(\widetilde{x}^3)=(01101001)$.

Решение. Функция f принимает значение 1 на наборах, номера которых равны 1, 2, 4 и 7, т. е. на наборах (0, 0, 1), (0, 1, 0), (1, 0, 0) и (1, 1, 1). Конъюнкции, соответствующие этим наборам, имеют вид $x_1^0x_2^0x_3^1=\overline{x}_1\overline{x}_2x_3$, $x_1^0x_2^1x_3^0=\overline{x}_1x_2\overline{x}_3$, $x_1^1x_2^0x_3^0=x_1\overline{x}_2\overline{x}_3$ и $x_1^1x_2^1x_3^1=x_1x_2x_3$. Значит, совершенная д. н. ф. функции $f(\widetilde{x}^3)$ такова: $\overline{x}_1\overline{x}_2x_3\vee\overline{x}_1x_2\overline{x}_3\vee x_1\overline{x}_2\overline{x}_3\vee x_1x_2x_3$. Для построения совершенной к. н. ф. рассматриваем все те наборы, на которых функция f обращается в 0. Это наборы (0, 0, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1) и (1, 1, 0). Соответствующие им дизъюнкции имеют вид

$$x_1^{\overline{0}}\vee x_2^{\overline{0}}\vee x_3^{\overline{0}}=x_1^1\vee x_2^1\vee x_3^1=x_1\vee x_2\vee x_3,$$
$$x_1^{\overline{0}}\vee x_2^{\overline{1}}\vee x_3^{\overline{1}}=x_1^1\vee x_2^0\vee x_3^0=x_1\vee\overline{x}_2\vee\overline{x}_3,$$
$$x_1^{\overline{1}}\vee x_2^{\overline{0}}\vee x_3^{\overline{1}}=x_1^0\vee x_2^1\vee x_3^0=\overline{x}_1\vee x_2\vee\overline{x}_3,$$
$$x_1^{\overline{1}}\vee x_2^{\overline{1}}\vee x_3^{\overline{0}}=x_1^0\vee x_2^0\vee x_3^1=\overline{x}_1\vee\overline{x}_2\vee x_3.$$

Перемножая эти дизъюнкции, получаем совершенную к. н. ф. функции f: $(x_1\vee x_2\vee x_3)\cdot(x_1\vee\overline{x}_2\vee\overline{x}_3)\cdot(\overline{x}_1\vee x_2\vee\overline{x}_3)\cdot(\overline{x}_1\vee\overline{x}_2\vee x_3)$.

Пример 3. Представить в совершенной к. н. ф. x_1-, $\overline{x}_2$- и $x_2\overline{x}_3$-компоненты функции $f(\widetilde{x}^3) = (x_1 \to \overline{x}_2 x_3) \oplus x_2$, рассматривая их как функции, зависящие только от «оставшихся» переменных.

Решение. x_1-компонентой функции $f(\widetilde{x}^3)$ является

$$f_1^1(\widetilde{x}^3) = f(1, x_2, x_3) = (1 \to \overline{x}_2 x_3) \oplus x_2 = (0 \vee \overline{x}_2 x_3) \oplus x_2 = \\ = \overline{x}_2 x_3 \oplus x_2 = x_2 \vee x_3.$$

Аналогично, $\overline{x}_2$-компонента функции $f(\widetilde{x}^3)$ есть функция $f_0^2(\widetilde{x}^3) = f(x_1, 0, x_3) = (x_1 \to \overline{0} \cdot x_3) \oplus 0 = x_1 \to x_3$, а $x_2\overline{x}_3$-компонента — функция $f_{10}^{2,3}(\widetilde{x}^3) = f(x_1, 1, 0) = (x_1 \to \overline{1} \cdot 0) \oplus 1 = \overline{x}_1 \oplus 1 = x_1$. Очевидно, что совершенная к. н. ф. функции $\varphi_1(x_2, x_3) = x_2 \vee x_3$ совпадает с ней самой, совершенная к. н. ф. функции $\varphi_2(x_1, x_3) = x_1 \to x_3$ есть $\overline{x}_1^1 \vee x_3^{\overline{0}} = x_1^0 \vee x_3^1 = \overline{x}_1 \vee x_3$ и, наконец, совершенная к. н. ф. функции $\varphi_3(x_1) = x_1$ — это просто x_1.

Пример 4. Доказать, что если $f_0^i(\widetilde{x}^n) \equiv f_1^i(\widetilde{x}^n)$ для всякого i $(1 \leqslant i \leqslant n)$, то функция $f(\widetilde{x}^n)$ есть константа.

Решение. Разложив функцию f по переменной x_i (см. формулу (2)), получаем

$$(\widetilde{x}^n) = \overline{x}_i f_0^i(\widetilde{x}^n) \vee x_i f_1^i(\widetilde{x}^n) = \overline{x}_i f_0^i(\widetilde{x}^n) \vee x_i f_0^i(\widetilde{x}^n) = \\ = (\overline{x}_i \vee x_i) f_0^i(\widetilde{x}^n) = 1 \cdot f_0^i(\widetilde{x}^n) = f_0^i(\widetilde{x}^n),$$

т. е. x_i — фиктивная переменная функции $f(\widetilde{x}^n)$. Так как x_i — произвольно выбранная переменная, то, значит, все переменные функции $f(\widetilde{x}^n)$ фиктивные. Следовательно, $f(\widetilde{x}^n)$ есть константа.

Пример 5. Среди функций, зависящих только от двух переменных x_1 и x_2, найти те, которые имеют наибольшее число разных подфункций. (Каждая подфункция функции $f(x_1, x_2)$ рассматривается как функция, зависящая от обеих переменных x_1 и x_2.)

Решение. Эту задачу можно решать следующим (громоздким, переборным) способом: выписать все функции, зависящие от переменных x_1 и x_2 (их 16!), затем для каждой из них найти все ее подфункции и выяснить, сколько среди них разных. Привлекая некоторые дополнительные утверждения, удается сократить перебор.

Например, можно воспользоваться следующими фактами (см. задачу 2.6):

1) если функция $g(\widetilde{x}^n)$ может быть получена из функции $f(\widetilde{x}^n)$ переименованием переменных без отождествления, то число различных подфункций у функции $f(\widetilde{x}^n)$ и $g(\widetilde{x}^n)$ одинаковое;

2) у двойственных функций число различных подфункций одинаковое;

3) если $g(\widetilde{x}^n) = \overline{f(\widetilde{x}^n)}$, то число различных подфункций у функций $f(\widetilde{x}^n)$ и $g(\widetilde{x}^n)$ одинаковое.

Принимая во внимание эти три утверждения, достаточно ограничиться рассмотрением пяти функций: 0, x_1, x_1x_2, $x_1 \oplus x_2$ и $x_1 \to x_2$.

Нетрудно установить, что у функции 0 все подфункции равны ей самой, а у функции x_1 три разные подфункции: 0, 1 и x_1. У функции x_1x_2 разных подфункций пять: x_1x_2, 0, x_1, x_2 и 1. У функции $x_1 \oplus x_2$ семь разных подфункций: $x_1 \oplus x_2$, x_1, x_2, $x_1 \oplus 1$, $x_2 \oplus 1$, 0 и 1. Наконец, у функции $x_1 \to x_2$ пять подфункций: $x_1 \to x_2$, $1 \to x_2 = x_2$, $x_1 \to 0 = \overline{x}_1$, $1 \to 0 = 0$ и $0 \to x_2 \equiv x_1 \to 1 \equiv 0 \to 0 \equiv \equiv 0 \to 1 \equiv 1 \to 1 \equiv 1$.

Итак, наибольшее число разных подфункций (семь) имеют следующие функции, зависящие от x_1 и x_2: $x_1 \oplus x_2$ и $x_1 \oplus x_2 \oplus 1 = x_1 \sim x_2$.

Приведем еще одно решение данной задачи. Сначала заметим, что у функции, зависящей существенно хотя бы от одной переменной, число различных подфункций не меньше трех (она сама и две константные подфункции всегда отличны друг от друга). Поэтому тот случай, когда исходная функция есть константа, можно не рассматривать (ибо все ее подфункции просто совпадают с ней самой).

Далее, если функция $f(\widetilde{x}^n)$ зависит существенно только от одной переменной, то она имеет вид x_i^σ, где $\sigma \in \{0, 1\}$ $(i = 1, 2)$. Очевидно, что у такой функции три различные подфункции: x_i^σ, 0 и 1.

Теперь займемся исследованием функций, у которых обе переменные существенные. Возможны два подслучая:

а) функция $f(\widetilde{x}^2)$ принимает некоторое значение α на трех наборах значений переменных, а другое значение $\overline{\alpha}$ — на одном наборе);

б) функция $f(\widetilde{x}^2)$ принимает каждое значение (0 и 1) ровно на двух наборах.

В случае а) в каждой паре подфункций $(f(0, x_2),\ f(1, x_2))$ и $(f(x_1, 0),\ f(x_1, 1))$ ровно одна подфункция является константой α, а другая есть соответственно x_2^σ и x_1^τ (где $\sigma, \tau \in \{0, 1\}$). Отсюда следует, что у данной функции $f(\widetilde{x}^2)$ ровно пять различных подфункций: сама функция $f(\widetilde{x}^2)$, x_1^τ, x_2^σ, 0 и 1.

Перейдем к подслучаю б). Здесь ни одна из подфункций $f(0, x_2)$, $f(1, x_2)$, $f(x_1, 0)$ и $f(x_1, 1)$ не может быть константой. В самом деле, если, например, $f(0, x_2) \equiv \alpha$, то функция $f(1, x_2)$ должна быть равна тождественно $\overline{\alpha}$; но тогда (см. формулу (2))

$$f(\widetilde{x}^2) = \overline{x}_1\alpha \vee x_1\overline{\alpha} = \begin{cases} x_1 & \text{при } \alpha = 0, \\ \overline{x}_1 & \text{при } \alpha = 1, \end{cases}$$

т. е. функция $f(\widetilde{x}^2)$ зависит несущественно от переменной x_2, что противоречит условию, наложенному на функцию $f(\widetilde{x}^2)$. Далее, так как функция $f(\widetilde{x}^2)$ существенно зависит от обеих переменных, то $f(0, x_2) \not\equiv f(1, x_2)$ и $f(x_1, 0) \not\equiv f(x, 1)$. Действительно, если, например, $f(0, x_2) \equiv f(1, x_2)$, то, используя формулу (2), получаем (ср. с решением примера 4): $f(\widetilde{x}^2) = \overline{x}_1 f(0, x_2) \vee x_1 f(1, x_2) = \overline{x}_1 f(0, x_2) \vee \vee x_1 f(0, x_2) = (\overline{x}_1 \vee x_1) \cdot f(0, x_2) = 1 \,\&\, f(0, x_2) = f(0, x_2)$, т. е. переменная x_1 фиктивная. Это противоречит условию, наложенному на функцию $f(\widetilde{x}^2)$. Из всего сказанного относительно функций $f(0, x_2)$, $f(1, x_2)$, $f(x_1, 0)$ и $f(x_1, 1)$ следует, что $f(0, x_2) = x_2^\sigma$, $f(1, x_2) = = \overline{x_2^\sigma} = x_2^{\overline{\sigma}} = x_2^\sigma$, $f(x_1, 0) = x_1^\tau$ и $f(x_1, 1) = \overline{x_1^\tau} = x_1^{\overline{\tau}}$. Отсюда вытекает, что у функции $f(\widetilde{x}^2)$ семь разных подфункций: она сама, 0, 1, x_1^τ,

$x_1^{\overline{\tau}}$, x_2^{σ} и $x_2^{\overline{\sigma}}$. Нетрудно получить и выражение для функции $f(\widetilde{x}^2)$, воспользовавшись, например, формулой (10):

$$f(\widetilde{x}^2) = \overline{x}_1 x_2^{\sigma} \oplus x_1 x_2^{\overline{\sigma}} = (x_1 \oplus 1)\, x_2^{\sigma} \oplus x_1 (x_2^{\sigma} \oplus 1) =$$

$$= x_1 x_2^{\sigma} \oplus x_2^{\sigma} \oplus x_1 x_2^{\sigma} \oplus x_1 = x_1 \oplus x_2^{\sigma} =$$

$$= x_1 \oplus x_2 \oplus \sigma \oplus 1 = \begin{cases} x_1 \sim x_2, & \text{если } \sigma = 0, \\ x_1 \oplus x_2, & \text{если } \sigma = 1. \end{cases}$$

(Здесь, как и выше, мы использовали эквивалентности $\overline{x}^{\sigma} = \overline{x^{\sigma}} = x^{\sigma} \oplus 1$, а также очевидные тождества $x^{\sigma} = x \sim \sigma = x \oplus \sigma \oplus 1$.)

2.1. Рассматривая соответствующую компоненту функции $f(\widetilde{x}^n)$ как функцию, зависящую от всех переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, представить ее в векторной форме:

1) $f(\widetilde{x}^3) = x_1 \to (x_2 \oplus \overline{x}_1 x_3)$, $\overline{x}_2$-компоненту;
2) $f(\widetilde{x}^3) = x_1 x_2 \mid (x_2 \to x_1 x_3)$, $\overline{x}_3$-компоненту;
3) $f(\widetilde{x}^3) = (\overline{x}_1 \vee x_2 \vee x_3) \downarrow (x_1 \to (\overline{x}_2 \to x_3))$, x_1-компоненту;
4) $f(\widetilde{x}^3) = (01110100)$, $\overline{x}_1$-компоненту;
5) $f(\widetilde{x}^3) = (11001110)$, x_2-компоненту;
6) $f(\widetilde{x}^3) = (10011110)$, x_3-компоненту;
7) $f(\widetilde{x}^4) = (x_1 \oplus x_2) \to (x_3 \to x_1 x_4)$, $\overline{x}_2\overline{x}_4$-компоненту;
8) $f(\widetilde{x}^4) = (x_1 \vee x_2\overline{x}_3 \vee x_4) \oplus (x_1 x_2 x_3 \to x_4)$, $x_1\overline{x}_2 x_3$-компоненту;
9) $f(\widetilde{x}^4) = (0101011011100011)$, $\overline{x}_1 x_4$-компоненту;
10) $f(\widetilde{x}^4) = (1101101100001001)$, $x_2 x_3 \overline{x}_4$-компоненту.

2.2. Используя x_i- и $\overline{x}_i$-компоненты функции $f(\widetilde{x}^n)$, построить в векторной форме ее x_j^{σ}-компоненту, причем эту компоненту следует рассматривать как функцию, зависящую от всех переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$:

1) $f_0^1(\widetilde{x}^3) = x_2 \to x_3$, $f_1^1(\widetilde{x}^3) = \overline{x}_2$, $\overline{x}_3$-компоненту;
2) $f_0^2(\widetilde{x}^3) = x_1$, $f_1^2(\widetilde{x}^3) = x_1 \sim x_3$, x_1-компоненту;
3) $f_0^3(\widetilde{x}^3) = (00111100)$, $f_1^3(\widetilde{x}^3) = (11110000)$, $\overline{x}_2$-компоненту;
4) $f_0^2(\widetilde{x}^3) = (10101111)$, $f_1^2(\widetilde{x}^3) = x_1 \mid x_3$, $\overline{x}_3$-компоненту;
5) $f_0^3(\widetilde{x}^4) = x_1 \oplus x_4$, $f_1^3(\widetilde{x}^4) = x_2 \vee x_4$, $\overline{x}_2$-компоненту;
6) $f_0^2(\widetilde{x}^4) = x_1 \to x_3\overline{x}_4$, $f_1^2(\widetilde{x}^4) = \overline{x}_1 x_3 x_4$, x_4-компоненту;
7) $f_0^1(\widetilde{x}^4) = x_2 x_3 \oplus x_4$, $f_1^1(\widetilde{x}^4) = (1011011110110111)$, $\overline{x}_3$-компоненту.

2.3. Представить в совершенной д. н. ф. следующие функции:

1) $f(\widetilde{x}^3) = (x_1 \vee x_2) \to x_3$; 2) $f(\widetilde{x}^3) = (x_1 \to x_2) \oplus (x_1 \mid x_2 x_3)$;
3) $f(\widetilde{x}^3) = (01010001)$; 4) $f(\widetilde{x}^3) = (01111000)$;
5) $f(\widetilde{x}^3) = (10001111)$; 6) $f(\widetilde{x}^4) = (x_1 \to x_2 x_3 x_4) \cdot (x_3 \to x_1 \overline{x}_2)$;
7) $f(\widetilde{x}^4) = (x_1 \oplus x_2) \cdot (x_3 \to \overline{x}_2 x_4)$; 8) $f(\widetilde{x}^4) = (0100100011000010)$;
9) $f(\widetilde{x}^4) = (1000011100110001)$; 10) $f(\widetilde{x}^4) = (1100100010010011)$.

2.4. Представить в совершенной к. н. ф. следующие функции:
1) $f(\widetilde{x}^2) = x_1 \oplus x_2$; 2) $f(\widetilde{x}^2) = x_1 \downarrow x_2$;
3) $f(\widetilde{x}^3) = x_1\overline{x}_2 \vee x_1x_3 \vee \overline{x}_2x_3$; 4) $f(\widetilde{x}^3) = x_1x_2 \oplus x_3$;
5) $f(\widetilde{x}^3) = (01011101)$; 6) $f(\widetilde{x}^3) = (00101110)$;
7) $f(\widetilde{x}^4) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \cdot x_4 \vee \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3$;
8) $f(\widetilde{x}^4) = x_1 \to (x_2 \to x_3x_4)$; 9) $f(\widetilde{x}^4) = (0101111101110011)$;
10) $f(\widetilde{x}^4) = (0110111011100101)$.

2.5. Представить в указанной форме соответствующую компоненту функции $f(\widetilde{x}^n)$ (рассматривая эту компоненту как функцию от «оставшихся» переменных):
1) $f(\widetilde{x}^3) = \overline{x_1\overline{x}_2 \to \overline{x}_3}$, x_1-компоненту в совершенной к. н. ф.;
2) $f(\widetilde{x}^3) = (x_1 \mid x_2) \cdot \overline{x}_3$, $\overline{x}_3$-компоненту в совершенной д. н. ф.;
3) $f(\widetilde{x}^3) = x_1x_2 \sim (x_2 \sim \overline{x}_3)$, x_2-компоненту в совершенной д. н. ф.;
4) $f(\widetilde{x}^3) = (11101101)$, $\overline{x}_2$-компоненту в совершенной д. н. ф.;
5) $f(\widetilde{x}^3) = (01011011)$, x_3-компоненту в совершенной к. н. ф.;
6) $f(\widetilde{x}^4) = (x_1 \vee \overline{x}_2 \vee x_3)\overline{x}_4 \vee \overline{x}_1x_2\overline{x}_3$, $x_2\overline{x}_3$-компоненту в совершенной д. н. ф.;
7) $f(\widetilde{x}^4) = x_1 \to ((x_2x_3 \to x_4) \to \overline{x}_2)$, x_2-компоненту в совершенной к. н. ф.;
8) $f(\widetilde{x}^4) = ((x_1 \mid x_2) \downarrow x_3) \mid (x_2 \downarrow x_4)$, $\overline{x}_3$-компоненту в совершенной к. н. ф.;
9) $f(\widetilde{x}^4) = (0110111010110111)$, $\overline{x}_2x_4$-компоненту в совершенной д. н. ф.;
10) $f(\widetilde{x}^4) = (1011011101111000)$, $\overline{x}_4$-компоненту в совершенной к. н. ф.

2.6. Доказать, что число различных подфункций у функций $f(\widetilde{x}^n)$ и $g(\widetilde{x}^n)$ одинаковое, если:
1) функция $g(\widetilde{x}^n)$ получается из функции $f(\widetilde{x}^n)$ переименованием переменных без отождествления;
2) функция $g(\widetilde{x}^n)$ получается из функции $f(\widetilde{x}^n)$ заменой некоторых (быть может, всех) переменных на их отрицания;
3) $g(\widetilde{x}^n) = \overline{f(\widetilde{x}^n)}$;
4) функции $f(\widetilde{x}^n)$ и $g(\widetilde{x}^n)$ двойственные.

2.7. Подсчитать число различных подфункций у функции $f(\widetilde{x}^n)$, x_1- и $\overline{x}_1$-компоненты которой известны (напоминаем, что подфункции функции $f(\widetilde{x}^n)$ следует рассматривать как функции, зависящие от всех переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$):
1) $f_0^1(\widetilde{x}^n) = x_2 \vee \ldots \vee x_n$, $f_1^1(\widetilde{x}^n) = 1$ $(n \geqslant 2)$;
2) $f_0^1(\widetilde{x}^n) = x_2 \oplus \ldots \oplus x_n$, $f_1^1(\widetilde{x}^n) = \overline{x_2 \oplus \ldots \oplus x_n}$ $(n \geqslant 2)$;
3) $f_0^1(\widetilde{x}^n) = \overline{x}_2 \ldots \overline{x}_n$, $f_1^1(\widetilde{x}^n) = x_2 \ldots x_n$ $(n \geqslant 2)$;
4) $f_0^1(\widetilde{x}^n) = \overline{x}_2 \ldots \overline{x}_n \vee x_2 \ldots x_n$, $f_1^1(\widetilde{x}^n) = x_2 \ldots x_n$ $(n \geqslant 2)$;
5) $f_0^1(\widetilde{x}^n) = x_2 \ldots x_n$, $f_1^1(\widetilde{x}^n) = \overline{x}_2 \vee \ldots \vee \overline{x}_n$ $(n \geqslant 2)$;
6) $f_0^1(\widetilde{x}^n) = x_2 \vee \ldots \vee x_n$, $f_1^1(\widetilde{x}^n) = x_3 \vee \ldots \vee x_n$ $(n \geqslant 3)$;

7) $f_0^1(\widetilde{x}^n) = x_3 \dots x_n$, $f_1^1(\widetilde{x}^n) = x_2 \vee x_3$ $(n \geqslant 3)$;

8) $f_0^1(\widetilde{x}^n) = x_2 \to x_n$, $f_1^1(\widetilde{x}^n) = \overline{x}_3 \dots \overline{x}_n$ $(n \geqslant 3)$.

2.8. Найти число функций $f(\widetilde{x}^n)$, удовлетворяющих условию: $f_{00}^{i,j}(\widetilde{x}^n) = f_{11}^{i,j}(\widetilde{x}^n)$ при всех i, j таких, что $1 \leqslant i < j \leqslant n$.

2.9. Показать, что число различных функций $f(\widetilde{x}^n)$, для которых данная функция $f(\widetilde{x}^k)$ является подфункцией, не меньше $2^{2^n} - -(2^{2^k} - 1)^{2^{n-k}}$ $(k \leqslant n)$.

2. Дизъюнктивные и конъюнктивные нормальные формы. Формула $x_{i_1}^{\sigma_1} \,\&\, x_{i_2}^{\sigma_2} \,\&\, \dots \,\&\, x_{i_r}^{\sigma_r}$, где $\sigma_k \in \{0, 1\}$, $x_{i_k}^0 = \overline{x}_{i_k}$, $x_{i_k}^1 = x_{i_k}$, $i_k \in \{1, 2, \dots, n\}$, $k = 1, 2, \dots, r$ $(r \geqslant 1$ и $n \geqslant 1)$, называется *конъюнкцией над множеством* $X^n = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Аналогично, формула $x_{i_1}^{\sigma_1} \vee x_{i_2}^{\sigma_2} \vee \dots \vee x_{i_r}^{\sigma_r}$ называется *дизъюнкцией над множеством* X^n. Если $x_{i_j} \neq x_{i_k}$ при $j \neq k$, то конъюнкция (соответственно дизъюнкция) называется *элементарной* (сокращенно *э. к.* и *э. д.* соответственно). Выражения вида $x_{i_k}^{\sigma_k}$ называются *буквами*. Число букв в э. к. (и в э. д.) называется *рангом э. к.* (соответственно э. д.). *Константа* 1 считается по определению *э. к. нулевого ранга*, а константа 0 — *э. д. нулевого ранга.*

Формула вида

$$\mathscr{D} = K_1 \vee K_2 \vee \dots \vee K \tag{13}$$

(краткая запись $\bigvee\limits_{i=1}^{s} K_i$), где K_i — попарно различные элементарные конъюнкции $(i = 1, 2, \dots, s)$ и $s \geqslant 1$, называется *дизъюнктивной нормальной формой* (сокращенно *д. н. ф.*).

Формула вида

$$\mathscr{K} = D_1 \,\&\, D_2 \,\&\, \dots \,\&\, D_s \tag{14}$$

(краткая запись $\mathop{\&}\limits_{i=1}^{s} D_i$), где D_i — попарно различные элементарные дизъюнкции $(i = 1, 2, \dots, s)$ и $s \geqslant 1$, называется *конъюнктивной нормальной формой* (сокращенно *к. н. ф.*).

Число s в формулах (13) и (14) называется соответственно *длиной д. н. ф.* и *длиной к. н. ф.* Сумма рангов всех конъюнкций, входящих в д. н. ф., называется *сложностью д. н. ф.* Аналогично, сумма рангов всех дизъюнкций, входящих в к. н. ф., называется *сложностью к. н. ф.*

Дизъюнктивная (соответственно конъюнктивная) нормальная форма над множеством переменных $X^n = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ называется *совершенной*, если она составлена из элементарных конъюнкций (соответственно элементарных дизъюнкций) ранга n (ср. с определением в п. 1).

Простейший (но весьма громоздкий) способ построения дизъюнктивных и конъюнктивных нормальных форм для булевых функций состоит в использовании эквивалентных преобразований.

Пример 6. С помощью эквивалентных преобразований построить д. н. ф. функции $f(\widetilde{x}^4) = ((x_1 \to x_2\overline{x}_3) \cdot (x_2 \oplus x_3x_4) \to \overline{x}_1x_2x_4) \vee \vee \overline{\overline{x}_1x_2}$.

Р е ш е н и е. Используя основные эквивалентности из § 1, преобразуем «постепенно» части формулы, задающей функцию $f(\widetilde{x}^4)$, к д. н. ф.:

$$x_1 \to x_2\overline{x}_3 = \overline{x}_1 \vee x_2\overline{x}_3; \qquad \text{(см. 8, в))}$$

$$x_2 \oplus x_3x_4 = x_2\overline{x_3x_4} \vee \overline{x}_2x_3x_4 = x_2(\overline{x}_3 \vee \overline{x}_4) \vee \overline{x}_2x_3x_4; \ \text{(см. 8, а) и 4, а))}$$

$$(x_1 \to x_2\overline{x}_3)(x_2 \oplus x_3x_4) \to \overline{x}_1x_2x_4 =$$

$$= (\overline{x}_1 \vee x_2\overline{x}_3)(x_2(\overline{x}_3 \vee \overline{x}_4) \vee \overline{x}_2x_3x_4) \to \overline{x}_1x_2x_4 = \quad \text{(см. 8, в))}$$

$$= \overline{(\overline{x}_1 \vee x_2\overline{x}_3)(x_2(\overline{x}_3 \vee \overline{x}_4) \vee \overline{x}_2x_3x_4)} \vee \overline{x}_1x_2x_4 = \quad \text{(см. 4, а))}$$

$$= \overline{\overline{x}_1 \vee x_2\overline{x}_3} \vee \overline{x_2(\overline{x}_3 \vee \overline{x}_4) \vee \overline{x}_2x_3x_4} \vee \overline{x}_1x_2x_4 = \quad \text{(см. 4, б))}$$

$$= \overline{\overline{x}_1}\,\overline{x_2\overline{x}_3} \vee \overline{x_2(\overline{x}_3 \vee \overline{x}_4)}\,\&\,\overline{\overline{x}_2x_3x_4} \vee \overline{x}_1x_2x_4 = \quad \text{(см. 7, д) и 4, а))}$$

$$= x_1(\overline{x}_2 \vee \overline{\overline{x}}_3) \vee (\overline{x}_2 \vee \overline{x_3 \vee \overline{x}_4})(\overline{\overline{x}}_2 \vee \overline{x}_3 \vee \overline{x}_4) \vee$$

$$\vee\, \overline{x}_1x_2x_4 = \quad \text{(см. 3, в), 4, б), 7, д))}$$

$$= x_1\overline{x}_2 \vee x_1x_3 \vee (\overline{x}_2 \vee x_3x_4)(x_2 \vee \overline{x}_3 \vee \overline{x}_4) \vee$$

$$\vee\, \overline{x}_1x_2x_4 = \quad \text{(см. 3, в), 7, а), 7, в))}$$

$$= x_1\overline{x}_2 \vee x_1x_3 \vee \overline{x}_2\overline{x}_3 \vee \overline{x}_2\overline{x}_4 \vee x_2x_3x_4 \vee \overline{x}_1x_2x_4 \vee ;$$

$$f(\widetilde{x}^4) = x_1\overline{x}_2 \vee x_1x_3 \vee \overline{x}_2\overline{x}_3 \vee \overline{x}_2\overline{x}_4 \vee x_2x_3x_4 \vee$$

$$\vee\, \overline{x}_1x_2x_4 \vee \overline{\overline{x}_1x_2} = \quad \text{(см. 4, а), 7, д))}$$

$$= x_1\overline{x}_2 \vee x_1x_3 \vee \overline{x}_2\overline{x}_3 \vee \overline{x}_2\overline{x}_4 \vee x_2x_3x_4 \vee \overline{x}_1x_2x_4 \vee$$

$$\vee\, x_1 \vee \overline{x}_2 = \quad \text{(см. 5, а))}$$

$$= x_2x_3x_4 \vee \overline{x}_1x_2x_4 \vee x_1 \vee \overline{x}_2 = \quad \text{(см. 6, а))}$$

$$= x_2x_3x_4 \vee x_2x_4 \vee x_1 \vee \overline{x}_2 = \quad \text{(см. 5, а))}$$

$$= x_2x_4 \vee x_1 \vee \overline{x}_2 = \quad \text{(см. 6, а))}$$

$$= x_1 \vee \overline{x}_2 \vee x_4.$$

Очевидно, что полученная д. н. ф. является и к. н. ф.

Если булева функция задана некоторой д. н. ф., то совершенную д. н. ф. этой функции можно получить, используя преобразования вида $A = A \cdot x \vee A \cdot \overline{x}$ и $A \vee A = A$. Аналогично, совершенная к. н. ф. булевой функции может быть построена из какой-либо к. н. ф. этой функции с помощью преобразований вида $A = (A \vee x) \cdot (A \vee \overline{x})$ и $A \cdot A = A$.

Дистрибутивный закон $x \cdot (y \vee z) = x \cdot y \vee x \cdot z$ (см. 3, а) в § 1) совместно с эквивалентностями $x \cdot x = x$, $x \cdot \overline{x} = 0$, $A \cdot 0 = 0$, $A \vee 0 = A$ и законом поглощения $A \vee A \cdot B = A$ позволяет переходить от к. н. ф. булевой функции к некоторой д. н. ф., задающей эту же функцию. Аналогично, используя дистрибутивный закон $x \vee y \cdot z = (x \vee y) \cdot (x \vee z)$ (см. 3, б) в § 1), эквивалентности $x \vee x = x$, $x \vee \overline{x} = 1$, $A \vee 1 = 1$, $A \cdot 1 = A$ и закон поглощения $A \cdot (A \vee B) = A$, можно из д. н. ф. булевой функции построить некоторую к. н. ф. той же функции.

Пример 7. Используя преобразования вида $A = A \cdot x \vee A \cdot \overline{x}$ и $A \vee A = A$, построить совершенную д. н. ф. функции $f(\widetilde{x}^3) = \overline{x}_1 \vee x_1\overline{x}_2 \vee x_2\overline{x}_3$.

Решение. Функция f задана д. н. ф. Каждая из входящих в эту д. н. ф. конъюнкций элементарная. Значит, для построения совершенной д. н. ф. достаточно «пополнить» каждую из конъюнкций недостающими буквами x_i^σ, применяя соотношение $A = A \cdot x \vee A \cdot \overline{x}$, а затем устранить повторения («привести подобные слагаемые») с помощью эквивалентности $A \vee A = A$. Имеем $\overline{x}_1 = \overline{x}_1x_2 \vee \overline{x}_1\overline{x}_2 = \overline{x}_1x_2x_3 \vee \overline{x}_1x_2\overline{x}_3 \vee \overline{x}_1\overline{x}_2x_3 \vee \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3$, $x_1\overline{x}_2 = x_1\overline{x}_2x_3 \vee x_1\overline{x}_2\overline{x}_3$, $x_2\overline{x}_3 = x_1x_2\overline{x}_3 \vee \overline{x}_1x_2\overline{x}_3$. Следовательно, $f(\widetilde{x}^3) = \overline{x}_1x_2x_3 \vee \overline{x}_1x_2\overline{x}_3 \vee \overline{x}_1\overline{x}_2x_3 \vee \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3 \vee x_1\overline{x}_2x_3 \vee x_1\overline{x}_2\overline{x}_3 \vee x_1x_2\overline{x}_3$.

Пример 8. Применяя дистрибутивный закон $x \vee yz = (x \vee y) \times (x \vee z)$ и эквивалентности $x \vee \overline{x} = 1$, $A \vee 1 = 1$ и $A \cdot 1 = A$, преобразовать д. н. ф. $x_1 \vee \overline{x}_1x_2 \vee \overline{x}_2\overline{x}_3$ в к. н. ф.

Решение. Имеем $x_1 \vee \overline{x}_1 \cdot x_2 = (x_1 \vee \overline{x}_1) \cdot (x_1 \vee x_2) = 1 \,\&\, (x_1 \vee x_2) = x_1 \vee x_2$. Далее, $(x_1 \vee x_2) \vee \overline{x}_2\overline{x}_3 = (x_1 \vee x_2 \vee \overline{x}_2) \,\&\, (x_1 \vee x_2 \vee \overline{x}_3) = (x_1 \vee 1) \cdot (x_1 \vee x_2 \vee \overline{x}_3) = 1 \cdot (x_1 \vee x_2 \vee \overline{x}_3) = x_1 \vee x_2 \vee \overline{x}_3$.

Пример 9. Подсчитать число функций $f(\widetilde{x}^n)$, у которых совершенная к. н. ф. является одновременно и д. н. ф. (не обязательно совершенной).

Решение. Совершенная к. н. ф. функции $f(\widetilde{x}^n)$ есть «произведение» элементарных дизъюнкций ранга n: $D_1 \cdot D_2 \cdot \ldots \cdot D_s$ $(s \geqslant 1)$. Если $n = 1$, то имеется три возможности: x_1, $\overline{x}_1$ и $x_1 \cdot \overline{x}_1$. Очевидно, что дизъюнктивными нормальными формами являются только x_1 и $\overline{x}_1$ (причем даже совершенными д. н. ф.). Пусть теперь $n \geqslant 2$. Если $s \geqslant 2$, то формула $D_1 \cdot D_2 \cdot \ldots \cdot D_s$ не может быть д. н. ф., так как в каждой элементарной дизъюнкции D_i содержится не менее двух букв. Значит, нужно исследовать только случай, когда $s = 1$. Имеем $f(\widetilde{x}^n) = x_1^{\sigma_1} \vee x_2^{\sigma_2} \vee \ldots \vee x_n^{\sigma_n}$, где $\sigma_i \in \{0, 1\}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Каждая такая функция однозначно определяется заданием набора $(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$. Следовательно, число соответствующих функций равно 2^n (при любом $n \geqslant 1$).

Пример 10. Найти длину совершенной д. н. ф. функции $f(\widetilde{x}^n) = (\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \vee \ldots \vee \overline{x}_n) \cdot (x_1 \vee x_2 \vee \ldots \vee x_n)$, $n \geqslant 2$.

Решение. Принимая во внимание определение длины д. н. ф. булевой функции и процедуру построения совершенной д. н. ф., описанную в § 1, заключаем, что длина совершенной д. н. ф. равна мощности множества N_f (множества наборов, на которых функция f обращается в 1). Следовательно, достаточно выяснить, на скольких наборах значений переменных выполняется равенство $(\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \vee \ldots \vee \overline{x}_n) \cdot (x_1 \vee x_2 \vee \ldots \vee x_n) = 1$.

Очевидно, что это равенство справедливо тогда и только тогда, когда $\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \vee \ldots \vee \overline{x}_n = 1$ и $x_1 \vee x_2 \vee \ldots \vee x_n = 1$. Далее, элементарная дизъюнкция $x_1^{\sigma_1} \vee x_2^{\sigma_2} \vee \ldots \vee x_n^{\sigma_n}$ обращается в 1 на любом наборе, кроме набора $(\overline{\sigma}_1, \overline{\sigma}_2, \ldots, \overline{\sigma}_n)$, ибо если $x_i = \sigma_i$ для некоторого i, то $x_i^{\sigma_i} = \sigma_i^{\sigma_i} = 1$ и $x_1^{\sigma_1} \vee \ldots \vee x_{i-1}^{\sigma_{i-1}} \vee \sigma_i^{\sigma_i} \vee x_{i+1}^{\sigma_i+1} \vee \ldots \vee x_n^{\sigma_n} = 1$.

Значит, дизъюнкция $\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \vee \ldots \vee \overline{x}_n$ равна 1 на всех наборах, за исключением единичного набора $\widetilde{1} = (1, 1, \ldots, 1)$, а дизъюнкция $x_1 \vee \vee x_2 \vee \ldots \vee x_n$ равна 1 на всяком наборе, кроме нулевого: $\widetilde{0} = (0, 0, \ldots \ldots, 0)$. Таким образом, получаем $|N_f| = 2^n - 2$.

2.10. С помощью эквивалентных преобразований построить д. н. ф. функции $f(\widetilde{x}^n)$:

1) $f(\widetilde{x}^3) = (\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \vee \overline{x}_3) \cdot (x_1 x_2 \vee x_3)$;
2) $f(\widetilde{x}^3) = (\overline{x}_1 x_2 \oplus x_3) \cdot (x_1 x_3 \to x_2)$;
3) $f(\widetilde{x}^3) = (x_1 \sim x_2) \vee (x_1 x_3 \oplus (x_2 \to x_3))$;
4) $f(\widetilde{x}^3) = (x_1 \downarrow x_2 x_3) \downarrow ((\overline{x}_1 \mid x_2) \downarrow x_3)$;
5) $f(\widetilde{x}^3) = \overline{x_1 \to (x_2 \to x_3)} \oplus (x_1 \mid (x_2 \oplus x_3))$;
6) $f(\widetilde{x}^3) = \overline{x_1 \overline{x}_2 \vee x_3} \sim (x_1 \to x_2 \overline{x}_3)$;
7) $f(\widetilde{x}^3) = (x_1 \vee x_2 \overline{x}_3) \cdot (x_1 \overline{x}_2 \vee \overline{x}_3) \cdot (\overline{x_1 x_2} \vee x_3)$;
8) $f(\widetilde{x}^4) = (x_1 \vee x_2 \overline{x}_3 \overline{x}_4) \cdot ((\overline{x}_1 \vee x_4) \oplus x_2 x_3) \vee \overline{x}_2 \cdot (x_3 \vee \overline{x_1 \overline{x}_4})$;
9) $f(\widetilde{x}^4) = (x_1 \to x_2) \cdot (x_2 \to \overline{x}_3) \cdot (x_3 \to x_1 \overline{x}_4)$;
10) $f(\widetilde{x}^4) = (x_1 \downarrow x_2) \cdot ((x_2 \mid x_3) \vee x_1 \overline{x}_4) \cdot (x_1 \downarrow (x_3 \mid x_4))$.

2.11. Используя эквивалентные преобразования, построить к. н. ф. функции $f(\widetilde{x}^n)$:

1) $f(\widetilde{x}^2) = ((x_1 \to x_2) \oplus (\overline{x}_1 \mid x_2)) \cdot (x_1 \sim x_2 \cdot (x_1 \to x_2))$;
2) $f(\widetilde{x}^2) = \overline{x_1 x_2} \vee (x_1 \downarrow (x_2 \vee (\overline{x}_1 \to x_2)))$;
3) $f(\widetilde{x}^3) = x_1 \overline{x}_2 \vee \overline{x}_2 x_3 \vee (x_1 \to x_2 x_3)$;
4) $f(\widetilde{x}^3) = (\overline{x}_1 \to (x_2 \to x_3)) \oplus x_1 \overline{x}_2 x_3$;
5) $f(\widetilde{x}^3) = (x_1 \sim (x_2 \to x_3)) \vee (x_2 \to x_1 x_3)$;
6) $f(\widetilde{x}^4) = \overline{x}_1 x_2 \vee \overline{x}_2 x_3 \vee \overline{x}_3 x_4 \vee x_1 \overline{x}_4$;
7) $f(\widetilde{x}^4) = (x_1 \sim x_2) \vee (x_1 x_3 \sim x_4) \vee x_2 \overline{x}_3$.

2.12. Применяя преобразования вида $A = A \cdot \overline{x} \vee A \cdot x$ и $A \vee A = A$, построить из заданной д. н. ф. функции $f(\widetilde{x}^n)$ ее совершенную д. н. ф.:

1) $f(\widetilde{x}^3) = x_1 x_2 \vee \overline{x}_3$; 2) $f(\widetilde{x}^3) = \overline{x}_1 \overline{x}_2 \vee x_2 \overline{x}_3 \vee x_1 \overline{x}_3$;
3) $f(\widetilde{x}^3) = x_1 \vee x_2 x_3 \vee \overline{x}_2 \overline{x}_3$; 4) $f(\widetilde{x}^3) = x_1 \overline{x}_2 \vee x_2 x_3 \vee \overline{x}_3$;
5) $f(\widetilde{x}^3) = x_1 \vee \overline{x}_2 \vee \overline{x}_1 x_3$; 6) $f(\widetilde{x}^4) = x_1 x_2 \overline{x}_3 \vee x_1 x_3 \overline{x}_4$;
7) $f(\widetilde{x}^4) = x_1 x_2 \vee \overline{x}_2 x_4 \vee x_3 \overline{x}_4$; 8) $f(\widetilde{x}^4) = x_1 \vee x_2 x_3 \vee \overline{x}_1 x_4$.

2.13. С помощью преобразований вида $A = (A \vee x) \cdot (A \vee \overline{x})$ и $A \cdot A = A$ построить из заданной к. н. ф. функции $f(\widetilde{x}^n)$ ее совершенную к. н. ф.:

1) $f(\widetilde{x}^3) = (x_1 \vee \overline{x}_2) \cdot x_3$; 2) $f(\widetilde{x}^3) = (x_1 \vee x_2) \cdot (\overline{x}_2 \vee x_3) \cdot \overline{x}_3$;
3) $f(\widetilde{x}^3) = (\overline{x}_1 \vee x_2) \cdot (x_1 \vee \overline{x}_3) \cdot (x_2 \vee x_3)$;
4) $f(\widetilde{x}^3) = x_1 \cdot \overline{x}_2 \cdot (\overline{x}_1 \vee x_3) \cdot (x_1 \vee \overline{x}_3)$;
5) $f(\widetilde{x}^3) = (\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2) \cdot x_2 \cdot (x_1 \vee \overline{x}_3) \cdot (\overline{x}_2 \vee x_3)$;
6) $f(\widetilde{x}^4) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \cdot (x_1 \vee \overline{x}_2 \vee \overline{x}_4)$;
7) $f(\widetilde{x}^4) = (x_1 \vee x_2) \cdot (\overline{x}_2 \vee x_3) \cdot (\overline{x}_3 \vee x_4)$;
8) $f(\widetilde{x}^4) = x_1 \cdot \overline{x}_2 \cdot x_3 \cdot (x_1 \vee \overline{x}_2 \vee x_3 \vee \overline{x}_4)$.

2.14. Используя дистрибутивный закон $x(y \vee z) = xy \vee xz$ и эквивалентности $x \cdot x = x$, $x \cdot \overline{x} = 0$, $A \cdot 0 = 0$, $A \vee 0 = A$ и $A \vee A \cdot B = A$, перейти от заданной к. н. ф. функции $f(\widetilde{x}^n)$ к д. н. ф.:

1) $f(\widetilde{x}^3) = (\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2) \cdot (x_1 \vee x_3) \cdot (\overline{x}_2 \vee \overline{x}_3)$;
2) $f(\widetilde{x}^3) = x_1 \cdot (x_1 \vee \overline{x}_2 \vee \overline{x}_3) \cdot (x_2 \vee \overline{x}_3)$;
3) $f(\widetilde{x}^3) = (x_1 \vee \overline{x}_2) \cdot (x_1 \vee \overline{x}_3) \cdot (\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \vee x_3)$;
4) $f(\widetilde{x}^3) = (\overline{x}_1 \vee x_2) \cdot (\overline{x}_1 \vee \overline{x}_3) \cdot (\overline{x}_1 \vee x_3) \cdot (x_2 \vee x_3)$;
5) $f(\widetilde{x}^3) = (x_1 \vee \overline{x}_2 \vee x_3) \cdot (\overline{x}_1 \vee x_2 \vee \overline{x}_3) \cdot (x_1 \vee x_2 \vee x_3)$;
6) $f(\widetilde{x}^4) = (x_1 \vee \overline{x}_2) \cdot (x_2 \vee \overline{x}_3) \cdot (x_2 \vee x_4) \cdot (x_3 \vee \overline{x}_4)$;
7) $f(\widetilde{x}^4) = (\overline{x}_1 \vee x_2 \vee \overline{x}_3 \vee x_4) \cdot (x_1 \vee \overline{x}_2 \vee x_3) \cdot (x_1 \vee x_4)$.

2.15. Используя дистрибутивный закон $x \vee y \cdot z = (x \vee y)\,\&\,(x \vee z)$ и эквивалентности $x \vee x = x$, $x \vee \overline{x} = 1$, $A \vee 1 = 1$, $A \cdot 1 = A$ и $A \cdot (A \vee B) = A$, перейти от заданной д. н. ф. функции $f(\widetilde{x}^n)$ к ее к. н. ф.:

1) $f(\widetilde{x}^3) = \overline{x}_1\overline{x}_2 \vee x_3$; 2) $f(\widetilde{x}^3) = x_1\overline{x}_2 \vee x_2\overline{x}_3 \vee \overline{x}_2x_3$;
3) $f(\widetilde{x}^3) = \overline{x}_1 \vee x_2x_3 \vee \overline{x}_2\overline{x}_3$; 4) $f(\widetilde{x}^3) = \overline{x}_1 \vee x_2 \vee x_1\overline{x}_2x_3$;
5) $f(\widetilde{x}^3) = \overline{x}_1\overline{x}_2 \vee \overline{x}_2 \vee x_2\overline{x}_3$; 6) $f(\widetilde{x}^4) = x_1x_2 \vee x_2\overline{x}_3 \vee \overline{x}_2x_4 \vee x_3x_4$;
7) $f(\widetilde{x}^4) = x_1x_2\overline{x}_3\overline{x}_4 \vee \overline{x}_1x_2\overline{x}_3 \vee \overline{x}_2x_4$;
8) $f(\widetilde{x}^4) = x_1 \vee x_2\overline{x}_3 \vee \overline{x}_1x_3x_4 \vee \overline{x}_2x_3\overline{x}_4$.

2.16. Доказать, что переменная x_i функции $f(\widetilde{x}^n) \not\equiv 0$ является фиктивной тогда и только тогда, когда совершенная д. н. ф. этой функции вместе с каждой элементарной конъюнкцией K_j содержит также конъюнкцию K_l, отличающуюся от K_j только i-й буквой, т. е. $K_j = x_i^{\sigma_i}K$ и $K_l = x_i^{\overline{\sigma}_i}K$, где K — конъюнкция ранга $n-1$.

Замечание. Справедливо также утверждение, двойственное задаче 2.16: переменная x_i является фиктивной переменной функции $f(\widetilde{x}^n) \not\equiv 1$ тогда и только тогда, когда совершенная к. н. ф. этой функции вместе со всякой элементарной дизъюнкцией D_j содержит такую элементарную дизъюнкцию D_l, которая отличается от D_j лишь i-й буквой, т. е. $D_j = x_i^{\sigma_i} \vee D$ и $D_l = x_i^{\overline{\sigma}_i} \vee D$, где D — дизъюнкция ранга $n-1$.

2.17. Подсчитать число функций $f(\widetilde{x}^n)$, у которых совершенная д. н. ф. удовлетворяет следующему условию:

1) отсутствуют элементарные конъюнкции, у которых число букв с отрицаниями равно числу букв без отрицаний;

2) каждая элементарная конъюнкция содержит хотя бы две буквы с отрицаниями ($n \geqslant 2$);

3) отсутствуют элементарные конъюнкции, содержащие нечетное число букв с отрицаниями;

4) в каждой элементарной конъюнкции число букв с отрицаниями не больше числа букв без отрицаний;

5) какова бы ни была элементарная конъюнкция K_j, найдется (другая) элементарная конъюнкция K_l, отличающаяся от K_j только первой буквой (т. е. $K_j = x_1^{\sigma_1}K$ и $K_l = x_1^{\overline{\sigma}_1}K$, где K — конъюнкция ранга $n-1$);

6) какова бы ни была элементарная конъюнкция K_j, найдется элементарная конъюнкция K_l, отличающаяся от K_j двумя первыми буквами (т. е. $K_j = x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} K$ и $K_l = x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} K$, где K — конъюнкция ранга $n-2$ $(n \geqslant 2)$).

2.18. Найти длину совершенной д. н. ф. функции $f(\widetilde{x}^n)$:

1) $f(\widetilde{x}^n) = \bigvee\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant n} x_i x_j, \quad n \geqslant 2;$

2) $f(\widetilde{x}^n) = \mathop{\&}\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_i \to x_j), \quad n \geqslant 2;$

3) $f(\widetilde{x}^n) = (((x_1 \mid x_2) \mid x_3) \mid \ldots \mid x_{n-1}) \mid x_n, \quad n \geqslant 2;$

4) $f(\widetilde{x}^n) = x_1 \to (x_2 \to (x_3 \to \ldots \to (x_{n-1} \to x_n) \ldots)), \quad n \geqslant 2;$

5) $f(\widetilde{x}^n) = (\ldots ((x_1 \to x_2) \to x_3) \to \ldots x_{n-1}) \to x_n, \quad n \geqslant 2;$

6) $f(\widetilde{x}^n) = (x_1 \vee x_2) \cdot (\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2) \to x_3 \cdot \ldots \cdot x_n, \quad n \geqslant 3;$

7) $f(\widetilde{x}^n) = x_1 x_2 \ldots x_n \oplus x_3 \oplus \ldots \oplus x_n, \quad n \geqslant 3;$

8) $f(\widetilde{x}^n) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee \ldots \vee x_n) \to ((\ldots (x_3 \sim x_4) \sim \ldots \sim x_{n-1}) \sim x_n), \quad n \geqslant 4.$

2.19. Пусть множества $X^m = \{x_1, \ldots, x_m\}$ и $Y^n = \{y_1, \ldots, y_n\}$ не пересекаются. Предполагая, что длины совершенных д. н. ф. функций $f(\widetilde{x}^m)$ и $g(\widetilde{y}^n)$ равны соответственно k и l, найти длины совершенных д. н. ф. следующих функций:

1) $f(\widetilde{x}^m) \vee g(\widetilde{y}^n)$; 2) $f(\widetilde{x}^m) \cdot g(\widetilde{y}^n)$; 3) $f(\widetilde{x}^m) \oplus g(\widetilde{y}^n)$;
4) $f(\widetilde{x}^m) \to g(\widetilde{y}^n)$.

2.20. Найти длину совершенной д. н. ф. функции $f(\widetilde{x}^n) \oplus g(\widetilde{x}^n)$, если известны длины совершенных д. н. ф. следующих функций:

1) $f(\widetilde{x}^n) \cdot g(\widetilde{x}^n)$ и $f(\widetilde{x}^n) \vee g(\widetilde{x}^n)$;
2) $f(\widetilde{x}^n) \to g(\widetilde{x}^n)$ и $g(\widetilde{x}^n) \to f(\widetilde{x}^n)$.

2.21. Доказать, что среди булевых функций, зависящих только от двух переменных x_1 и x_2, причем от каждой из них существенным образом:

1) ровно восемь функций имеют д. н. ф. сложности 2;
2) не существует функций, у которых минимально возможная сложность д. н. ф. равна 3.

3. Полиномы Жегалкина. Элементарная конъюнкция называется *монотонной*, если она не содержит отрицаний переменных. *Константа* 1 (т. е. элементарная конъюнкция нулевого ранга) считается по определению *монотонной* элементарной конъюнкцией. Выражение вида

$$K_1 \oplus K_2 \oplus \ldots \oplus K_s, \tag{15}$$

где K_i $(i = 1, 2, \ldots, s)$ — попарно различные монотонные элементарные конъюнкции над фиксированным множеством переменных (в частности, над множеством X^n, $n \geqslant 1$), называется *полиномом Жегалкина* (или *полиномом по модулю* 2). Рассматривается также полином Жегалкина, соответствующий $s = 0$. Такой полином обозначают через 0 (независимо от множества переменных) и считают по определению, что он равен константе 0. Наибольший из рангов элементарных конъюнкций, входящих в полином, называется *сте-*

пенью этого *полинома*. Степень полинома 0 считается *неопределенной*. Число s называется *длиной полинома* (15). Справедлива следующая

Теорема (И. И. Жегалкин). *Всякая булева функция единственным образом представима в виде полинома Жегалкина.*

Замечание. Здесь единственность понимается с точностью до порядка слагаемых в сумме и порядка сомножителей в конъюнкциях. И в дальнейшем мы считаем одинаковыми полиномы, различающиеся только порядком слагаемых в сумме и/или порядком сомножителей в конъюнкциях.

Указанная единственность представления булевой функции полиномом Жегалкина позволяет применять разнообразные методы построения соответствующих данной функции полиномиальных выражений, заботясь лишь о том, чтобы результирующий полином был *приведенным*, т. е. не содержал одинаковых сомножителей в конъюнкциях и одинаковых слагаемых.

Опишем три метода построения полиномов Жегалкина.

Сначала введем специальную нумерацию монотонных элементарных конъюнкций (э. к.) над множеством переменных $X^n = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Монотонной э. к. K сопоставляем вектор $\widetilde{\sigma}(K) = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ из B^n, в котором $\sigma_i = 1$ тогда и только тогда, когда x_i входит в K. *Номером э. к.* K будем называть число $\nu(\widetilde{\sigma}(K)) = \sum\limits_{i=1}^{n} \sigma_i \cdot 2^{n-i}$. Константа 1 в этой нумерации будет иметь номер 0.

1. *Метод неопределенных коэффициентов.* Пусть $P(\widetilde{x}^n)$ — искомый полином Жегалкина (реализующий заданную функцию $f(\widetilde{x}^n)$). Запишем его в виде

$$P(\widetilde{x}^n) = \beta_0 \cdot 1 \oplus \beta_1 \cdot K_1 \oplus \beta_2 \cdot K_2 \oplus \ldots \oplus \beta_{2^n-1} \cdot K_{2^n-1}, \qquad (16)$$

где K_j — элементарная конъюнкция с номером j ($j = 1, 2, \ldots, 2^n - 1$).

Вектор $\widetilde{\beta}_P = (\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{2^n-1})$ будем в дальнейшем называть *вектором коэффициентов полинома* $P(\widetilde{x}^n)$.

Нам нужно найти неизвестные коэффициенты $\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{2^n-1}$. Поступаем так. Для каждого $\widetilde{\alpha} \in B^n$ составляем уравнение $P(\widetilde{\alpha}) = f(\widetilde{\alpha})$, где $P(\widetilde{\alpha})$ — выражение, получающееся из формулы (16) при $\widetilde{x} = \widetilde{\alpha}$. Это дает систему из 2^n уравнений с 2^n неизвестными; она имеет единственное решение. Решив систему, находим коэффициенты полинома $P(\widetilde{x}^n)$.

2. *Метод, базирующийся на преобразовании вектора значений функции.* Над векторами из B^{2^n} определяется (индукцией по n) операция T.

а) Если $n = 1$ и $\widetilde{\alpha} = (\alpha_0, \alpha_1)$, то $T(\widetilde{\alpha}) = (\alpha_0, \alpha_0 \oplus \alpha_1)$.

б) Предположим, что операция T уже определена для каждого вектора $\widetilde{\sigma}$ из B^{2^n}, и рассмотрим произвольный вектор $\widetilde{\alpha}$ из $B^{2^{n+1}}$. Пусть $\widetilde{\alpha} = (\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{2^n-1}, \gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_{2^n-1})$ и

$$T(\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{2^n-1}) = (\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_{2^n-1}),$$
$$T(\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_{2^n-1}) = (\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{2^n-1})$$

(δ_i и ε_j по индуктивному предположению известны). Полагаем $T(\widetilde{\alpha}) = (\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_{2^n-1}, \delta_0 \oplus \varepsilon_0, \delta_1 \oplus \varepsilon_1, \ldots, \delta_{2^n-1} \oplus \varepsilon_{2^n-1})$.

Мы сейчас покажем, что вектор $\widetilde{\alpha}_f^{2^n}$ значений функции $f(\widetilde{x}^n)$ связан с вектором $\widetilde{\beta}_P$ коэффициентов полинома $P(\widetilde{x}^n)$, реализующего функцию $f(\widetilde{x}^n)$, следующим образом: $\widetilde{\beta}_P = T(\widetilde{\alpha}_f)$ и $\widetilde{\alpha}_f = T(\widetilde{\beta}_P)$.

Сделаем это с помощью индукции по n.

Базис индукции: $n = 1$. Тогда $\widetilde{\alpha}_f = (\alpha_0, \alpha_1)$ и в силу формулы (10) имеем $f(x_1) = \overline{x}_1 f(0) \oplus x_1 f(1) = \alpha_0 \cdot \overline{x}_1 \oplus \alpha_1 \cdot x_1 = \alpha_0 \cdot (x_1 \oplus 1) \oplus \alpha_1 \cdot x_1 = \alpha_0 \cdot 1 \oplus (\alpha_0 \oplus \alpha_1) \cdot x_1$, т.е. $\widetilde{\beta}_P = (\alpha_0, \alpha_0 \oplus \alpha_1) = T(\widetilde{\alpha}_f)$. Обратно, если $\widetilde{\beta}_P = (\beta_0, \beta_1)$, то $P(x_1) = \beta_0 \cdot 1 \oplus \beta_1 \cdot x_1$, а следовательно, $f(0) = P(0) = \beta_0$ и $f(1) = P(1) = \beta_0 \oplus \beta_1$, т.е. $\widetilde{\alpha}_f = T(\widetilde{\beta}_P)$. Базис индукции обоснован.

Индуктивный шаг. Предположим, что утверждение верно для $n = m \geqslant 1$, и установим его справедливость при $n = m + 1$. Пусть вектором значений функции $f(\widetilde{x}^{m+1})$ будет $\widetilde{\alpha}_f = (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{2^m-1}, \alpha_{2^m}, \alpha_{2^m+1}, \ldots, \alpha_{2^{m+1}-1})$. Тогда вектор значений $\overline{x}_1$-компоненты функции $f(\widetilde{x}^{m+1})$ есть $\widetilde{\alpha}_{f_0^1} = (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{2^m-1})$, а вектор значений x_1-компоненты есть $\widetilde{\alpha}_{f_1^1} = (\alpha_{2^m}, \alpha_{2^m+1}, \ldots, \alpha_{2^{m+1}-1})$. (Здесь обе компоненты рассматриваются как функции, зависящие от переменных $x_2, \ldots, x_{m+1}$, и наборы значений этих переменных считаются стандартно упорядоченными — при естественном, по возрастанию номеров индексов, упорядочении самих переменных.) Используя индуктивное предположение, можем написать

$$T\big(\widetilde{\alpha}_{f_0^1}^{2^m}\big) = T((\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{2^m-1})) = (\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_{2^m-1}),$$

$$T\big(\widetilde{\alpha}_{f_1^1}^{2^m}\big) = T((\alpha_{2^m}, \alpha_{2^m+1}, \ldots, \alpha_{2^{m+1}-1})) = (\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{2^m-1}),$$

где $(\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_{2^m-1})$ — вектор коэффициентов полинома $P_0(x_2, \ldots, x_{m+1})$, реализующего $\overline{x}_1$-компоненту f_0^1, а $(\varepsilon_0, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_{2^m-1})$ — вектор коэффициентов полинома $P_1(x_2, \ldots, x_{m+1})$, реализующего x_1-компоненту f_1^1. Применяя формулу (10) и расписывая полиномы P_0 и P_1 в виде (16), имеем

$$f(\widetilde{x}^{m+1}) = \overline{x}_1 f_0^1 \oplus x_1 f_1^1 = \overline{x}_1\big(\delta_0 \cdot \widehat{K}_0 \oplus \delta_1 \cdot \widehat{K}_1 \oplus \ldots \oplus \delta_{2^m-1} \cdot \widehat{K}_{2^m-1}\big) \oplus$$
$$\oplus\, x_1\big(\varepsilon_0 \cdot \widehat{K}_0 \oplus \varepsilon_1 \cdot \widehat{K}_1 \oplus \ldots \oplus \varepsilon_{2^m-1} \cdot \widehat{K}_{2^m-1}\big) = \delta_0 \cdot \widehat{K}_0 \oplus \delta_1 \cdot \widehat{K}_1 \oplus \ldots$$
$$\ldots \oplus \delta_{2^m-1} \cdot \widehat{K}_{2^m-1} \oplus x_1\big((\delta_0 \oplus \varepsilon_0) \cdot \widehat{K}_0 \oplus (\delta_1 \oplus \varepsilon_1) \cdot \widehat{K}_1 \oplus \ldots$$
$$\ldots \oplus \big(\delta_{2^m-1} \oplus \varepsilon_{2^m-1}\big) \cdot \widehat{K}_{2^m-1}\big),$$

где $\widehat{K}_j$ — конъюнкция с номером j ($j = 0, 1, \ldots, 2^m - 1$) над множеством переменных $\{x_2, \ldots, x_{m+1}\}$. Если конъюнкцию $\widehat{K}_j$ рассматривать над множеством $\{x_1, x_2, \ldots, x_{m+1}\}$, то ее номер не изменится, так как в соответствующем ей новом наборе первая координата нулевая. В то же время номер конъюнкции $x_1\widehat{K}_j$ равен $2^m + j$, $j = 0, 1, \ldots, 2^m - 1$. Отсюда следует, что вектор коэффициентов полино-

ма $P(\widetilde{x}^{m+1})$, реализующего функцию $f(\widetilde{x}^{m+1})$, имеет вид $\widetilde{\beta}_P = (\delta_0, \delta_1, \ldots, \delta_{2^m-1}, \delta_0 \oplus \varepsilon_0, \delta_1 \oplus \varepsilon_1, \ldots, \delta_{2^m-1} \oplus \varepsilon_{2^m-1})$, т. е. совпадает с тем, который указан в определении операции T. Итак, установлено, что $\widetilde{\beta}_P = T(\widetilde{\alpha}_f)$. Докажем теперь обратное утверждение, т. е. что $\widetilde{\alpha}_f = T(\widetilde{\beta}_P)$. Пусть $\widetilde{\beta}_P = (\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{2^m-1}, \beta_{2^m}, \beta_{2^m+1}, \ldots, \beta_{2^{m+1}-1})$. Тогда $\widetilde{\beta}_{P_0} = (\beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{2^m-1})$ и $\widetilde{\beta}_{P_1} = (\beta_{2^m}, \beta_{2^m+1}, \ldots, \beta_{2^{m+1}-1})$, где P_0 и P_1 — полиномы, реализующие соответственно $\overline{x}_1$-компоненту f_0^1 и x_1-компоненту f_1^1 функции $f(\widetilde{x}^{m+1})$. Очевидно, что

$$f(0, x_2, \ldots, x_{m+1}) = P(0, x_2, \ldots, x_{m+1}) = \\ = \beta_0 \cdot \widehat{K}_0 \oplus \beta_1 \cdot \widehat{K}_1 \oplus \ldots \oplus \beta_{2^m-1} \cdot \widehat{K}_{2^m-1},$$

$$f(1, x_2, \ldots, x_{m+1}) = P(1, x_2, \ldots, x_{m+1}) = \\ = \beta_{2^m} \cdot \widehat{K}_0 \oplus \beta_{2^m+1} \cdot \widehat{K}_1 \oplus \ldots \oplus \beta_{2^{m+1}-1} \cdot \widehat{K}_{2^m-1},$$

где $\widehat{K}_j$ — конъюнкция с номером j $(j = 0, 1, \ldots, 2^m - 1)$ над множеством переменных $\{x_2, \ldots, x_{m+1}\}$. Воспользовавшись формулой (10), получаем

$$f(\widetilde{x}^{m+1}) = \overline{x}_1 f_0^1 \oplus x_1 f_1^1 = f_0^1 \oplus x_1 \cdot (f_0^1 \oplus f_1^1) =$$

$$= P(0, x_2, \ldots, x_{m+1}) \oplus x_1 (P(0, x_2, \ldots, x_{m+1}) \oplus P(1, x_2, \ldots, x_{m+1})) =$$

$$= \beta_0 \cdot \widehat{K}_0 \oplus \beta_1 \cdot \widehat{K}_1 \oplus \ldots \oplus \beta_{2^m-1} \cdot \widehat{K}_{2^m-1} \oplus x_1((\beta_0 \oplus \beta_{2^m}) \cdot \widehat{K}_0 \oplus$$

$$\oplus (\beta_1 \oplus \beta_{2^m+1}) \cdot \widehat{K}_1 \oplus \ldots \oplus (\beta_{2^m-1} \oplus \beta_{2^{m+1}-1}) \cdot \widehat{K}_{2^m-1}) =$$

$$= \beta_0 \cdot K_0 \oplus \beta_1 \cdot K_1 \oplus \ldots \oplus \beta_{2^m-1} \cdot K_{2^m-1} \oplus (\beta_0 \oplus \beta_{2^m}) \cdot K_{2^m} \oplus$$

$$\oplus (\beta_1 \oplus \beta_{2^m+1}) \cdot K_{2^m+1} \oplus \ldots \oplus (\beta_{2^m-1} \oplus \beta_{2^{m+1}-1}) \cdot K_{2^{m+1}-1},$$

где конъюнкция K_j рассматривается над множеством $\{x_1, x_2, \ldots, x_{m+1}\}$ и при $j = 0, 1, \ldots, 2^m - 1$ совпадает с $\widehat{K}_j$, а при $j = 2^m, 2^m + 1, \ldots, 2^{m+1} - 1$ она равна $x_1 \cdot \widehat{K}_{j-2^m}$. Таким образом, доказано, что $\widetilde{\alpha}_f = T(\widetilde{\beta}_P)$. Утверждение обосновано полностью.

Используя доказанное утверждение, можно описать алгоритм построения вектора $\widetilde{\beta}_P$ коэффициентов полинома $P(\widetilde{x}^n)$, реализующего функцию $f(\widetilde{x}^n)$, имеющую вектор значений $\widetilde{\alpha}_f$.

Пусть $\widetilde{\alpha}_f^{2^n} = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots, \alpha_{2i}, \alpha_{2i+1}, \ldots, \alpha_{2^n-2}, \alpha_{2^n-1})$. Разбиваем вектор $\widetilde{\alpha}_f^{2^n}$ на двумерные наборы:

$$\widetilde{\gamma}_0 = (\alpha_0, \alpha_1), \quad \widetilde{\gamma}_1 = (\alpha_2, \alpha_3), \quad \ldots \\ \ldots, \quad \widetilde{\gamma}_i = (\alpha_{2i}, \alpha_{2i+1}), \quad \ldots, \quad \widetilde{\gamma}_{2^{n-1}-1} = (\alpha_{2^n-2}, \alpha_{2^n-1}).$$

К каждому из них применяем операцию T:

$$T(\widetilde{\gamma}_0) = (\alpha_0, \alpha_0 \oplus \alpha_1), \quad T(\widetilde{\gamma}_1) = (\alpha_2, \alpha_2 \oplus \alpha_3), \quad \ldots, \quad T(\widetilde{\gamma}_i) = \\ = (\alpha_{2i}, \alpha_{2i} \oplus \alpha_{2i+1}), \quad \ldots, \quad T(\widetilde{\gamma}_{2^{n-1}-1}) = (\alpha_{2^n-2}, \alpha_{2^n-2} \oplus \alpha_{2^n-1}).$$

Используя построенные наборы, конструируем такие четырехмерные наборы, которые получаются в результате применения операции T к

четырехмерным наборам, выделяемым из вектора $\widetilde{\alpha}_f^{2^n}$:

$$T(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = T(\widetilde{\gamma}_0, \widetilde{\gamma}_1) = (T(\widetilde{\gamma}_0), T(\widetilde{\gamma}_0) \oplus T(\widetilde{\gamma}_1)), \quad \ldots,$$
$$\ldots, \quad T(\alpha_{4j}, \alpha_{4j+1}, \alpha_{4j+2}, \alpha_{4j+3}) =$$
$$= T(\widetilde{\gamma}_{2j}, \widetilde{\gamma}_{2j+1}) = (T(\widetilde{\gamma}_{2j}), T(\widetilde{\gamma}_{2j}) \oplus T(\widetilde{\gamma}_{2j+1})), \quad \ldots$$
$$\ldots, \quad T(\alpha_{2^n-4}, \alpha_{2^n-3}, \alpha_{2^n-2}, \alpha_{2^n-1}) = T(\widetilde{\gamma}_{2^{n-1}-2}, \widetilde{\gamma}_{2^{n-1}-1}) =$$
$$= (T(\widetilde{\gamma}_{2^{n-1}-2})T(\widetilde{\gamma}_{2^{n-1}-2}) \oplus T(\widetilde{\gamma}_{2^{n-1}-1})).$$

Затем от четырехмерных наборов переходим (аналогичным образом) к восьмимерным и т. д., пока не построим 2^n-мерный набор. Он и будет искомым вектором коэффициентов полинома $P(\widetilde{x}^n)$.

Замечание. Здесь 2^m-мерный вектор изображается многими способами: мы «расщепляем» его на «последовательные» двумерные, четырехмерные, восьмимерные и т. д. наборы. Например, для вектора $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7)$ применяются такие записи: $((\alpha_0, \alpha_1), (\alpha_2, \alpha_3), (\alpha_4, \alpha_5), (\alpha_6, \alpha_7))$, $((\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3), (\alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \alpha_7))$. Сумма $\widetilde{\alpha} \oplus \widetilde{\beta}$ наборов (векторов) одинаковой длины понимается нами обычным образом: это покомпонентная сумма по модулю 2, т. е. $\widetilde{\alpha} \oplus \widetilde{\beta} = (\alpha_1 \oplus \beta_1, \ldots, \alpha_n \oplus \beta_n)$, если $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ и $\widetilde{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$.

3. *Метод, базирующийся на преобразовании формул над множеством связок* $\{\&, -\}$. Строят некоторую формулу Φ над множеством связок $\{\&, -\}$, реализующую заданную функцию f. Затем заменяют всюду подформулы вида $\overline{A}$ на $A \oplus 1$, раскрывают скобки, пользуясь дистрибутивным законом $A \cdot (B \oplus C) = A \cdot B \oplus A \cdot C$, и применяют эквивалентности $A \cdot A = A$, $A \cdot 1 = A$, $A \oplus A = 0$ и $A \oplus 0 = A$.

Пример 11. Методом неопределенных коэффициентов построить полином Жегалкина для функции $f(x, y) = x \vee y$.

Решение. $P(x, y) = \beta_0 \oplus \beta_1 \cdot x \oplus \beta_2 \cdot y \oplus \beta_3 \cdot xy$. Выписываем систему уравнений для коэффициентов $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3$:

$$f(0, 0) = 0 = \beta_0 \oplus \beta_1 \cdot 0 \oplus \beta_2 \cdot 0 \oplus \beta_3 \cdot 0,$$
$$f(0, 1) = 1 = \beta_0 \oplus \beta_1 \cdot 0 \oplus \beta_2 \cdot 0 \oplus \beta_3 \cdot 0,$$
$$f(1, 0) = 1 = \beta_0 \oplus \beta_1 \cdot 1 \oplus \beta_2 \cdot 0 \oplus \beta_3 \cdot 0,$$
$$f(1, 1) = 1 = \beta_0 \oplus \beta_1 \cdot 0 \oplus \beta_2 \cdot 1 \oplus \beta_3 \cdot 1.$$

Решая эту систему, получаем $\beta_0 = 0$, $\beta_1 = \beta_2 = \beta_3 = 1$. Следовательно, $x \vee y = xy \oplus x \oplus y$.

Пример 12. Преобразуя вектор значений функции, построить полином Жегалкина для функции $f(\widetilde{x}^3) = x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3$.

Решение. Имеем $\widetilde{\alpha}_f = (00010111)$. Разбиваем этот вектор на «последовательные» двумерные наборы: $\widetilde{\gamma}_0 = (0, 0)$, $\widetilde{\gamma}_1 = (0, 1)$, $\gamma_2 = (0, 1)$, $\widetilde{\gamma}_3 = (1, 1)$. Затем последовательно применяем операцию T к соответствующим векторам:

$$T(\widetilde{\gamma}_0) = (0, 0 \oplus 0) = (0, 0), \quad T(\widetilde{\gamma}_1) = (0, 0 \oplus 1) = (0, 1),$$
$$T(\widetilde{\gamma}_2) = (0, 0 \oplus 1) = (0, 1), \quad T(\widetilde{\gamma}_3) = (1, 1 \oplus 1) = (1, 0);$$

$T(\widetilde{\gamma}_0, \widetilde{\gamma}_1) = (T(\widetilde{\gamma}_0), T(\widetilde{\gamma}_0) \oplus T(\widetilde{\gamma}_1)) =$
$= ((0, 0), (0, 0) \oplus (0, 1)) = (0, 0, 0, 1),$
$T(\widetilde{\gamma}_2, \widetilde{\gamma}_3) = (T(\widetilde{\gamma}_2), T(\widetilde{\gamma}_2) \oplus T(\widetilde{\gamma}_3)) =$
$= ((0, 1), (0, 1) \oplus (1, 0)) = (0, 1, 1, 1);$
$T(\widetilde{\alpha}_f) = T(\widetilde{\gamma}_0, \widetilde{\gamma}_1, \widetilde{\gamma}_2, \widetilde{\gamma}_3) = (T(\widetilde{\gamma}_0, \widetilde{\gamma}_1), T(\widetilde{\gamma}_0, \widetilde{\gamma}_1) \oplus T(\widetilde{\gamma}_2, \widetilde{\gamma}_3)) =$
$= ((0, 0, 0, 1), (0, 0, 0, 1) \oplus (0, 1, 1, 1)) = (0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 0) = \widetilde{\beta}_P.$
Таким образом,
$P(\widetilde{x}^3) = 0 \cdot K_0 \oplus 0 \cdot K_1 \oplus 0 \cdot K_2 \oplus 1 \cdot K_3 \oplus 0 \cdot K_4 \oplus 1 \cdot K_5 \oplus$
$\oplus 1 \cdot K_6 \oplus 0 \cdot K_7 = x_2x_3 \oplus x_1x_3 \oplus x_1x_2.$

Пример 13. Представив функцию $f(x, y) = x \to y$ формулой над множеством связок $\{\&, -\}$, преобразовать затем полученную формулу в полином Жегалкина.

Решение. Имеем $x \to y = \overline{x} \vee y = \overline{\overline{x} \cdot \overline{y}} = \overline{x \cdot \overline{y}} = x \cdot (y \oplus 1) \oplus 1 =$
$= xy \oplus x \oplus 1.$

Пример 14. На скольких наборах из B^n обращается в 1 полином $P(\widetilde{x}^n) = \bigoplus\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant n} x_ix_j$ $(n \geqslant 2)$?

Решение. Данный полином можно записать в следующем виде:
$P(\widetilde{x}^n) = x_1x_2 \oplus (x_1 \oplus x_2) \cdot x_3 \oplus \ldots \oplus (x_1 \oplus \ldots \oplus x_{n-2}) \cdot x_{n-1} \oplus$
$\oplus (x_1 \oplus \ldots \oplus x_{n-1}) \cdot x_n.$

В силу симметричности вхождения в него всех переменных достаточно рассмотреть наборы вида $(\underbrace{1, \ldots, 1}_{i}, 0, \ldots, 0)$, $0 \leqslant i \leqslant n$ (при $i = 0$ это будет нулевой набор $\widetilde{0} = (0, 0, \ldots, 0)$). Если $x_{i+1} = \ldots$ $\ldots = x_n = 0$, то $P(x_1, \ldots, x_i, 0, \ldots, 0) = x_1 \cdot x_2 \oplus (x_1 \oplus x_2) \,\&\, x_3 \oplus \ldots$ $\ldots \oplus (x_1 \oplus \ldots \oplus x_{i-1}) \cdot x_i$; здесь число произведений вида x_kx_l равно, очевидно, $\binom{i}{2}$ $(2 \leqslant i \leqslant n)$, а при $i = 1$ и $i = 0$ таких произведений нет. Значит, $P(\underbrace{1, \ldots, 1}_{i}, 0, \ldots, 0)$ равно 0 или 1 в зависимости от того, четно или нечетно число $\binom{i}{2}$ (при $i = 1$ и $i = 0$ значение полинома на соответствующем наборе есть 0). Выясним теперь, при каких i число $\binom{i}{2}$ является нечетным. Если $i = 4k$ или $i = 4k + 1$ $(k \geqslant 1)$, то $\binom{i}{2}$ равно $2k \cdot (4k - 1)$ или $(4k + 1) \cdot 2k$ соответственно, а если $i = 4k + 2$ или $i = 4k + 3$ $(k \geqslant 0)$, то $\binom{i}{2}$ равно $(2k + 1)(4k + 1)$ или $(4k + 3)(2k + 1)$. Следовательно, число $\binom{i}{2}$ является нечетным только тогда, когда $i = 2, 3, 6, 7, \ldots, 4k + 2, 4k + 3, \ldots$ Учитывая этот факт, заключаем, что число наборов, на которых полином $P(\widetilde{x}^n)$ обращается в 1, равно

$$\sum_{k=0}^{[(n-2)/4]} \binom{n}{4k+2} + \sum_{k=0}^{[(n-3)/4]} \binom{n}{4k+3}.$$

В частности, если $n = 2$, то существует только один такой набор $\Big($в этом случае вторая сумма вырождается в нуль: $\sum\limits_{k=0}^{-1} \binom{2}{4k+3} = 0\Big)$, а если $n = 3$, то таких наборов четыре

$$\left(\sum_{k=0}^{0} \binom{3}{4k+2} + \sum_{k=0}^{0} \binom{3}{4k+3} = \binom{3}{2} + \binom{3}{3} = 3 + 1 = 4\right).$$

2.22. Методом неопределенных коэффициентов найти полиномы Жегалкина для следующих функций:

1) $f(\widetilde{x}^2) = x_1 \mid x_2$; 2) $f(\widetilde{x}^2) = (0100)$; 3) $f(\widetilde{x}^3) = x_1(x_2 \vee \overline{x}_3)$;

4) $f(\widetilde{x}^3) = x_1 \to (x_2 \to x_3)$; 5) $f(\widetilde{x}^3) = (01101001)$;

6) $f(\widetilde{x}^3) = (10001110)$; 7) $f(\widetilde{x}^3) = (00000111)$;

8) $f(\widetilde{x}^3) = (01100110)$; 9) $f(\widetilde{x}^4) = (1000000000000001)$;

10) $f(\widetilde{x}^4) = (0000100010010000)$.

2.23. Преобразуя вектор значений функции $f(\widetilde{x}^n)$, построить полином Жегалкина для этой функции, если:

1) $f(\widetilde{x}^2) = (1000)$; 2) $f(\widetilde{x}^2) = (0010)$;

3) $f(\widetilde{x}^3) = (01101110)$; 4) $f(\widetilde{x}^3) = (01110011)$;

5) $f(\widetilde{x}^3) = (10101110)$; 6) $f(\widetilde{x}^3) = (10000100)$;

7) $f(\widetilde{x}^4) = (0000010001100111)$; 8) $f(\widetilde{x}^4) = (1010101010110110)$;

9) $f(\widetilde{x}^4) = (0100000000010001)$; 10) $f(\widetilde{x}^4) = (0000000100010001)$.

2.24. Представив функцию $f(\widetilde{x}^n)$ формулой над множеством связок $\{\&, -\}$, преобразовать затем полученную формулу в полином Жегалкина функции $f(\widetilde{x}^n)$ (используя эквивалентности $\overline{A} = A \oplus 1$, $A \cdot (B \oplus C) = A \cdot B \oplus A \cdot C$, $A \cdot A = A$, $A \cdot 1 = A$, $A \oplus A = 0$ и $A \oplus \oplus 0 = A$):

1) $f(\widetilde{x}^2) = x_1 \to (x_2 \to \overline{x}_1 x_2)$; 2) $f(\widetilde{x}^2) = x_1 \cdot (x_2 \sim x_1 \overline{x}_2)$;

3) $f(\widetilde{x}^3) = (x_1 \downarrow x_2) \mid (x_2 \downarrow x_3)$; 4) $f(\widetilde{x}^3) = (x_1 \vee x_2) \cdot (x_2 \mid x_3)$;

5) $f(\widetilde{x}^3) = x_1 \downarrow ((x_1 \to \overline{x}_2) \vee \overline{x}_3)$;

6) $f(\widetilde{x}^3) = (x_1 \to (x_2 \to x_3)) \cdot ((x_1 \to x_2) \to x_3)$;

7) $f(\widetilde{x}^3) = (x_1 \oplus x_2) \vee (x_2 \downarrow x_3)$;

8) $f(\widetilde{x}^4) = (x_1 \to x_2) \to (x_3 \to x_1 x_4)$;

9) $f(\widetilde{x}^4) = x_1 \vee (x_2 \to ((x_3 \to x_2) \to x_4))$;

10) $f(\widetilde{x}^4) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3)\, x_4 \vee x_1 x_2 x_3$.

2.25. Показать, что x_i является существенной переменной функции $f(\widetilde{x}^n)$ тогда и только тогда, когда x_i явно входит в полином Жегалкина этой функции.

2.26. Найти число:

1) монотонных элементарных конъюнкций ранга r над множеством переменных $X^n = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ $(0 \leqslant r \leqslant n)$;

2) полиномов Жегалкина степени r над множеством переменных X^n $(0 \leqslant r \leqslant n)$;

3) полиномов Жегалкина степени r над множеством X^n, обращающихся в 1 на наборе $\widetilde{1}$ $(0 \leqslant r \leqslant n)$;

4) полиномов Жегалкина длины k над множеством X^n, обращающихся в 0 на наборах $\widetilde{0}$ и $\widetilde{1}$ $(0 \leqslant k < 2^n)$;

5) полиномов Жегалкина степени r над множеством X^n, удовлетворяющих условию: в полиноме не могут содержаться одновременно (в качестве слагаемых) конъюнкции одинакового ранга $(0 \leqslant r \leqslant n)$.

2.27. Выяснить, на скольких наборах из B^n обращается в 1 полином $P(\widetilde{x}^n)$:

1) $P(\widetilde{x}^n) = x_1 \cdot x_2 \oplus x_1 \cdot x_3 \oplus \ldots \oplus x_1 \cdot x_n = \bigoplus\limits_{i=2}^{n} x_1 x_i, \quad n \geqslant 2;$

2) $P(\widetilde{x}^n) = x_1 \cdot x_2 \oplus x_3 \oplus \ldots \oplus x_n = x_1 x_2 \oplus \bigoplus\limits_{i=3}^{n} x_i, \quad n \geqslant 3;$

3) $P(\widetilde{x}^n) = x_1 \cdot x_2 \oplus x_1 \cdot x_3 \oplus x_4 \oplus \ldots \oplus x_n = x_1 x_2 \oplus x_1 x_3 \oplus \bigoplus\limits_{i=4}^{n} x_i, \quad n \geqslant 4;$

4) $P(\widetilde{x}^n) = x_1 x_2 x_3 \oplus \bigoplus\limits_{i=4}^{n} x_i, \quad n \geqslant 4;$

5) $P(\widetilde{x}^n) = x_1 \ldots x_k \oplus x_{k+1} \ldots x_n, \quad 1 \leqslant k < n;$

6) $P(\widetilde{x}^n) = \bigoplus\limits_{i=1}^{n} x_1 \ldots x_i \oplus 1, \quad n \geqslant 1;$

7) $P(\widetilde{x}^n) = \bigoplus\limits_{i=1}^{n} x_1 \ldots x_{i-1} x_{i+1} \ldots x_n, \quad n \geqslant 2;$

8) $P(\widetilde{x}^n) = x_1 \oplus \bigoplus\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant n} x_i x_j, \quad n \geqslant 2;$

9) $P(\widetilde{x}^n) = \bigoplus\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant n} x_i x_j \oplus \bigoplus\limits_{i=1}^{n} x_i, \quad n \geqslant 2.$

2.28. Найти функцию $f(\widetilde{x}^n)$, у которой длина полинома Жегалкина в 2^n раз превосходит длину ее совершенной д. н. ф. $(n \geqslant 1)$.

2.29. Доказать, что функция $f(\widetilde{x}^n)$, реализуемая полиномом Жегалкина степени $k > 0$, принимает каждое из значений 0 и 1 не менее чем на 2^{n-k} наборах из B^n (т. е. $|N_f| \geqslant 2^{n-k}$ и $|N_{\overline{f}}| \geqslant 2^{n-k}$).

2.30. Доказать, что для всякого l $(0 \leqslant l \leqslant 2^n)$ существует полином Жегалкина $P(\widetilde{x}^n)$, обращающийся в 1 ровно на l наборах из B^n и имеющий длину, не превосходящую n.

2.31. Показать, что всякая булева функция $f(\widetilde{x}^n)$, отличная от константы 0, представима в виде $\bigoplus\limits_{i=1}^{s} K_i$, где K_i $(i = 1, \ldots, s)$ — различные элементарные конъюнкции, каждая из которых содержит не более одного отрицания переменной, а $s \leqslant 2^{n-1}$.

2.32. Пусть функция $f(\widetilde{x}^n)$, где $n \geqslant 3$, зависит существенно от всех своих переменных и реализуется полиномом Жегалкина степени n. Доказать, что найдутся две такие переменные, отождествление которых уменьшает число существенных переменных ровно на 1.

Глава II

ЗАМКНУТЫЕ КЛАССЫ И ПОЛНОТА СИСТЕМ ФУНКЦИЙ АЛГЕБРЫ ЛОГИКИ

§ 1. Понятия функциональной замкнутости и полноты

Замыканием $[K]$ множества K функций алгебры логики называется совокупность всех функций из P_2, являющихся суперпозициями функций из множества K. Множество K называется (*функционально*) *замкнутым*, если $[K] = K$. Замкнутые множества называются также *замкнутыми классами*. Подмножество P функций из замкнутого множества K называется (*функционально*) *полным в* K, если $[P] = K$. Полное в замкнутом классе K множество P называется *базисом класса* K, если для всякого собственного подмножества $P' \subset P$ выполнено $[P'] \neq K$. Подмножество P функций из замкнутого класса K называется *предполным классом* в K, если $[P] \neq K$ и для всякой функции $f \in K \setminus P$ выполняется равенство $[P \cup \{f\}] = K$.

Функции f_1 и f_2 назовем *конгруэнтными*, если одна из них может быть получена из другой заменой переменных (без отождествления). Например, функции $x\overline{y}$ и $y\overline{z}$ конгруэнтны, а функции xy и zz не являются конгруэнтными. При рассмотрении вопросов, связанных с замкнутыми классами, бывает удобно указывать по одному представителю из множества попарно конгруэнтных функций. Например, класс $\{x, y, z, \ldots, x_1, x_2, \ldots\}$, состоящий из всех тождественных функций, будет обозначаться через $\{x\}$.

Если A — некоторое множество функций, то через $A(X^n)$ или, короче, через A^n будет обозначаться множество всех тех функций из A, которые зависят только от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

1.1. Построить множество всех функций, зависящих от переменных x_1, x_2 и принадлежащих замыканию множества A:

1) $A = \{\overline{x}\}$; 2) $A = \{x_1 \oplus x_2\}$; 3) $A = \{0, \overline{x}\}$; 4) $A = \{x_1 x_2\}$;
5) $A = \{x_1x_2 \vee x_2x_3 \vee x_3x_1\}$; 6) $A = \{\overline{x}_1 \vee x_2\}$;
7) $A = \{0, x_1 \sim x_2\}$; 8) $A = \{x_1x_2, x_1 \oplus x_2\}$;
9) $A = \{x_1 \oplus x_2 \oplus x_3\}$; 10) $A = \{x_1x_2 \vee x_2\overline{x}_3 \vee \overline{x}_3x_1\}$;
11) $A = \{x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus 1\}$; 12) $A = \{x_1\overline{x}_2\}$;

13) $A = \{\overline{x}_1\overline{x}_2 \vee \overline{x}_2x_3 \vee x_3\overline{x}_1\}$; 14) $A = \{x_1 \vee x_2 \vee x_3\}$;
15) $A = \{x_1x_2 \vee x_3\}$.

1.2. Показать, что $f \in [A]$, выразив f формулой над множеством A:

1) $f = \overline{x}$, $A = \{0, x \to y\}$; 2) $f = x \oplus y$, $A = \{x \downarrow y\}$;
3) $f = x$, $A = \{x \oplus y\}$; 4) $f = x \oplus y \oplus z$, $A = \{x \sim y\}$;
5) $f = 0$, $A = \{xy \oplus z\}$; 6) $f = x$, $A = \{xy\}$;
7) $f = x \vee y$, $A = \{\overline{x} \vee \overline{y}\}$; 8) $f = x$, $A = \{xy \vee yz \vee zx\}$;
9) $f = xy$, $A = \{xy \oplus z\}$;
10) $f = xyz \vee t(x \vee y \vee z)$, $A = \{xy \vee yz \vee zx\}$;
11) $f = x \oplus y \oplus z$, $A = \{\overline{x}, xy \vee yz \vee zx\}$;
12*) $f = x \oplus y \oplus z$, $A = \{xy \vee y\overline{z} \vee \overline{z}x\}$;
13) $f = x \oplus y$, $A = \{x\overline{y}, x \vee \overline{y}\}$; 14) $f = x \vee y$, $A = \{x \to y\}$;
15) $f = xy$, $A = \{x \vee y, x \oplus y\}$.

1.3. Выписать все попарно неконгруэнтные функции $f(\widetilde{x}^3)$, принадлежащие замыканию множества A:

1) $A = \{1, \overline{x}\}$; 2) $A = \{xy\}$; 3) $A = \{x \sim y\}$;
4) $A = \{xy \vee yz \vee zx\}$; 5) $A = \{x \oplus y \oplus z \oplus 1\}$;
6) $A = \{x \vee y \vee z\}$; 7) $A = \{x \to y\}$; 8) $A = \{xy \vee z\}$;
9) $A = \{x\overline{y}\}$; 10) $A = \{x(x \vee \overline{y})(\overline{y} \vee \overline{z})(\overline{z} \vee x)\}$.

1.4. Из полной для класса $[A]$ системы выделить базис:

1) $A = \{0, 1, \overline{x}\}$; 2) $A = \{x \oplus y, x \sim y, 1\}$;
3) $A = \{x, x \oplus y, x \oplus y \oplus z\}$; 4) $A = \{xy, x \vee y, xy \vee z\}$;
5) $A = \{x \vee y, x \to y\}$; 6) $A = \{x\overline{y}, xy\}$;
7) $A = \{x \oplus y \oplus z, x\overline{y} \vee \overline{y}\,\overline{z} \vee \overline{z}x, \overline{x}\}$;
8) $A = \{1, x \sim y, x \oplus y \oplus z \oplus 1\}$; 9) $A = \{xy, xy \vee \overline{x}z\}$;
10) $A = \{x, x \vee y, x \vee y \vee z, xy \vee z\}$.

1.5. Выяснить, какие из указанных ниже множеств являются замкнутыми множествами:

1) множество всех функций от одной переменной;
2) множество всех функций от двух переменных;
3) множество всех функций $f(x_1, x_2, \dots x_n)$ таких, что $f(1, 1, \dots \dots, 1) = 1$, $n \geqslant 0$;
4) множество всех функций $f(\widetilde{x}^n)$, $n \geqslant 0$, таких, что $f(1, 1, \dots \dots, 1) = 0$;
5) множество всех симметрических функций, т. е. таких функций $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, что для любой подстановки $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}$ справедливо равенство $f(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_n})$;
6) множество всех функций $f(\widetilde{x}^n)$ таких, что $|N_f| = 2^{n-1}$;
7) множество всех функций, выражаемых полиномом Жегалкина не выше первой степени;

8) множество всех функций, выражаемых полиномом Жегалкина не выше второй степени;

9) множество всех функций, допускающих представление в виде д. н. ф. и не содержащих отрицаний переменных;

10) множество всех функций, любая д. н. ф. которых содержит хотя бы одно отрицание переменной;

11) множество всех функций $f(\widetilde{x}^n)$, $n \geqslant 0$, полином Жегалкина которых содержит $2^n - 1$ слагаемых;

12) множество всех функций $f(\widetilde{x}^n)$, $n \geqslant 0$, полином Жегалкина которых содержит $2^n - 1$ слагаемых и не содержит 1 в качестве слагаемого;

13) множество всех функций $f(\widetilde{x}^n)$, $n \geqslant 1$, таких, что $|N_f| = 1$;

14) множество всех функций $f(\widetilde{x}^n)$, $n \geqslant 1$, таких, что $|N_f| = 1$ и $f(1, 1, \ldots, 1) = 0$.

1.6. Доказать, что:

1) пересечение замкнутых классов является замкнутым классом;

2) объединение двух замкнутых классов, вообще говоря, не является замкнутым классом;

3) разность двух замкнутых классов, вообще говоря, не является замкнутым классом;

4) дополнение непустого и отличного от P_2 замкнутого класса K до P_2 не является замкнутым.

1.7. Доказать, что класс A, предполный в замкнутом классе K, является замкнутым.

1.8. Обосновать следующие свойства замыкания:

1) $[[K]] = [K]$; 2) из $K_1 \subseteq K_2$ вытекает $[K_1] \subseteq [K_2]$;

3) $[K_1 \cap K_2] \subseteq [K_1] \cap [K_2]$; 4) $[K_1] \cup [K_2] \subseteq [K_1 \cup K_2]$; 5) $[\varnothing] = \varnothing$.

1.9. Выяснить, является ли множество A замкнутым классом. Предполагается, что вместе с каждой функцией f из A множеству A принадлежат и все функции из P_2, конгруэнтные f:

1) $A = \{0, 1\}$; 2) $A = \{\overline{x}\}$; 3) $A = \{x, \overline{x}\}$; 4) $A = \{1, \overline{x}\}$;

5) $A = \{x_1 \cdot \ldots \cdot x_n,\ n = 1, 2, \ldots\}$;

6) $A = \{x_1 \oplus \ldots \oplus x_n,\ n = 1, 2, \ldots\}$;

7) $A = \{0, x_1 \vee \ldots \vee x_n,\ n = 1, 2, \ldots\}$;

8) $A = \{x_1 \oplus \ldots \oplus x_{2n-1},\ n = 1, 2, \ldots\}$;

9) $A = \{0, x_1 \oplus \ldots \oplus x_{2n-1},\ n = 1, 2, \ldots\}$;

10) $A = \{0, 1, x_1 \oplus \ldots \oplus x_n \oplus \sigma,\ \sigma \in \{0, 1\},\ n = 1, 2, \ldots\}$.

1.10. 1) Перечислить все замкнутые классы $K \subseteq P_2$ такие, что число попарно не равных функций в K конечно.

2) Перечислить все замкнутые классы $K \subseteq P_2$ такие, что число попарно неконгруэнтных функций конечно.

3) Указать множество $A \subseteq P_2$ такое, что для каждого $n \geqslant 1$ число функций из $[A]$, существенно зависящих от переменных $x_1, \ldots, x_n$, равно: а) 1; б) 2.

1.11. 1) Доказать, что если замкнутый класс в P_2 содержит функцию, существенно зависящую от $n \geqslant 2$ переменных, то он содержит бесконечно много попарно неконгруэнтных функций.

2) Верно ли, что если замкнутый класс K содержит функцию, существенно зависящую от $n \geqslant 2$ переменных, то для всякого $m \geqslant n$ он содержит функцию, существенно зависящую от m переменных?

1.12. Сведением к заведомо полным системам в P_2 показать, что множество A является полной системой в P_2:

1) $A = \{x \downarrow y\}$; 2) $A = \{xy \oplus z,\ (x \sim y) \oplus z\}$;
3) $A = \{x \to y,\ \overline{x \oplus y \oplus z}\}$; 4) $A = (x \to y,\ f = (01011110)\}$;
5) $A = \{0,\ m(\widetilde{x}^3) = x_1x_2 \vee x_2x_3 \vee x_3x_1,\ x \oplus y \oplus 1\}$;
6) $A = \{x \sim y,\ x \oplus y,\ xy \oplus z\}$; 7) $A = \{xy \vee \overline{x}\,\overline{z},\ f = (01111110)\}$;
8) $A = \{xy \oplus zt \oplus 1,\ f = (10110110)\}$;
9) $A = \{0,\ 1,\ x \oplus y \oplus z,\ xy \oplus zx \oplus zy\}$; 10) $A = \{\overline{x}\,\overline{y} \vee z,\ x \oplus y\}$.

1.13. Выяснить, какое из отношений $\subseteq$, $\supseteq$, $=$, $\begin{smallmatrix}\not\supseteq\\ \not\subseteq\end{smallmatrix}$ выполняется для множеств K_1, K_2 из P_2 (отношение $\begin{smallmatrix}\not\supseteq\\ \not\subseteq\end{smallmatrix}$ означает, что не выполнено ни одно из отношений $\subseteq$, $\supseteq$, $=$):

1) $K_1 = [A_1 \cap A_2]$, $K_2 = [A_1] \cap [A_2]$;
2) $K_1 = [A_1 \backslash A_2]$, $K_2 = [A_1] \backslash [A_2]$;
3) $K_1 = [A_1 \cup (A_2 \cap A_3)]$, $K_2 = [A_1 \cup A_2] \cap [A_1 \cup A_3]$;
4) $K_1 = [A_1 \backslash A_2]$, $K_2 = [A_1] \backslash [A_1 \cap A_2]$.

1.14. Привести примеры замкнутых классов K_1, K_2 из P_2 таких, что $K_1 \subseteq K_2$, и таких, что:

1) $K_1 \cap K_2 = \varnothing$, $K_2 \backslash K_1 \neq \varnothing$, $[K_1 \cup K_2] = K_1 \cup K_2$;
2) $K_1 \cap K_2 \neq \varnothing$, $K_2 \backslash K_1 \neq \varnothing$, $[K_1 \cup K_2] = K_1 \cup K_2$;
3) $K_1 \supset K_2$, $[K_1 \backslash K_2] = K_1 \backslash K_2$;
4) $K_1 \cap K_2 \neq \varnothing$, $K_2 \backslash K_1 \neq \varnothing$, $[K_1 \backslash K_2] = K_1 \backslash K_2$;
5) $K_1 \cap K_2 \neq \varnothing$, $K_2 \backslash K_1 \neq \varnothing$, $[K_1 \oplus K_2] = K_1 \oplus K_2$.

1.15. Перечислить все предполные классы замкнутого класса:

1) $K = [0,\ \overline{x}]$; 2) $K = [0,\ 1]$; 3) $K = [xy]$; 4) $K = [x \oplus y]$;
5) $K = [0,\ x \vee y]$; 6) $K = [1,\ xy]$; 7) $K = [x \oplus y \oplus z]$;
8) $K = [x \oplus y,\ 1]$.

1.16. Доказать, что для любого замкнутого класса $K \subseteq P_2$ выполнено равенство $[K \cup \{x\}] = K \cup \{x\}$.

1.17. Доказать, что каждый предполный в P_2 класс содержит тождественную функцию.

1.18. Доказать, что всякий замкнутый класс в P_2, содержащий функцию, отличную от константы, содержит и функцию x.

1.19. Доказать, что множество P_2 всех функций алгебры логики не представимо в виде объединения непустых попарно непересекающихся замкнутых классов.

1.20. Доказать, что если замкнутый класс P_2 имеет конечный базис, то всякий базис этого класса конечен.

1.21. Доказать, что если непустой замкнутый класс в P_2 отличен от множеств, состоящих из одних констант, то его нельзя расширить до базиса в P_2.

1.22. Доказать, что в замкнутом классе $[x \to y]$ содержатся только такие функции из P_2, которые могут быть представлены (с точностью до обозначения переменных) в виде $x_i \vee f(\widetilde{x}^n)$, где $f(\widetilde{x}^n) \in P_2$.

1.23. Пусть функция $f(\widetilde{x}^n)$ принадлежит множеству $[x \to y]$ и зависит существенно не менее чем от двух переменных. Доказать, что $|N_f| > 2^{n-1}$.

§ 2. Класс самодвойственных функций

Функция $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется *самодвойственной*, если $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f^*(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, или, что то же самое, если

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \overline{f}(\overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n).$$

Из этого определения вытекает, что функция является самодвойственной тогда и только тогда, когда на любых двух противоположных наборах значений переменных она принимает противоположные значения. Класс самодвойственных функций будет обозначаться через S. Из определения S вытекает, что $|S^n| = 2^{2^n-1}$.

Справедливо следующее утверждение, называемое обычно *леммой о несамодвойственной функции*: если функция $f(\widetilde{x}^n)$ не является самодвойственной, то, подставляя на места ее переменных функции x и $\overline{x}$, можно получить константу.

Если A — некоторое множество функций из P_2, то через A^* будет обозначаться множество всех функций, двойственных к функциям из множества A. Множество A^* называется *двойственным к множеству* A. Если $A^* = A$, то множество A называется *самодвойственным*.

Пример 1. Выяснить, является ли самодвойственной функция f, заданная вектором: а) $\widetilde{\alpha}_f = (10110100)$; б) $\widetilde{\alpha}_f = (10110010)$.

Решение. Из определения самодвойственной функции вытекает, что на противоположных наборах она принимает противоположные значения. Поэтому вектор $\widetilde{\alpha}_f$ самодвойственной функции $f(\widetilde{x}^n)$ имеет вид

$$\widetilde{\alpha}_f = (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{2^{n-1}-1}, \overline{\alpha}_{2^{n-1}-1}, \ldots, \overline{\alpha}_1, \overline{\alpha}_0).$$

Таким образом, чтобы выяснить, является ли функция $f(\widetilde{x}^n)$, задаваемая вектором $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{2^n-1})$, самодвойственной, следует проверить, получается ли вторая половина вектора из первой путем отражения и последующей расстановки отрицаний над координатами.

В рассматриваемом примере вектор $\widetilde{\alpha}_f$ задает самодвойственную функцию в случае б) и несамодвойственную в случае а).

Пример 2. При каких n функция

$$f = \mathop{\&}_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_{\rfloor n/2 \lfloor} \leqslant n} (x_{i_1} \vee x_{i_2} \vee \ldots \vee x_{i_{\rfloor n/2 \lfloor}})$$

является самодвойственной?

Р е ш е н и е. Заметим, что множество $N_{\overline{f}}$, наборов $\widetilde{\alpha}$ таких, что $f(\widetilde{\alpha}) = 0$, состоит из всех наборов веса не выше $n-]n/2[= [n/2]$. Пусть n четно, тогда $B^n_{n/2} \subseteq N_f$. Пусть $\widetilde{\alpha}$ — произвольный набор из $B^n_{n/2}$. Противоположный набор $\overline{\widetilde{\alpha}}$ также принадлежит множеству $B^n_{n/2}$. Таким образом, $f(\widetilde{\alpha}) = f(\overline{\widetilde{\alpha}}) = 0$, что противоречит самодвойственности. Следовательно, при четных n функция $f(\widetilde{x}^n)$ не является самодвойственной. Пусть теперь n нечетно. Тогда $N_{\overline{f}} = \bigcup\limits_{i=0}^{[n/2]} B^n_i$, $N_f = \bigcup\limits_{i=]n/2[}^{n} B^n_i$. Очевидно, что $\widetilde{\alpha} \in N_{\overline{f}}$ тогда и только тогда, когда $\overline{\widetilde{\alpha}} \in N_f$. Это и означает, что $f(\widetilde{x}^n) \in S$ при нечетных n.

П р и м е р 3. Какие из переменных несамодвойственной функции $f(\widetilde{x}^3)$, задаваемой вектором $\widetilde{\alpha}_f = (01101101)$, следует заменить на x, а какие на $\overline{x}$ с тем, чтобы получить константу?

Р е ш е н и е. Поскольку $f(\overline{x}^3) \in S$, то существует пара противоположных наборов, на которых функция принимает одно и то же значение. Такими наборами являются в данном случае (010) и (101), причем $f(010) = f(101) = 1$. Если заменить x_1 и x_3 на x, а x_2 на $\overline{x}$ (или x_1 и x_3 на $\overline{x}$, а x_2 на x), то получим $f(x, \overline{x}, x) = f(\overline{x}, x, \overline{x}) = 1$.

2.1. Выяснить, является ли функция f самодвойственной:

1) $f = x_1x_2 \vee x_2x_3 \vee x_3x_1$; 2) $f = x_1 \vee x_2$; 3) $f = x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus 1$;
4) $f = (x \vee \overline{y} \vee z)t \vee x\overline{y}z$; 5) $f = (x \vee \overline{y} \vee z)t \vee xyz$;
6) $f = (x_1 \to x_2)$; 7) $f(x_1 \oplus x_2)$;
8) $f = x_1x_2 \oplus x_2x_3 \oplus x_3x_1 \oplus x_2 \oplus x_3$; 9) $f = x_1x_2 \vee x_3$;
10) $f = x_1 \oplus x_2 \oplus (x_1x_2 \vee x_2x_3 \vee x_3x_1)$; 11) $f = x_1x_2 \oplus x_3(x_1 \vee x_2)$;
12) $f = x_1x_2x_3 \oplus x_1x_2 \oplus x_2x_3 \oplus x_3x_1$;
13) $f = x_1x_2x_3 \oplus x_1x_2\overline{x}_3 \oplus x_2x_3 \oplus x_1x_3$;
14) $f = (x_1 \to x_2) \oplus (x_2 \to x_3) \oplus (x_3 \to x_1) \oplus x_3$;
15) $f = (x_1 \to x_2) \oplus (x_2 \to x_3) \oplus (x_2 \to x_1)$.

2.2. Выяснить, является ли самодвойственной функция f, заданная векторно:

1) $\widetilde{\alpha}_f = (1010)$; 2) $\widetilde{\alpha}_f = (1001)$; 3) $\widetilde{\alpha}_f = (10010110)$;
4) $\widetilde{\alpha}_f = (01100110)$; 5) $\widetilde{\alpha}_f = (01110001)$; 6) $\widetilde{\alpha}_f = (01001101)$;
7) $\widetilde{\alpha}_f = (1100\,1001\,0110\,1100)$; 8) $\widetilde{\alpha}_f = (1110\,0111\,0001\,1000)$;
9) $\widetilde{\alpha}_f = (1000\,0011\,1000\,1100)$; 10) $\widetilde{\alpha}_f = (1001\,1011\,1011\,1001)$;
11) $\widetilde{\alpha}_f = (1100\,0011\,1010\,0101)$; 12) $\widetilde{\alpha}_f = (1100\,0011\,0011\,1100)$;
13) $\widetilde{\alpha}_f = (1001\,0110\,1001\,0110)$; 14) $\widetilde{\alpha}_f = (1101\,0100\,1011\,0010)$;
15) $\widetilde{\alpha}_f = (1010\,0101\,0101\,1010)$.

2.3. Заменить прочерки в векторе $\widetilde{\alpha}$ символами 0 или 1 так, чтобы получился вектор значений самодвойственной функции:

1) $\widetilde{\alpha} = (1 — 0 —)$; 2) $\widetilde{\alpha} = (— 01 —)$; 3) $\widetilde{\alpha} = (01 — —)$;
4) $\widetilde{\alpha} = (01 — 0 — 0, — — —)$; 5) $\widetilde{\alpha} = (— — 01 — —11)$;

6) $\widetilde{\alpha} = (-1-1-0-1)$; 7) $\widetilde{\alpha} = (-10-0---1)$;
8) $\widetilde{\alpha} = (1001-----1111-----)$;
9) $\widetilde{\alpha} = (11--00--01--10--)$;
10) $\widetilde{\alpha} = (--------01--101100)$.

2.4. Определить, какие из переменных функций $f(\widetilde{x}^n)$ следует заменить на x, а какие на $\overline{x}$ с тем, чтобы получить константу:
1) $\widetilde{\alpha}_f = (10110110)$; 2) $\widetilde{\alpha}_f = (11011000)$; 3) $\widetilde{\alpha}_f = (10100100)$;
4) $\widetilde{\alpha}_f = (10101000)$; 5) $\widetilde{\alpha}_f = (11001110)$;
6) $\widetilde{\alpha}_f = (1000\,1101\,0010\,1100)$; 7) $\widetilde{\alpha}_f = (1001\,0110\,1001\,1010)$;
8) $\widetilde{\alpha}_f = (0111\,0001\,0011\,0001)$; 9) $\widetilde{\alpha}_f = (0110\,1000\,1110\,1011)$;
10) $\widetilde{\alpha}_f = (1010\,0101\,0101\,00110)$; 11) $\widetilde{\alpha}_f = (1010\,1110\,1100\,1010)$;
12) $\widetilde{\alpha}_f = (01100001)$; 13) $\widetilde{\alpha}_f = (1011\,0100\,1111\,0010)$;
14) $\widetilde{\alpha}_f = (0000\,1111\,0010\,1111)$; 15) $\widetilde{\alpha}_f = (1110\,1000\,0110\,1000)$.

2.5. Пусть $m(x, y, z) = xy \vee yz \vee zx$. Доказать тождества:
1) $m(m(\overline{x}, y, z), m(x, \overline{y}, z), m(x, y, \overline{z})) = m(m(\overline{x}, y, z), m(x, \overline{y}, z), m(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}))$;
2) $x \oplus y \oplus z = m(m(\overline{x}, y, z), m(x, \overline{y}, z), \overline{z})$;
3) $m(m(\overline{x}, y, z), m(x, \overline{y}, z), m(x, y, \overline{z})) = m(x, m(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}), m(\overline{x}, y, z))$;
4) $x \oplus y \oplus z = m(m(\overline{x}, y, z), m(x, \overline{y}, z), m(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}))$;
5) $m(\overline{x}, \overline{y}, \overline{z}) = \overline{m(x, y, z)}$; 6) $m(x, y, z) = xy \oplus yz \oplus zx$;
7) $m(x, y, z) = m(x, \overline{m(x, \overline{y}, z)}, z)$;
8) $xyz \vee t(x \vee y \vee z) = m(x, m(y, z, t), t)$;
9) $xyz \vee t(x \vee y \vee z) = m(m(x, y, t), m(x, z, t), m(y, z, t))$;
10) $xyz \vee t(x \vee y \vee z) = m(x \oplus y \oplus z), m(x, y, z), t)$.

2.6. Доказать, что если $f(\widetilde{x}^n) \in S$, то $|N_f| = 2^{n-1}$. Привести пример, показывающий, что обратное утверждение неверно.

2.7. Доказать, что не существует самодвойственных функций, существенно зависящих в точности от двух переменных.

2.8. Выяснить, при каких $n \geqslant 2$ функция $f(\widetilde{x}^n)$ является самодвойственной:
1) $f(\widetilde{x}^n) = x_1 \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_n$; 2) $f(\widetilde{x}^n) = \bigvee\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant n} x_i x_j$;
3) $f(\overline{x}^n) = \bigvee\limits_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_{]n/2[} \leqslant n} x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_{]n/2[}}$;
4) $f(\widetilde{x}^n) = \bigoplus\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant n} x_i x_j$;
5) $f(\widetilde{x}^n) = (x_1 \vee x_2) \oplus (x_2 \vee x_3) \oplus \ldots \oplus (x_{n-1} \vee x_n) \oplus (x_n \vee x_1)$;
6) $f(\widetilde{x}^n) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3) \oplus (x_4 \vee x_5 \vee x_6) \oplus \ldots \oplus (x_{n-2} \vee x_{n-1} \vee x_n)$, $n = 3k$;
7) $f(\widetilde{x}^n) = m(x_1, x_2, x_3) \oplus m(x_4, x_5, x_6) \oplus \ldots \oplus m(x_{n-2}, x_{n-1}, x_n)$, $n = 3k$;

8) $f(\widetilde{x}^n) = (x_1 \to x_2)(x_2 \to x_3)\dots(x_{n-1} \to x_n)(x_n \to x_1)$;

9) $f(\widetilde{x}^n) = (x_1 \to x_2) \oplus (x_2 \to x_3) \oplus \dots \oplus (x_{n-1} \to x_n) \oplus$
$\oplus (x_n \to x_1) \oplus x_1 \oplus x_2 \oplus \dots \oplus x_n$;

10) $f(\widetilde{x}^n) = \bigvee\limits_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \dots < i_k \leqslant n} x_{i_1} x_{i_2} \dots x_{i_k}, \quad 1 \leqslant k \leqslant n.$

2.9. Показать, что каждая самодвойственная функция, существенно зависящая только от переменных x_1, x_2, x_3, представима в виде $x_1^\alpha x_2^\beta \vee x_1^\alpha x_3^\gamma \vee x_2^\beta x_3^\gamma$ либо в виде $x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus \sigma$, где α, β γ, $\sigma \in \{0, 1\}$.

2.10. Доказать, что функция $f(\widetilde{x}^n)$ самодвойственна тогда и только тогда, когда ее x_1-компонента $f_1^1(\widetilde{x}^n)$ двойственна к ее $\overline{x}_1$-компоненте $f_0^1(\widetilde{x}^n)$.

2.11. Пусть $f(\widetilde{x}^n)$ такова, что $f^*(0, x_2, \dots, x_n) = f(1, x_2, \dots, x_n)$. Верно ли, что $f^*(x_1, \dots, x_{n-1}, 1) = f(x_1, \dots, x_{n-1}, 0)$?

2.12. Пусть функция $f(\widetilde{x}^n)$ представима в виде $f(\widetilde{x}^n) = x_n\varphi(\widetilde{x}^{n-1}) \vee \varphi^*(\widetilde{x}^{n-1})$, где φ — некоторая функция такая, что $\varphi^*(\widetilde{x}^{n-1}) \vee \varphi(\widetilde{x}^{n-1}) = \varphi(\widetilde{x}^{n-1})$. Доказать, что $f \in S$.

2.13. Доказать, что функция $f = \varphi\psi \oplus x(\varphi \oplus \psi)$ самодвойственна, если φ и ψ являются самодвойственными.

2.14. Используя лемму о несамодвойственной функции, доказать, что S является предполным классом в P_2.

2.15. Верно ли, что число самодвойственных функций, существенно зависящих от переменных x_1, x_2, …, x_n, равно числу функций из $P_2(X^{n-1})$, существенно зависящих от всех своих переменных?

2.16. 1) Пусть функция $f(\widetilde{x}^n)$ существенно зависит от переменной x_1 и каждая из компонент $f_1^1(\widetilde{x}^n)$ и $f_0^1(\widetilde{x}^n)$ является самодвойственной функцией. Показать, что $f(\widetilde{x}^n)$ не является самодвойственной функцией.

2) Останется ли верным утверждение 1), если слова «каждая из компонент» заменить на «хотя бы одна из компонент»?

2.17. Доказать тождество

$f(x_1, x_2, x_3, x_4, \dots, x_n) =$
$= f(x_1, m(x_1, x_2, x_3), m(x_1, x_2, x_3), x_4, \dots, x_n) \oplus$
$\oplus f(m(x_1, x_2, x_3), x_2, m(x_1, x_2, x_3), x_4, \dots, x_n) \oplus$
$\oplus f(m(x_1, x_2, x_3), m(x_1, x_2, x_3), x_3, x_4, \dots, x_n).$

2.18. Используя предыдущую задачу, доказать, что:

1) $S = [\{x_1 \oplus x_2 \oplus x_3, m(x_1, x_2, x_3), \overline{x}\}]$; 2) $S = [\{\overline{m(x_1, x_2, x_3)}\}]$;

3) $S = [\{m(x_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3)\}]$.

2.19. Выяснить, является ли множество A самодвойственным:

1) $A = \{0, 1, \overline{x}\}$; 2) $A = \{0, x\}$; 3) $A = \{x \oplus y, x \sim y, x \oplus y \oplus z\}$;

4) $A = \{x \to y, x \vee \overline{y}\}$; 5) $A = \{x \to y, x\overline{y}\}$;

6) $A = \{\overline{x}\,\overline{y}, \overline{x} \vee \overline{y}, m(x, y, z)\}$; 7) $A = \{x \oplus y \oplus z, \overline{x}\}$;

8) $A = [\{x \to y\}]$; 9) $A = [\{m(x, y, z)\}]$; 10) $A = [\{1, x \oplus y\}]$;
11) $A = [\{1, x \oplus y, xy\}]$; 12) $A = [\{1, x\overline{y}\}]$;
13) $A = [\{x \vee y, x \oplus y\}]$; 14) $A = [\{x \oplus y\}]$; 15) $A = [\{xy \oplus z \oplus 1\}]$.

2.20. Доказать, что:
1) если $[A] = P_2$, то и $[A^*] = P_2$; 2) $(A^*)^* = A$;
3) если $A = [A]$, то и $A^* = [A^*]$; 4) если $A_1 \subseteq A_2$, то $A_1^* \subseteq A_2^*$;
5) если A — базис $[A]$, то A^* — базис $[A^*]$.

§ 3. Класс линейных функций

Функция $f(\widetilde{x}^n)$ называется *линейной*, если она представима полиномом Жегалкина не выше первой степени, т. е. если существуют такие константы $\alpha_i \in \{0, 1\}$, $i = \overline{0, n}$, что

$$f(\widetilde{x}^n) = \alpha_0 \oplus \alpha_1 x_1 \oplus \ldots \oplus \alpha_n x_n. \tag{1}$$

Множество всех линейных функций обозначается через L, а множество всех линейных функций, зависящих от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, — через L^n. Из представления (1) вытекает, что $|L^n| = 2^{n+1}$. Множество L является замкнутым и предполным в P_2 классом. Справедливо утверждение (*лемма о нелинейной функции*): если $f \notin L$, то, подставляя на места ее переменных функции 0, 1, x, y, $\overline{x}$, $\overline{y}$, можно получить xy или $\overline{xy}$.

Если $f \notin L$, то функция f называется *нелинейной*.

Пример 1. Выяснить, линейна ли функция f, заданная вектором значений $\widetilde{\alpha}_f = (1001\,0110\,1001\,0110)$.

Решение. Найдем вектор $\widetilde{\beta}_f$ коэффициентов полинома Жегалкина для функции f. Имеем $\widetilde{\beta}_f = (1110\,1000\,0000\,0000)$. По вектору $\widetilde{\beta}_f$ определяется представление полиномом $f = 1 \oplus x_4 \oplus x_3 \oplus x_2$. Отметим, что в $\widetilde{\beta}_f$ отличны от нуля лишь координаты β_0, β_1, β_2, β_4 с номерами, равными 0 либо степеням 2. Это является критерием принадлежности f классу линейных функций.

Пример 2. Заменить в векторе $\widetilde{\alpha} = (—\,110\,———\,0)$ прочерки символами 0 и 1 так, чтобы получился вектор значений некоторой линейной функции f. Выразить f полиномом.

Решение. Сравнивая значения координат α_1 и α_3, α_2 и α_3 в векторе $\widetilde{\alpha} = (\alpha_0\alpha_1\alpha_2\alpha_3\alpha_4\alpha_5\alpha_6\alpha_7)$, находим, что функция f существенно зависит от переменных x_2 и x_3 (так как $f(001) = f(011)$ и $f(010) \neq f(011)$). Тогда в силу линейности функции f имеем $\alpha_0 = 0$, $\alpha_5 = \alpha_6 = 1$. Значение α_4 необходимо положить равным 0, так как если бы $\alpha_4 = 1$, то, поскольку $\alpha_0 = 0$, функция существенно зависела бы от x_1 (ибо $f(000) \neq f(100)$). Но тогда в силу линейности функции f имели бы $f(011) \neq f(111)$, что противоречит условию, ибо $\alpha_3 = \alpha_7 = 0$. Таким образом, $\widetilde{\alpha}_7 = (01100110)$, а $f = x_2 \oplus x_3$.

Пример 3. Подставляя на места переменных нелинейной функции f с вектором значений $\widetilde{\alpha}_7 = (1000\,0000\,0000\,1010)$ функции из множества $\{0, 1, x, y, \overline{x}, \overline{y}\}$, получить дизъюнкцию $x \vee y$.

Решение. Функция $x \vee y$ обращается в 1 на трех наборах. Заметим, что и f обращается в 1 на трех наборах: (0000), (1100), (1110), и что все три эти набора имеют 0 в четвертой координате, а вторая координата равна первой в каждом из наборов. Положим $x_4 = 0$, $x_1 = x_2 = x$, $x_3 = y$. Тогда $f = (x, x, y, 0) = x \vee \overline{y}$. Для получения дизъюнкции остается лишь подставить $\overline{y}$ вместо y. Таким образом,

$$f(x, x, \overline{y}, 0) = x \vee y.$$

3.1. Представив функцию f полиномом, выяснить, является ли она линейной:

1) $f = x \to y$; 2) $f = \overline{x \to y} \oplus \overline{x}y$; 3) $f = x\overline{y}(x \sim y)$;
4) $f = xy \vee \overline{x}\,\overline{y} \vee z$; 5) $f = (xy \vee \overline{x}\,\overline{y})z \vee \overline{z}(x\overline{y} \vee \overline{x}y)$;
6) $f = ((x \to y)(y \to x)) \sim z$; 7) $f = xy\overline{z} \vee x\overline{y}$;
8) $f = xyz \oplus xy\overline{z} \oplus \overline{x}y$; 9) $f = m(x, y, z) \oplus \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z} \oplus xyz$;
10) $f = (x \vee yz) \oplus xyz$; 11) $f = (x \vee yz) \oplus \overline{x}yz$;
12) $f = (xyz \vee x\overline{y}\,\overline{z}) \oplus x(y \oplus z)$; 13) $f = xyz \oplus x(\overline{y}\,\overline{z}) \oplus x(y \vee z)$;
14) $f = (xyz \oplus z\overline{x}\,\overline{y}) \vee (x\overline{y}z \oplus \overline{x}yz)$;
15) $f = (\overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z} \sim xy\overline{z}) \sim (x\overline{y}z \sim \overline{x}yz)$.

3.2. Выяснить, является ли линейной функция f, заданная векторно:

1) $\widetilde{\alpha}_f = (1001)$; 2) $\widetilde{\alpha}_f = (1101)$; 3) $\widetilde{\alpha}_f = (1001\,0110)$;
4) $\widetilde{\alpha}_f = (1100\,0011)$; 5) $\widetilde{\alpha}_f = (1010\,0101)$; 6) $\widetilde{\alpha}_f = (1010\,0110)$;
7) $\widetilde{\alpha}_f = (1100\,1001\,0110\,1001)$; 8) $\widetilde{\alpha}_f = (0110\,1001)$;
9) $\widetilde{\alpha}_f = (1001\,0110\,0110\,1001)$; 10) $\widetilde{\alpha}_f = (0110\,1001\,0110\,1001)$;
11) $\widetilde{\alpha}_f = (1010\,0101\,1001\,1100)$; 12) $\widetilde{\alpha}_f = (1010\,0101\,0101\,1010)$;
13) $\widetilde{\alpha}_f = (1010\,0110\,0110\,0101)$; 14) $\widetilde{\alpha}_f = (0011\,1100\,1100\,0011)$;
15) $\widetilde{\alpha}_f = (1001\,1001\,0110\,0110)$.

3.3. Заменить в векторе $\widetilde{\alpha}$ прочерки символами 0 и 1 так, чтобы получился вектор значений некоторой линейной функции f. Выразить f полиномом:

1) $\widetilde{\alpha} = (10 — 1)$; 2) $\widetilde{\alpha} = (0 — 11)$; 3) $\widetilde{\alpha} = (100 — 0 — —)$;
4) $\widetilde{\alpha} = (— 001 — — 1 —)$; 5) $\widetilde{\alpha} = (1 — 101 — — —)$;
6) $\widetilde{\alpha} = (— 0 — 1 — — 00)$; 7) $\widetilde{\alpha} = (11 — 0 — — — 1)$;
8) $\widetilde{\alpha} = (1 — — 11 — 0 —)$;
9) $\widetilde{\alpha} = (— — 10 — — — — 0 — — 1 — 110)$;
10) $\widetilde{\alpha} = (1 — — — — — — — — — — — 0 — 110)$;
11) $\widetilde{\alpha} = (— 11 — 1 — — — 1 — — — — — — 0)$;
12) $\widetilde{\alpha} = (— — — 0 — 00 — 1 — 0 — — — — — —)$;
13) $\widetilde{\alpha} = (— 100 — — — — 1 — 1 — — — — — — —)$;
14) $\widetilde{\alpha} = (— — — 1 — 11 — — 11 — 1 — 0 —)$;
15) $\widetilde{\alpha} = (— 1 — — — — — — — 00 — 1 — 1 — —)$.

3.4. Подставляя на места переменных нелинейной функции f функции из множества $\{0, 1, x, y\}$, получить хотя бы одну из функций xy, $x\overline{y}$, $\overline{xy}$:

1) $f(\widetilde{x}^3) = x_1x_2 \vee x_2\overline{x}_3 \vee \overline{x}_3x_1$; 2) $\widetilde{\alpha}_f = (0110\,0111)$;
3) $\widetilde{\alpha}_f = (1101\,0101)$; 4) $\widetilde{\alpha}_f = (1100\,1110)$;
5) $\widetilde{\alpha}_f = (1101\,1111\,1100\,1111)$; 6) $\widetilde{\alpha}_f = (0111\,1111\,1110\,1110)$;
7) $\widetilde{\alpha}_f = (1111\,0101\,1111\,11011)$; 8) $\widetilde{\alpha}_f = (0111\,1011\,1111\,1110)$;
9) $\widetilde{\alpha}_f = (1001\,0111\,1111\,1010)$; 10) $\widetilde{\alpha}_f = (1101\,1001\,1001\,0111)$;
11) $f = (x_1 \vee x_2 \vee x_3)(\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \vee \overline{x}_3 \vee x_4)$;
12) $f = (x_1 \vee \overline{x}_2 \vee \overline{x}_3 \vee \overline{x}_4)(\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \vee x_3 \vee x_4)(\overline{x}_2 \vee x_3)$;
13) $f = x_1\overline{x}_2\overline{x}_3\overline{x}_4 \vee \overline{x}_1x_2\overline{x}_3\overline{x}_4 \vee \overline{x}_1\overline{x}_2x_3\overline{x}_4 \vee \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3x_4 \vee x_1x_2x_4 \vee \vee x_2x_3x_4 \vee x_1x_2x_3$;
14) $\widetilde{\alpha}_f = (1100\,1111\,1111\,1110)$; 15) $\widetilde{\alpha}_f = (1011\,1110\,1011\,0111)$.

3.5. Выяснить, можно ли путем подстановки функций 0, 1, x, y, $\overline{x}$, $\overline{y}$ на места переменных функций f получить функцию xy:

1) $f = x_1 \to x_2$; 2) $\alpha_f = (1110\,1000)$; 3) $\alpha_f = (1001\,0110)$;
4) $\alpha_f = (1101\,1011)$; 5) $\alpha_f = (1001\,0111)$; 6) $\alpha_f = (1101\,0110)$;
7) $f = x_1 \to (x_2 \to x_3)$; 8) $f = (x_1\overline{x}_2 \vee \overline{x}_1x_2x_3) \oplus \overline{x}_1x_2\overline{x}_3$;
9) $f = (x_1\overline{x}_2 \vee x_2\overline{x}_3 \vee x_3\overline{x}_1)$; 10) $\widetilde{\alpha}_f = (1001\,1010)$;
11) $\widetilde{\alpha}_f = (1001\,0110\,0110\,1001)$; 12) $\widetilde{\alpha}_f = (1110\,1001\,1001\,0111)$;
13) $\widetilde{\alpha}_f = (1101\,1110\,0110\,1011)$; 14) $\widetilde{\alpha}_f = (1100\,0011\,0011\,1100)$;
15) $\widetilde{\alpha}_f = (0111\,1011\,1111\,1100)$.

3.6. 1) Пусть функция $f(\widetilde{x}^n)$ представима в виде $f = x_n \oplus \varphi(\widetilde{x}^{n-1})$. Доказать, что на любых двух наборах, различающихся только в n-й координате, функция f принимает противоположные значения.

2) Доказать обратное утверждение, т. е. что если функция f на любой паре наборов, различающихся только в n-й компоненте, принимает противоположные значения, то функция f может быть представлена в виде $f = x_n \oplus \varphi$, где φ не зависит от x_n.

3) Доказать, что функция $f(\widetilde{x}^n)$, принимающая на любых двух соседних наборах противоположные значения, линейна и существенно зависит от всех своих переменных.

3.7. 1) Показать, что если функцию $f(\widetilde{x}^n)$ можно представить в виде $f(\widetilde{x}^n) = x_n \oplus \varphi$, где φ не зависит от x_n, то $|N_f| = 2^{n-1}$.

2) Показать, что если f линейна и отлична от константы, то $|N_f| = 2^{n-1}$.

3.8. Доказать, что функция $f(\widetilde{x}^n)$, существенно зависящая от всех своих переменных, является линейной тогда и только тогда, когда при замещении любого подмножества переменных любым набором констант получается функция, существенно зависящая от всех оставшихся переменных.

3.9. Доказать, что линейная функция является самодвойственной тогда и только тогда, когда она существенно зависит от нечетного числа переменных.

3.10. Найти число линейных функций $f(\widetilde{x}^n)$, существенно зависящих в точности от k переменных.

3.11. Найти число линейных функций $f(\widetilde{x}^n)$ таких, что $f(0, 0, \ldots, 0) = f(1, 1, \ldots, 1) = 1$.

3.12. Пусть $f(x_1, x_2, 0, \ldots, 0) = x_1 \to x_2$. Доказать, что $f \notin L$.

3.13. Пусть $f(x, 0, \ldots, 0) \neq f(x_1, 1, \ldots, 1)$, $f(\widetilde{x}^n)$ существенно зависит от всех переменных, n нечетно. Доказать, что $f \notin L$.

3.14. Пусть $f(\widetilde{x}^n) \notin L$. Доказать, что подстановкой констант вместо некоторых $n-2$ переменных можно получить нелинейную функцию от двух переменных.

3.15. *Специальной* назовем четверку наборов $\widetilde{\alpha}$, $\widetilde{\beta}$, $\widetilde{\gamma}$, $\widetilde{\delta}$ из B^n, которая обладает следующими свойствами: множество координат можно разбить на два подмножества $A = \{i_1, \ldots, i_k\}$ и $B = \{j_1, \ldots, j_{n-k}\}$; набор $\widetilde{\alpha}$ таков, что координаты $\alpha_{i_1}, \ldots, \alpha_{i_k}$ равны 1; набор $\widetilde{\beta}$ таков, что координаты $\beta_{i_1}, \ldots, \beta_{i_k}$ равны 0; набор $\widetilde{\gamma}$ таков, что $1 < \sum\limits_{\nu=1}^{k} \gamma_{i_\nu} < k$; набор $\widetilde{\delta}$ таков, что $\delta_{i_\nu} = \widetilde{\gamma}_{i_\nu}$ $(\nu = 1, \ldots, k)$; кроме того, для всякого $m \in A_2$ выполнено равенство $\alpha_m = \beta_m = \gamma_m = \delta_m$. Иными словами, специальная четверка образована верхним и нижним наборами некоторой k-мерной грани g куба B^n и двумя отличными от них противоположными наборами этой грани.

Доказать, что функция $f(\widetilde{x}^n)$ является нелинейной тогда и только тогда, когда в B^n найдется специальная четверка наборов такая, что функция $f(\widetilde{x}^n)$ обращается в 1 либо на одном, либо на трех наборах из специальной четверки.

3.16. Доказать, что если $f(\widetilde{x}^n) \notin L$, $|N_f| = 2^{n-1}$, то с помощью подстановки функций $\{0, 1, x, y, \overline{x}, \overline{y}\}$ на места переменных функции f можно получить как конъюнкцию, так и дизъюнкцию.

3.17. Доказать, что отождествлением переменных из нелинейной функции $f(\widetilde{x}^n)$ $(n \geqslant 4)$ можно получить нелинейную функцию, зависящую не более чем от трех переменных.

3.18. Доказать, что система A полна в L. Выяснить, является ли система A базисом в L:

1) $A = \{1, x_1 \oplus x_2\}$; 2) $A = \{0, x_1 \sim x_2\}$;
3) $A = \{0, 1, x_1 \oplus x_2 \oplus x_3\}$; 4) $A = \{x \oplus 1, x_1 \oplus x_2\}$;
5) $A = \{x_1 \oplus x_2, x_1 \sim x_2\}$; 6) $A = \{x_1 \oplus x_2 \oplus x_3, x \oplus 1, 0\}$;
7) $A = \{x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus 1, x_1 \sim x_2\}$;
8) $A = \{x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus x_4, x \oplus 1\}$; 9) $A = \{x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus 1, 0\}$;
10) $A = L \cap P_2(X^2)$; 11) $A = (L \cap S) \cup \{0\}$; 12) $A = L \backslash S$;
13) $A = \{x_1 \oplus x_2, x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus 1, 1\}$;
14) $A = \{x_1 x_2 \vee \overline{x}_1 \overline{x}_2, x \oplus 1\}$; 15) $A = (L \backslash S) \cap P(X^2)$.

3.19. Доказать, что не существует линейной функции f, образующей базис в L.

3.20. Доказать, что $L \cap S = [\{x \oplus y \oplus z \oplus 1\}]$.

3.21. Доказать, что система $\{\overline{x},\ f_1,\ f_2,\ f_3\}$, где f_1, f_2, f_3 — попарно различные функции, существенно зависящие от переменных $x_1,\ x_2$, полна в P_2.

3.22. Доказать, что система $\{0, \overline{x},\ f_1,\ f_2,\ f_3\}$, где f_1, f_2, f_3 — различные функции, существенно зависящие от переменных $x_1, x_2, \ldots$ $\ldots, x_n,\ n \geqslant 2$, полна в P_2.

3.23. Доказать, что из полинома степени 3, зависящего от трех переменных, с помощью отождествления переменных можно получить функцию вида $xy \oplus l(x, y)$, где $l(x, y)$ — некоторая линейная функция.

3.24. Доказать, что из нелинейной функции $f(\widetilde{x}^n)$ с помощью отождествления переменных можно получить функцию вида $xy \oplus$ $\oplus\, l(x, y)$ или вида $xy \oplus yz \oplus zx \oplus l(x, y, z)$, где $l(x, y)$ и $l(x, y, z)$ — линейные функции.

§ 4. Классы функций, сохраняющих константы

Функция $f(\widetilde{x}^n)$ *сохраняет константу* 0 (*константу* 1), если $f(0, 0, \ldots, 0) = 0$ (соответственно если $f(1, 1, \ldots, 1) = 1$). Множество всех функций алгебры логики, сохраняющих константу 0 (константу 1), обозначается через T_0 (соответственно через T_1). Множество всех функций из T_0 (T_1), зависящих от переменных x_1, $x_2, \ldots, x_n$, будет обозначаться через T_0^n (соответственно через T_1^n). Каждое из множеств T_0, T_1 является замкнутым и предполным в P_2 классом.

Пример 1. Выяснить, при каких n функция $f(\widetilde{x}^n) = \bigoplus\limits_{i=1}^{n-2} m(x_i, x_{i+1}, x_{i+2})$ принадлежит множеству $T_0 \cap T_1$.

Решение. Если n нечетно, то $f(\widetilde{x}^n)$ является суперпозицией функций $m(x_1, x_2, x_3)$ и $x_1 \oplus x_2 \oplus x_3$, принадлежащих замкнутому классу $T_0 \cap T_1$, и, следовательно, $f(\widetilde{x}^n) \in T_0 \cap T_1$. Если n четно, то $f(1, 1, \ldots, 1) = 0$, и $f \notin T_0 \cap T_1$.

Пример 2. Найти число функций $f(\widetilde{x}^n)$, принадлежащих множеству $A = (L \backslash T_0) \cap S$.

Решение. $A = (L \backslash (T_0 \cap L)) \cap S = (L \cap S) \backslash (L \cap T_0 \cap S)$. Следовательно, $|A| = |L \cap S| - |L \cap S \cap T_0|$. Линейная функция $f(\widetilde{x}^n)$ является самодвойственной тогда и только тогда, когда она существенно зависит от нечетного числа переменных, т. е. представима в виде $f = x_{i_1} \oplus x_{i_2} \oplus \ldots \oplus x_{i_{2s+1}} \oplus \sigma$, $\sigma \in \{0, 1\}$. Число линейных функций $f(\widetilde{x}^n)$, зависящих существенно от k переменных, равно $2C_n^k$ (C_n^k способами можно выбрать k переменных из $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и двумя способами можно выбрать свободный член). Таким образом,

$$|L^n \cap S^n| = 2 \sum_{0 \leqslant s \leqslant (n-1)/2} C_n^{2s+1} = 2^n.$$

Ясно, что $|L^n \cap S^n \cap T_0^n| = \dfrac{1}{2}\,|L^n \cap S^n|$, поскольку свободный член определяется однозначно (равен 0). Таким образом, $|A| = 2^{n-1}$.

Пример 3. Доказать, что $[\{xy,\ x \oplus y\}] = T_0$.

Решение. Заметим, что полином любой функции f из T_0 не содержит 1 в качестве слагаемого. Но всякий такой полином может быть, очевидно, получен с помощью суперпозиции из функций xy, $x \oplus y$.

4.1. Выяснить, принадлежит ли функция f множеству $T_1 \backslash T_0$:
1) $f = (x_1 \to x_2)(x_2 \to x_3)(x_3 \to x_1)$; 2) $f = m(x_1, x_2, x_3)$;
3) $f = x_1 \to (x_2 \to (x_3 \to x_1))$; 4) $f = x_1x_2x_3 \vee \overline{x}_1x_2 \vee \overline{x}_2$;
5) $f = (x_1 \vee \overline{x}_2)\overline{x}_3 \vee \overline{x}_1x_2 \vee \overline{x}_2$; 6) $f = \overline{\overline{x}_1x_2}\,\overline{x}_3 \vee \overline{x}_1x_2 \vee \overline{x}_2 \vee x_1x_2x_3$;
7) $\widetilde{\alpha}_f = (1001\,0110)$; 8) $\widetilde{\alpha}_f = (1101\,1001)$; 9) $\widetilde{\alpha}_f = (1000\,0111)$;
10) $\widetilde{\alpha}_f = (0001\,1011)$.

4.2. Выяснить, при каких n функция $f(\widetilde{x}^n)$ принадлежит множеству $T_0 \backslash T_1$:

1) $f(\widetilde{x}^n) = x_1 \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_n$; 2) $f(\widetilde{x}^n) = \left(\bigoplus\limits_{i=1}^{n-1} x_ix_{i+1}\right) \oplus x_nx_1$;

3) $f(\widetilde{x}^n) = \bigoplus\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant n} x_ix_j$; 4) $f(\widetilde{x}^n) = \bigoplus\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (x_i \vee x_j)$;

5) $f(\widetilde{x}^n) = 1 \oplus (x_1 \to x_2)(x_2 \to x_3)(x_3 \to x_4) \ldots$
$\ldots (x_{n-1} \to x_n)(x_n \to x_1)$;

6) $f(\widetilde{x}^n) = \bigoplus\limits_{i=1}^{n-2} (x_i \to (x_{i+1} \to x_{i+2}))$;

7) $f(\widetilde{x}^n) = \bigoplus\limits_{i=1}^{n-2} ((x_i \to x_{i+1}) \to x_{i+2})$;

8) $f(\widetilde{x}^n) = \bigoplus\limits_{i=1}^{n-2} (x_i \oplus x_{i+1}x_{i+2})$; 9*) $f(\widetilde{x}^n) = \bigoplus\limits_{1 \leqslant i < j < k \leqslant n} x_ix_jx_k$;

10) $f(\widetilde{x}^n) = \bigoplus\limits_{1 \leqslant i < j < k \leqslant n} m(x_i, x_j, x_k)$;

11) $f(\widetilde{x}^n) = \bigoplus\limits_{i=1}^{n} \varphi_i(\widetilde{x}^n)$, $\varphi_i \in S \cap T_1$;

12) $f(\widetilde{x}^n) = x_n\left(\bigvee\limits_{i=1}^{n-1} \varphi_i(\widetilde{x}^{\,n-1})\right) \vee \overline{x}_n\left(\bigwedge\limits_{i=1}^{n-1} \varphi_i^*(\widetilde{x}^{\,n-1})\right)$, где φ_i — произвольные функции из P_2^{n-1}, φ^* — двойственная к φ_i функция, $i = 1, \ldots, n-1$;

13) $f(\widetilde{x}^n) = x_n\left(\bigvee\limits_{i=1}^{n-1} \varphi_i(\widetilde{x}^{\,n-1})\right) \oplus \bigwedge\limits_{i=1}^{n-1} \varphi_i^*(\widetilde{x}^{\,n-1})$, где φ_i — произвольные функции из P_2^{n-1}, φ_i^* — двойственная к φ_i функция, $i = 1, \ldots, n-1$;

14) $f(\widetilde{x}^n) = \bigvee\limits_{i=1}^{n} \varphi_i(\widetilde{x}^n)$, $\varphi_i \in (L \cap T_0) \backslash S$;

15) $f(\widetilde{x}^n) = \bigwedge\limits_{i=1}^{n} \varphi_i(\widetilde{x}^n)$, $\varphi_i \in S \backslash T_1$.

4.3. Подсчитать число функций, зависящих от переменных x_1, x_2, …, x_n и принадлежащих множеству A:
1) $A = T_0 \cap T_1$; 2) $A = T_0 \cup T_1$; 3) $A = T_0 \cap L$; 4) $A = T_1 \cap S$;
5) $A = T_0 \cup L$; 6) $A = L \backslash T_1$; 7) $A = (L \cup T_1) \cap S$;
8) $A = L \cap T_1 \cap S$; 9) $A = L \cup S \cup T_0$; 10) $A = (L \cup S) \backslash T_1$;
11) $A = (L \backslash T_0) \cap S$; 12) $A = S \cap T_0$; 13) $A = (S \cap T_0) \cup T_1$;
14) $A = (S \cap L) \backslash T_1$; 15) $A = (T_0 \backslash T_1) \cap S$; 16) $A = (T_0 \backslash T_1) \cap L$;
17) $A = (S \cup L) \cap T_1$; 18) $A = (T_1 \cup T_0) \cap S$; 19) $A = T_0 \cap T_1 \cap L$;
20) $A = (T_0 \cap T_1 \cap L) \backslash S$; 21) $A = (S \cap L) \backslash T_0$;
22) $A = (S \cap L) \backslash (T_0 \cap T_1)$; 23) $A = (S \cap L) \backslash (T_0 \cup T_1)$;
24) $A = (S \backslash T_0) \cap T_1$; 25) $A = S \backslash (T_0 \cup T_1)$; 26) $A = (S \cap T_0) \backslash T_1$;
27) $A = S \backslash (T_0 \cup L)$; 28) $A = S \cap T_0 \cap L$; 29) $A = L \backslash (T_0 \cup T_1)$;
30) $A = (L \backslash (T_0 \cup T_1)) \cap S$; 31) $A = S \backslash L$; 32) $A = L \backslash S$;
33) $A = (L \backslash S) \cap T_1$; 34) $A = ((S \backslash L) \backslash T_0) \backslash T_1$;
35) $A = ((S \cap L) \backslash T_0) \backslash T_1$; 36) $A = S \cap (T_1 \backslash L)$;
37) $A = (L \cap S) \backslash (T_0 \cap T_1)$; 38) $A = (L \cap T_0) \backslash (S \cap T_1)$;
39) $A = (S \cap T_0) \backslash T_1$; 40) $A = (L \cap T_0 \cap T_1) \backslash S$;
41) $A = (T_0 \cap T_1 \cap S) \backslash L$; 42) $A = T_0 \cup T_1 \cup S$;
43) $A = T_0 \cup T_1 \cup S \cup L$; 44) $A = T_0 \cup T_1 \cup L$;
45) $A = (L \backslash S) \cup (T_0 \backslash T_1)$.

4.4. Доказать, что:
1) $L \cap S \cap T_0 = L \cap S \cap T_1 = L \cap T_0 \cap T_1 = L \cap S \cap T_0 \cap T_1$;
2) $S \cap T_0 = S \cap T_1 = S \cap T_0 \cap T_1$.

4.5. Доказать, что:
1) $[\{x \vee y,\ x \oplus y\}] = T_0$; 2) $[\{x \vee y,\ x \sim y\}] = T_1$;
3) $[\{xy,\ x \sim y\}] = T_1$; 4) $[\{xy \oplus z\}] = T_0$;
5) $[\{xy,\ x \oplus y \oplus z\}] = T_0 \cap T_1$; 6) $[\{xy \oplus z \oplus t\}] = T_0 \cap T_1$;
7) $[\{x \oplus y\}] = L \cap T_0$; 8) $[\{x \sim y\}] = L \cap T_1$;
9) $[\{x \oplus y \oplus z\}] = L \cap S \cap T_0$;
10*) $[\{m(x, y, z),\ x \oplus y \oplus z\}] = T_0 \cap S$;
11*) $[\{m(\overline{x}, y, z)\}] = T_1 \cap S$; 12) $[\{x \oplus y \oplus z \oplus 1\}] = L \cap S$;
13) $[\{xy,\ m(x, y, \overline{z})\}] = T_0 \cap T_1$; 14) $[\{x \vee y,\ m(x, \overline{y}, z)\}] = T_0 \cap T_1$;
15) $[\{m(x, y, z),\ x \oplus y\}] = T_0$.

4.6. Выяснить, является ли множество A базисом в классе K:
1) $A = \{xy \sim z\}$, $K = T_1$; 2) $A = \{xy \vee z\}$, $K = T_0$;
3) $A = \{xy,\ x \sim y,\ x \vee y\}$, $K = T_1$;
4) $A = \{x \oplus y \oplus z,\ m(x, y, z)\}$, $K = T_0 \cap T_1$;
5) $A = \{xy,\ x \oplus y \oplus z,\ m(x, y, z)\}$, $K = T_0 \cap T_1$;
6*) $A = \{xy,\ m(x, y, \overline{z})\}$, $K = T_0 \cap T_1$;
7) $A = \{x \oplus y,\ m(x, y, z)\}$, $K = T_0 \cap T_1$;
8) $A = \{x \vee y,\ x\overline{y}\}$, $K = T_0$; 9) $A = \{x \oplus y \oplus z,\ 0\}$, $K = T_0 \cap L$;

10) $A = \{x \oplus y \oplus z,\ x \oplus y \oplus z \oplus t\}$, $K = T_0 \cap L$;
11) $A = \{xy \oplus y \oplus z,\ x \oplus y \oplus z\}$, $K = T_0 \cap T_1$;
12) $A = \{m(x, \overline{y}, z),\ x \oplus y \oplus z\}$, $K = T_0 \cap S$;
13) $A = \{(x \sim y) \sim z\}$, $K = L \cap S \cap T_0$;
14) $A = \{x \sim m(y, z, t)\}$, $K = T_1$;
15) $A = \{xy,\ x \oplus y \oplus z,\ x \vee y\}$, $K = T_0 \cap T_1$.

4.7. В заданном векторе $\widetilde{\alpha}$ заменить координаты — символами из множества $\{0, 1\}$ так, чтобы получился вектор $\widetilde{\alpha}_f$ значений некоторой функции f, образующей базис в K. Доказать единственность решения:
1) $\widetilde{\alpha} = (----)$, $K = T_0 \cap L$;
2) $\widetilde{\alpha} = (----------)$, $K = L \cap S$;
3) $\widetilde{\alpha} = (-110-11-)$, $K = T_0$; 4) $\widetilde{\alpha} = (----)$, $K = T_1 \cap L$;
5) $\widetilde{\alpha} = (----------)$, $K = L \cap S \cap T$;
6) $\widetilde{\alpha} = (-11001100110100-)$, $K = T_0 \cap T_1$;
7) $\widetilde{\alpha} = (--1----------)$, $K = L \cap S$;
8) $\widetilde{\alpha} = (-0----0--)$, $K = S \cap T_1$;
9) $\widetilde{\alpha} = (-0----0--)$, $K = S \cap T_0$;
10) $\widetilde{\alpha} = (-----1-0-)$, $K = S \cap T_1$;
11) $\widetilde{\alpha} = (-------10-)$, $K = S \cap T_0$;
12) $\widetilde{\alpha} = (----1-0--)$, $K = S \cap T_1$;
13) $\widetilde{\alpha} = (-----1----------)$, $K = L \cap T_0 \cap T_1$;
14) $\widetilde{\alpha} = (----------1-)$, $K = L \cap S_0 \cap T_0$;
15) $\widetilde{\alpha} = (-00-------)$, $K = S$.

4.8. Доказать, что класс T_1 является предполным в P_2.

4.9. Доказать, что множество A является предполным в L:
1) $A = [\{0, \overline{x}\}]$; 2) $A = L \cap T_1$; 3) $A = L \cap T_0$; 4) $A = L \cap S$.

4.10. Выяснить, является ли множество A предполным в T_0:
1) $A = T_0 \cap L$; 2) $A = T_0 \cap S$; 3) $A = T_0 \cap T_1$; 4) $A = [\{0, x\}]$;
5) $A = [\{xy,\ x \vee y\}]$.

§ 5. Класс монотонных функций

Булева функция $f(\widetilde{x}^n)$ называется *монотонной*, если для любых двух наборов $\widetilde{\alpha}$ и $\widetilde{\beta}$ из B^n таких, что $\widetilde{\alpha} \leqslant \widetilde{\beta}$, имеет место неравенство $f(\widetilde{\alpha}) \leqslant f(\widetilde{\beta})$. В противном случае $f(\widetilde{x}^n)$ будет называться *немонотонной*. Множество всех монотонных булевых функций обозначается через M, а множество всех монотонных функций, зависящих от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, — через M^n. Множество M является замкнутым и предполным в P_2 классом. Справедливо утверждение (*лемма о немонотонной функции*): если $f \notin M$, то, подставляя на места ее переменных функций 0, 1, x, можно получить функцию $\overline{x}$.

Вершина $\widetilde{\alpha}$ куба B^n называется *нижней единицей* (*верхним нулем*) *монотонной функции* $f(\widetilde{x}^n)$, если $f(\widetilde{\alpha}) = 1$ (соответственно $f(\widetilde{\alpha}) = 0$) и для всякой вершины $\widetilde{\beta}$ из $\widetilde{\beta} < \alpha$ вытекает, что $f(\widetilde{\beta}) = 0$ (соответственно из $\widetilde{\alpha} < \widetilde{\beta}$ вытекает, что $f(\widetilde{\beta}) = 1$).

Проверку на монотонность булевой функции $f(\widetilde{x}^n)$, заданной своим вектором значений $\widetilde{\alpha}_f = (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{2^n-1})$, можно осуществить следующим образом. Разделим вектор $\widetilde{\alpha}_f$ на две равные части $\widetilde{\alpha}_{f_0^1} = (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{2^{n-1}-1})$ и $\widetilde{\alpha}_{f_2^1} = (\alpha_{2^{n-1}}, \alpha_{2^{n-1}-1}, \ldots, \alpha_{2^n-1})$. Если отношение $\widetilde{\alpha}_{f_0^1} \leqslant \widetilde{\alpha}_{f_1^1}$ не выполнено, то $f(\widetilde{x}^n)$ не является монотонной. В противном случае каждый из векторов $\widetilde{\alpha}_{f_\sigma^1}$ $(\sigma \in \{0, 1\})$ вновь разделим на две равные части $\widetilde{\alpha}_{f_{\sigma,0}^{1,2}}$ и $\widetilde{\alpha}_{f_{\sigma,1}^{1,2}}$. Если не выполнено хотя бы одно из отношений $\widetilde{\alpha}_{f_{\sigma,0}^{1,2}} \leqslant \widetilde{\alpha}_{f_{\sigma,1}^{1,2}}$, то $f(\widetilde{x}^n) \notin M$. В противном случае вновь делим векторы пополам и т. д. Если отношение предшествования выполняется для всех пар векторов, то $f(\widetilde{x}^n)$ монотонна.

Пример 1. $\widetilde{\alpha}_f = (10011111)$. Первый шаг не обнаруживает немонотонности, так как $1001 \leqslant 1111$. Второй шаг дает: $10 \not\leqslant 01$, $11 \leqslant 11$. Монотонность нарушена.

Для доказательства монотонности функции f, которая задана формулой, можно с помощью эквивалентных преобразований представить функцию с помощью формулы, содержащей лишь связки $\&$ и $\vee$ (или другие монотонные операции).

Пример 2. $f = x \vee \overline{x}y \vee \overline{x}\,\overline{y}z$. Имеем $\overline{x}y \vee \overline{x}\,\overline{y}z = \overline{x}(y \vee \overline{y}z) = \overline{x}(y \vee z)$. Далее $x \vee \overline{x}(y \vee z) = x \vee y \vee z$. Функция f монотонна.

Установить немонотонность функции f можно также, получив из нее немонотонную функцию одной переменной путем замены остальных переменных константами.

5.1. По вектору значений $\widetilde{\alpha}_f$ выяснить, является ли функция f монотонной:

1) $\widetilde{\alpha}_f = (0110)$; 2) $\widetilde{\alpha}_f = (0011\,0111)$; 3) $\widetilde{\alpha}_f = (0101\,0111)$;
4) $\widetilde{\alpha}_f = (0110\,0110)$; 5) $\widetilde{\alpha}_f = (0001\,0111)$; 6) $\widetilde{\alpha}_f = (0101\,0011)$;
7) $\widetilde{\alpha}_f = (0010\,0011\,0111\,1111)$; 8) $\widetilde{\alpha}_f = (0001\,0101\,0111\,0111)$.

5.2. Проверить, является ли функция f монотонной:

1) $f = (x_1 \oplus x_2)\,\&\,(x_1 \sim x_2)$; 2) $f = x_1 \to (x_2 \to x_1)$;
3) $f = x_1 \to (x_1 \to x_2)$;
4) $f = x_1\overline{x}_2\overline{x}_3 \vee x_1\overline{x}_2x_3 \vee x_1x_2\overline{x}_3 \vee x_1x_2x_3 \vee \overline{x}_1x_2x_3$;
5) $f = x_1\overline{x}_2\overline{x}_3 \vee \overline{x}_1x_2x_3 \vee x_1x_2\overline{x}_3 \vee x_1x_2x_3 \vee \overline{x}_1\overline{x}_2x_3$;
6) $f = (x_1 \oplus x_2)x_1x_2$; 7) $f = x_1x_2 \oplus x_1x_3 \oplus x_3x_1$;
8) $f = x_1x_2 \oplus x_2x_3 \oplus x_3x_1 \oplus x_1$.

5.3. Для немонотонной функции f указать два соседних набора $\widetilde{\alpha}$, $\widetilde{\beta}$ значений переменных таких, что $\widetilde{\alpha} < \widetilde{\beta}$ и $f(\widetilde{\alpha}) > f(\widetilde{\beta})$:

1) $f = x_1x_2x_3 \vee \overline{x}_1x_2$; 2) $f = x_1 \oplus x_2 \oplus x_3$; 3) $f = x_1x_2 \oplus x_3$;
4) $f = x_1 \vee x_2\overline{x}_3$; 5) $f = x_1x_3 \oplus x_2x_4$;
6) $f = (x_1x_2x_4 \to x_2x_3) \oplus x_4$.

5.4. Пусть M_n — множество тех векторов $\widetilde{\alpha} = (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{2^n-1})$, которые являются векторами значений монотонной функции. Найти число векторов из $\mathcal{M}_n$, которые можно получить из вектора $\widetilde{\gamma}^{2^n} = (\gamma_0, \gamma_1, \ldots, \gamma_{2^n-1})$ заменой символа — на 0 или 1:

1) $\widetilde{\gamma}^2 = (0\text{—})$; 2) $\widetilde{\gamma}^2 = (\text{——})$; 3) $\widetilde{\gamma}^4 = (\text{—}00\text{—})$;
4) $\widetilde{\gamma}^4 = (\text{—}10\text{—})$; 5) $\widetilde{\gamma}^8 = (\text{———————}00\text{—})$;
6) $\widetilde{\gamma}^8 = (\text{———}1\text{——}0\text{—})$; 7) $\widetilde{\gamma}^8 = (\text{—}1\text{——}0\text{———})$;
8) $\widetilde{\gamma}^8 = (0\text{———————}1)$.

5.5. Пусть $\mathcal{M}S_n$ — множество тех векторов $\widetilde{\alpha}^2 = (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{2^n-1})$, которые являются векторами значений функций из класса $M \cap S$. Найти число векторов из $\mathcal{M}S_n$, которые можно получить, заменяя в векторе $\widetilde{\gamma}^{2^n}$ символы — на 0 и 1:

1) $\widetilde{\gamma}^2 = (\text{——})$; 2) $\widetilde{\gamma}^4 = (\text{—}0\text{——})$; 3) $\widetilde{\gamma}^4 = (\text{———}1)$;
4) $\widetilde{\gamma}^8 = (\text{—}00\text{—}0\text{———})$; 5) $\widetilde{\gamma}^8 = (\text{—}01\text{——}0\text{———})$;
6) $\widetilde{\gamma}^{16} = (\text{———}0\text{—}0\text{———}0\text{—————})$;
7) $\widetilde{\gamma} = (\text{———}1\text{——}1\text{——}1\text{—————})$;
8) $\widetilde{\gamma} = (\text{———}1\text{——}0\text{—————————})$.

5.6. Выяснить, при каких $n \geqslant 1$ функция $f(\widetilde{x}^n)$ монотонна:

1) $f(\widetilde{x}^n) = x_1 \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_n$; 2) $f(\widetilde{x}^n) = \bigoplus\limits_{1 \leqslant i < j < n} x_i x_j$;

3) $f(\widetilde{x}^n) = x_1 x_2 \ldots x_n \to (x_1 \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_n)$;

4) $f(\widetilde{x}^n) = \bigoplus\limits_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_m \leqslant n} x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_m}, \quad m = \left]\frac{n}{2}\right[$;

5) $f(\widetilde{x}^n) = x_1 x_2 \ldots x_n \oplus \bigoplus\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} x_1 \ldots x_{i-1} x_{i+1} \ldots x_n$;

6) $f(\widetilde{x}^n) = \bigoplus\limits_{m=1}^{n} \bigoplus\limits_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_m \leqslant n} x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_m}$.

5.7. Привести пример немонотонной функции $f(\widetilde{x}^n)$, у которой каждая подфункция вида $f^i_\sigma(\widetilde{x}^n)$ $(i = 1, \ldots, n)$, $\sigma \in \{0, 1\}$, монотонна.

5.8. Доказать, что если функция f немонотонна, то существуют два соседних набора $\widetilde{\alpha}$ и $\widetilde{\beta}$ такие, что $\widetilde{\alpha} < \widetilde{\beta}$ и $f(\widetilde{\alpha}) > f(\widetilde{\beta})$.

5.9. Доказать, что функция, существенно зависящая не менее чем от двух переменных, монотонна тогда и только тогда, когда всякая ее подфункция, зависящая существенно от одной переменной, монотонна.

5.10. Доказать, что функция $f(\widetilde{x}^n)$ монотонна тогда и только тогда, когда для любого $k = 1, 2, \ldots, n-1$, любого подмножества $\{i_1, \ldots, i_k\} \subseteq \{1, \ldots, n\}$ и любых двух наборов $\widetilde{\sigma} = (\sigma_1, \ldots, \sigma_k)$ и $\widetilde{\tau} = (\tau_1, \ldots, \tau_k)$ таких, что $\widetilde{\sigma} \leqslant \widetilde{\tau}$, выполняется тождество

$$f^{i_1, \ldots, i_k}_{\sigma_1 \ldots \sigma_k}(\widetilde{x}^n) \vee f^{i_1, \ldots, i_k}_{\tau_1 \ldots \tau_k}(\widetilde{x}^n) \equiv f^{i_1, \ldots, i_k}_{\tau_1 \ldots \tau_k}(\widetilde{x}^n).$$

5.11. Доказать, что для всякой монотонной функции $f(\widetilde{x}^n)$ справедливы разложения

$$f(\widetilde{x}^n) = x_i f^i_1(\widetilde{x}^n) \vee f^i_0(\widetilde{x}^n), \quad f(\widetilde{x}^n) = (x_i \vee f^i_0(\widetilde{x}^n)) f^i_1(\widetilde{x}^n).$$

5.12. Доказать, что для каждой отличной от константы монотонной функции f существуют д. н. ф. и к. н. ф., не содержащие отрицаний переменных и реализующие f.

5.13. Элементарная конъюнкция K называется *простым импликантом*, если $K \vee f = f$ и $K' \vee f \neq f$ для каждой конъюнкции K', полученной из K вычеркиванием букв. Доказать, что никакой простой импликант монотонной функции не содержит отрицаний переменных.

5.14. Найти число нижних единиц $e(f)$ и верхних нулей $n(f)$ монотонной функции f:

1) $f(\widetilde{x}^3) = x_1x_2 \vee x_2x_3 \vee x_3x_1$; 2) $f(\widetilde{x}^2) = x_1 \vee x_2$;

3) $f(\widetilde{x}^4) = x_1x_2x_3 \vee x_4(x_1 \vee x_2 \vee x_3)$;

4) $f(\widetilde{x}^{2k}) = (x_1 \vee x_2)(x_3 \vee x_4)\dots(x_{2k-1} \vee x_{2k})$;

5) $f(\widetilde{x}^{3k}) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3)(x_4 \vee x_5 \vee x_6)\dots(x_{3k-2} \vee x_{3k-1} \vee x_{3k})$.

5.15. Пусть $\varphi(x, y) = x \vee \overline{y}$. Для набора $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ из B^n положим $K_{\widetilde{\alpha}}(\widetilde{x}^n) = \mathop{\&}\limits_{i=1}^{n} \varphi(x_i, \alpha_i)$. Доказать, что если $\widetilde{\alpha}$ является нижней единицей функции $f(\widetilde{x}^n)$, то элементарная конъюнкция $K_{\widetilde{\alpha}}(\widetilde{x}^n)$ входит в полином Жегалкина функции $f(\widetilde{x}^n)$ в качестве слагаемого.

5.16. Показать, что не существует монотонных самодвойственных функций, имеющих ровно две нижние единицы.

5.17. 1) Показать, что в B^n существует подмножество, состоящее из $\binom{n}{[n/2]}$ попарно несравнимых наборов.

2*) Показать, что $|M^n| \geqslant 2^{\binom{n}{[n/2]}}$.

5.18. *Возрастающей цепью длины* k в B^n называется последовательность наборов $\widetilde{\alpha}_0, \widetilde{\alpha}_1, \dots, \widetilde{\alpha}_k$ такая, что $\widetilde{\alpha}_{i-1} < \widetilde{\alpha}_i$ $(i = 1, \dots, k)$.

1) Показать, что в B^n существует $n!$ попарно различных возрастающих цепей длины n.

2) Показать, что число попарно различных цепей длины n, содержащих фиксированную вершину $\widetilde{\alpha}$ из B^n_k, равно $k!\,(n-k)!$.

5.19. 1) Показать, что мощность любого подмножества попарно несравнимых наборов куба B^n не превосходит $\binom{n}{[n/2]}$.

2) Показать, что если подмножество $A \subseteq B^n$ состоит из попарно несравнимых наборов и при этом $\|\widetilde{\alpha}\| \leqslant k \leqslant n/2$ для любого $\widetilde{\alpha} \in A$, то $|A| \leqslant \binom{n}{k}$.

5.20. 1) Используя *теорему Дилуорса*, утверждающую, что минимальное число цепей, содержащих все вершины частично упорядоченного множества, равно максимальному числу попарно несравнимых наборов в нем, доказать, что

$$|M^n| \leqslant 2 + n^{\binom{n}{[n/2]}}.$$

2) Доказать, что число монотонных функций $f(\widetilde{x}^n)$, у которых каждая нижняя единица имеет вес, не превышающий k $(0 \leqslant k \leqslant n/2)$, не превосходит $1 + (k+1)^{\binom{n}{k}}$.

5.21. Подсчитать число функций в каждом из следующих множеств:
1) $M^n\backslash(T_1 \cup T_0)$; 2) $M^n\backslash(T_1 \cap T_0)$; 3) $M^n \cap L$; 4) $M^n \cap L \cap S$;
5) $L^n(M \cup S)$.

5.22. Показать, что:
1) $|S \cap M^n| \leqslant |M^{n-1}|$ при $n \geqslant 1$; 2) $|M^n| \leqslant |M^{n-1}|^2$ при $n \geqslant 1$;
3) $|M^n| \leqslant |M^{n-2}|^2\, 2^{2^{n-2}}$ при $n \geqslant 1$.

5.23. 1) Перечислить все монотонные функции переменных x_1, x_2.
2) Перечислить все попарно неконгруэнтные монотонные функции, существенно зависящие от трех переменных.
3) Пусть $\psi(n)$ — число монотонных функций, зависящих от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Показать, что:
а) $\psi(1) = 3$; б) $\psi(2) = 6$; в) $\psi(3) = 20$; г*) $\psi(4) = 168$.
4) Пусть $\psi_c(n)$ — число монотонных функций, существенно зависящих от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Найти $\psi_c(n)$ для $n \leqslant 4$.

5.24. Перечислить все попарно неконгруэнтные самодвойственные монотонные функции, зависящие от четырех переменных.

5.25. Доказать, что $|M^n| < |S^n|$ при $n \geqslant 4$.

5.26. Пусть $A \subseteq B_l^n$, C — множество всех наборов $\widetilde{\alpha} \in B_k^n$, для которых существует набор $\widetilde{\beta}$ из A, сравнимый с $\widetilde{\alpha}$. Доказать, что

$$|A| \binom{n}{l}^{-1} \leqslant |C| \binom{n}{k}^{-1}.$$

5.27. Пусть $f \in M^n$, $q_k(f) = |N_f \cap B_k^n| \Big/ \binom{n}{k}$. Доказать, что $q_{k-1}(f) \leqslant q_k(f)$ $(k = 1, \ldots, n)$.

5.28. Функция $\varphi(\widetilde{x}^n)$, определенная на B^n и принимающая произвольные действительные значения, называется *обобщенной монотонной функцией* (сокращенно ОМФ), если из $\widetilde{\alpha} \leqslant \widetilde{\beta}$ вытекает, что $\varphi(\widetilde{\alpha}) \leqslant \varphi(\widetilde{\beta})$.

1) Доказать, что ОМФ $\varphi(\widetilde{x}^n)$ может быть представлена в виде линейной комбинации монотонных булевых функций следующего вида:

$$\varphi(\widetilde{x}^n) = c + \sum_{f(\widetilde{x}^n) \in M} a_f f(\widetilde{x}^n),$$

где c — действительное число, а a_f — неотрицательное число.

2) Пусть $\varphi(\widetilde{x}^n)$ — ОМФ, а $q_k(\varphi) = \binom{n}{k}^{-1} \sum\limits_{\widetilde{\alpha} \in B_k^n} \varphi(\widetilde{\alpha})$. Доказать, что $q_{k-1}(\varphi) \leqslant q_k(\varphi)$ $(k = 1, \ldots, n)$.

5.29*. 1) Пусть $f(\widetilde{x}^n)$ и $g(\widetilde{x}^n)$ — монотонные булевы функции. Доказать, что

$$|N_{f\,\&\,g}|\, 2^{-n} \geqslant |N_f|\, 2^{-n}\, |N_g|\, 2^{-n}.$$

2) Пусть $f_1, \ldots, f_s$ — функции из M^n. Доказать, что

$$\left|N_{\&\limits_{1 \leqslant i \leqslant s} f_i}\right| 2^{-n} \geqslant \prod_{1 \leqslant i \leqslant s} (|N_{f_i}|\, 2^{-n}).$$

5.30. 1) Верно ли, что если $f \in M^n$, то из условия $\widetilde{\alpha},\ \widetilde{\beta} \in B^n$, $\nu(\widetilde{\beta}) > \nu(\widetilde{\alpha})$ $(\|\widetilde{\beta}\| > \|\widetilde{\alpha}\|)$ вытекает, что $f(\widetilde{\alpha}) \leqslant f(\widetilde{\beta})$?

2) Пусть для всякого k $(0 \leqslant k < n)$ из условий $\nu(\widetilde{\alpha}^n) \leqslant 2^n - 1 - 2^k$, $\nu(\widetilde{\beta}^n) = \nu(\widetilde{\alpha}^n) + 2^k$ следует, что $f(\widetilde{\alpha}^n) \leqslant f(\widetilde{\beta}^n)$. Доказать, что $f \in M$.

5.31. Пусть $F(\widetilde{y}^{2^n}) = \mathop{\&}\limits_{k=0}^{n-1} \mathop{\&}\limits_{i=0}^{2^n-2^k-1} (y_i \to y_{i+2^k})$. Доказать, что $|N_f| = |M^n|$.

5.32. Можно ли из функции $f = \overline{xy}z \vee t(xy \to z)$ получить:

1) функцию bx отождествлением переменных;

2) функцию $\overline{x}z$ отождествлением переменных;

3) функцию $\overline{x}z$ с помощью суперпозиции;

4) функцию $\overline{x}$ подстановкой констант 0, 1;

5) функцию $\overline{x}z$ подстановкой константы 0;

6) функцию z отождествлением переменных?

5.33. Показать, что всякая монотонная функция содержится не менее чем в двух классах из T_0, T_1, L.

5.34. Показать, что M не содержится ни в одном из классов T_0, T_1, S, L, указав монотонные функции, не содержащиеся в соответствующих классах.

5.35. Можно ли с помощью функций xy, $x \vee y$, 1 получить 0?

5.36. Показать, что множество $\{0,\ 1,\ xy,\ x \vee y\}$ является базисом в M.

5.37. Из множества $\{0,\ 1,\ xy,\ x \vee y,\ xy \vee z,\ xy \vee yz \vee zx\}$ выделить все подмножества, являющиеся базисами в M.

5.38. Доказать, что всякий базис в M содержит не менее трех и не более четырех функций.

5.39. Показать, что всякий базис в M, состоящий из трех функций, содержит функцию, существенно зависящую не менее чем от трех переменных.

5.40. Привести примеры базисов в следующих классах: 1) $T_0 \cap M$; 2) $T_1 \cap M$; 3) $L \cap M$.

5.41. Показать, что если $f \in M$, то $f^* \in M$.

5.42. Можно ли из функции $f = xy \vee yz \vee zx$ получить с помощью операции суперпозиции функцию $g = x \vee y$?

5.43. Доказать, что $f \in M \cap S$ тогда и только тогда, когда $f^n \in M$, $(f_0^n)^* = f_1^n$ и

$$\varphi(\widetilde{x}^{n-1}) = f(x_1,\ \ldots,\ x_{n-1},\ 0)\ \&\ f(\overline{x}_1,\ \ldots,\ \overline{x}_{n-1},\ 0) \equiv 0.$$

5.44. Пусть $m(\widetilde{x}^3) = x_1x_2 \vee x_2x_3 \vee x_3x_1$ и $f(\widetilde{x}^n) \in M \cap S$ $(n \geqslant 3)$. Доказать справедливость представления

$$f(\widetilde{x}^n) = m(f(x_1,\ x_1,\ x_3,\ x_4,\ \ldots,\ x_n),\ f(x_1,\ x_2,\ x_2,\ x_4,\ \ldots,\ x_n),$$
$$f(x_3,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ \ldots,\ x_n)).$$

5.45. 1) Пусть D^n — множество функций f из $S \cap M^n$, существенно зависящих от n переменных. Для каждого $n \leqslant 4$ перечислить функции из D^n.

2) Доказать, что для всякого $n \geqslant 4$ из функции $f \in D^n$ можно получить путем отождествления переменных функцию $m(\widetilde{x}^3) = x_1x_2 \vee \vee x_2x_3 \vee x_3x_1$.

5.46. 1) Доказать, что $m(\widetilde{x}^3) = x_1x_2 \vee x_2x_3 \vee x_3x_1$ образует базис в $M \cap S$.

2) Доказать, что любая функция из $M \cap S$, существенно зависящая более чем от одной переменной, образует базис в $M \cap S$.

5.47*. Пусть D — множество, состоящее из всех монотонных элементарных дизъюнкций, а $\mathcal{K}$ — множество, состоящее из всех монотонных элементарных конъюнкций. Показать, что множества $D \cup \{0, 1\}$, $\mathcal{K} \cup \{0, 1\}$, $M \cap T_0$, $M \cap T_1$ и только они образуют предполные классы в M.

§ 6. Полнота и замкнутые классы

В P_2 справедлив следующий критерий полноты.

Теорема (Э. Пост). *Система A функций из P_2 полна в P_2 тогда и только тогда, когда она целиком не содержится ни в одном из классов T_0, T_1, L, S и M.*

Функция $f(\widetilde{x}^n)$ называется *шефферовой* (или *функцией Шеффера*), если она образует базис в P_2.

При исследовании полноты систем функций удобно пользоваться таблицей, которую мы будем называть *критериальной*. Эта таблица имеет пять столбцов, каждый из которых соответствует одному из пяти предполных классов в P_2, а строки таблицы соответствуют функциям исследуемой системы. На пересечении строки таблицы, соответствующей функции f, и столбца, соответствующего классу K, ставится знак плюс, если $f \in K$, и минус, если $f \notin K$. Система функций полна тогда и только тогда, когда в каждом столбце содержится хотя бы один знак минус.

Пример 1. Исследовать полноту системы $A = \{f_1 = xy \oplus z,\ f_2 = x \oplus y \oplus 1\}$. Критериальная таблица имеет вид табл. 2.1. В каждом

Таблица 2.1

	T_0	T_1	L	S	M
f_1	+	−	−	−	−
f_2	−	+	+	−	−

столбце имеется не менее одного минуса. Система полна.

Пример 2. Исследовать полноту системы $A = (S \backslash M) \cup L \backslash (T_0 \cup \cup T_1)$. Для исследования полноты этой системы можно использовать некоторый аналог критериальной таблицы, в котором строки соот-

ветствуют не отдельным функциям, а подмножествам системы A. Разобьем систему A на подмножества $A_1 = S\backslash M$ и $A_2 = L\backslash(T_0 \cup T_1)$ и исследуем принадлежность функции из этих подмножеств предполным классам.

Заметим, что $\overline{x}_1 \in A_1 \cap A_2$. Отсюда следует, что $A_i \not\subseteq T_0$, $A_i \not\subseteq \not\subseteq T_1$, $A_i \not\subseteq M$ $(i = 1, 2)$. Очевидно, что $A_1 \subseteq S$, $A_2 \subseteq L$. Заметим, что $m(x, y, z) = xy \oplus yz \oplus zx$ принадлежит A_1 и не является линейной. Таким образом, $A_1 \not\subseteq L$. Остается выяснить справедливость включения $A_2 \subseteq S$. Всякая функция f из A имеет вид $f = \alpha_1 x_1 \oplus \oplus \alpha_2 x_2 \oplus \ldots \oplus \alpha_n x_n \oplus \alpha_0$, поскольку $A_2 \subseteq L$. Поскольку $A_2 \not\subseteq T_0$, то $\alpha_0 = 1$. Поскольку $A_2 \not\subseteq T_1$, то $f(\widetilde{1}) = \sum\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \alpha_i \oplus 1 = 0$. Следовательно, нечетное число коэффициентов $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ обращается в 1. Значит, функция f линейна и зависит существенно от нечетного числа переменных. Такая функция, как нетрудно проверить, является самодвойственной. Аналог критериальной таблицы имеет вид табл. 2.2.

Таблица 2.2

	T_0	T_1	L	S	M
A_1	$-$	$-$	$-$	$+$	$-$
A_2	$-$	$-$	$+$	$+$	$-$

Система A не является полной в P_2. Критериальная таблица может быть полезной для нахождения базисов, содержащихся в системе A.

Пример 3. Из полной в P_2 системы $A = \{f_1 = x \oplus y,\ f_2 = xy \oplus z,\ f_3 = x \oplus y \oplus z \oplus 1,\ f_4 = xy \oplus yz \oplus zx\}$ выделить всевозможные базисы.

Критериальная таблица имеет вид табл. 2.3. По таблице составим

Таблица 2.3

	T_0	T_1	L	S	M
f_1	$+$	$-$	$+$	$-$	$-$
f_2	$+$	$-$	$-$	$-$	$-$
f_3	$-$	$-$	$+$	$+$	$-$
f_4	$+$	$+$	$-$	$+$	$+$

к. н. ф. K, в которой элементарные дизъюнкции соответствуют столбцам таблицы и включают в качестве слагаемых символы тех функций, которые не входят в класс, соответствующий столбцу. В данном случае имеем

$$K = f_3(f_1 \vee f_2 \vee f_3)(f_2 \vee f_4)(f_1 \vee f_2)(f_1 \vee f_2 \vee f_3).$$

Перемножая скобки и используя для упрощения равенства вида $A \cdot A = A$, $A(A \vee B) = A$, $A \vee AB = A$, приведем к. н. ф. K к д. н. ф. D,

в которой упрощения $A \vee AB = A$ невозможны. В нашем случае имеем

$$K = f_3(f_2 \vee f_4)(f_1 \vee f_2) = f_3 f_2 \vee f_3 f_4 f_1 = D.$$

По полученной д. н. ф. D выпишем подмножества функций, соответствующие слагаемым д. н. ф. D. Это и будут искомые базисы. В нашем случае имеется два базиса: $Б_1 = \{f_2, f_3\}$ и $Б_2 = \{f_1, f_3, f_4\}$.

Полноту систем функций в P_2 можно доказывать путем сведения исследуемой системы к известным полным системам таким, как

$$\{xy,\ x \vee y,\ \overline{x}\}, \quad \{xy,\ x \oplus y,\ 1\}, \quad \{\overline{x} \vee \overline{y}\}, \quad \{\overline{xy}\}.$$

Пример 4. Доказать полноту в P_2 системы $A = \{f_1 = xy \vee yz \vee zx,\ f_2 = 0,\ f_3 = 1,\ f_4 = x \oplus y \oplus z\}$.

Имеем $f_1(x, y, 0) = xy$, $f_4(x, y, 0) = x \oplus y$. Таким образом, из функций системы A получаются функции xy, $x \oplus y$, 1 одной из вышеуказанных полных систем. Это и означает, что система A полна в P_2.

6.1. Выяснить, полна ли система функций:

1) $A = \{xy,\ x \vee y,\ x \oplus y,\ xy \vee yz \vee zx\}$;
2) $A = \{xy,\ x \vee y,\ x \oplus y \oplus z \oplus 1\}$;
3) $A = \{1,\ \overline{x},\ x(y \sim z) \oplus \overline{x}(y \oplus z),\ x \sim y\}$;
4) $A = \{0,\ \overline{x},\ x(y \oplus z) \oplus yz\}$;
5) $A = \{\overline{x},\ x(y \sim z) \sim (y \vee z),\ x \oplus y \oplus z\}$;
6) $A = \{\overline{x},\ x(y \sim z) \sim yz,\ x \oplus y \oplus z\}$;
7) $A = \{xy(x \oplus y),\ xy \oplus x \oplus y,\ 1,\ xy \oplus yz \oplus zx\}$;
8) $A = \{xy(x \oplus z),\ 1\}$; 9) $A = \{x \to y,\ \overline{x} \to \overline{y}x,\ x \oplus y \oplus z,\ 1\}$;
10) $A = \{x \to y,\ x \oplus y\}$.

6.2. Выяснить, полна ли система A функций, заданных векторами своих значений:

1) $A = \{f_1 = (0110),\ f_2 = (1100\,0011),\ f_3 = (1001\,0110)\}$;
2) $A = \{f_1 = (0111),\ f_2 = (0101\,1010),\ f_3 = (0111\,1110)\}$;
3) $A = \{f_1 = (0111),\ f_2 = (1001\,0110)\}$;
4) $A = \{f_1 = (0101),\ f_2 = (1110\,1000),\ f_3 = (0110\,1001)\}$;
5) $A = \{f_1 = (1001),\ f_2 = (1110\,1000)\}$;
6) $A = \{f_1 = (11),\ f_2 = (0111),\ f_3 = (0011\,0111)\}$;
7) $A = \{f_1 = (10),\ f_2 = (0011\,0111)\}$;
8) $A = \{f_1 = (11),\ f_2 = (00),\ f_3 = (0011\,0101)\}$;
9) $A = \{f_1 = (1000\,0001),\ f_2 = (0111),\ f_3 = (1011)\}$;
10) $A = \{f_1 = (1000\,0001),\ f_2 = (0110),\ f_3 = (1001)\}$.

6.3. Выяснить, полна ли система A:

1) $A = (S \cap M) \cup (L \backslash M)$; 2) $A = (L \cap T_1 \cap T_0) \cup S \backslash (T_0 \cup T_1)$;
3) $A = (L \cap T_1) \cup (S \cap M)$; 4) $A = (L \cap T_1) \cup (S \backslash T_0)$;
5) $A = (M \backslash T_0) \cup (L \backslash S)$; 6) $A = (M \backslash T_0) \cup (S \backslash L)$;
7) $A = (L \cap M) \cup (S \backslash T_0)$; 8) $A = ((L \cap M) \backslash T_1) \cup (S \cap T_1)$;
9) $A = (M \backslash S) \cup (L \cap S)$; 10) $A = (M \cap S) \cup (T_0 \backslash M) \cup (T_1 \cap S)$.

6.4. Проверить, является ли система функций A базисом в P_2:
1) $A = \{x \to y,\ x \oplus y,\ x \vee y\}$; 2) $A = \{x \oplus y \oplus z,\ x \vee y,\ 0,\ 1\}$;
3) $A = \{x \oplus y \oplus yz,\ x \oplus y \oplus 1\}$; 4) $A = \{xy \vee z,\ xy \oplus z,\ xy \sim z\}$;
5) $A = \{x \oplus y \oplus z,\ x \oplus y \oplus z \oplus 1,\ xy \oplus yz \oplus zx,\ \overline{x}\}$;
6) $A = \{x \oplus y \oplus z,\ xy \oplus zx \oplus zy,\ 0,\ 1\}$; 7) $A = \{x \oplus y,\ x \sim yz\}$;
8) $A = \{xy \oplus yz \oplus zt,\ 0,\ 1,\ x \vee y\}$.

6.5. Из полной в P_2 системы A выделить всевозможные базисы:
1) $A = \{1,\ \overline{x},\ xy(x \oplus y),\ x \oplus y \oplus xy \oplus yz \oplus zx\}$;
2) $A = \{0,\ x \oplus y,\ x \to y,\ xy \sim xz\}$;
3) $A = \{0,\ 1,\ x \oplus y \oplus z,\ xy \oplus zx \oplus yz,\ xy \oplus z,\ x \vee y\}$;
4) $A = \{xy,\ x \vee y,\ xy \vee z,\ x \oplus y,\ x \to y\}$;
5) $A = \{xy \oplus z,\ x \oplus y \oplus 1,\ x\overline{y},\ \overline{x}\}$;
6) $A = \{xy \vee \overline{z},\ \overline{x},\ x \to y,\ 0,\ x \oplus zy\}$;
7) $A = \{xy,\ xy \vee z,\ x \oplus y,\ x \to y,\ \overline{x}\}$;
8) $A = \{x \oplus y,\ x \sim y,\ x \oplus y \oplus z,\ xy,\ x \to y\}$.

6.6. Используя теоретико-множественные операции, выразить через известные замкнутые классы T_0, T_1, L, S, M и P_2 замыкание множества A:
1) $A = P_2 \backslash (T_0 \cup T_1 \cup L \cup S \cup M)$; 2) $A = M \backslash (T_0 \cap L)$;
3) $A = M \backslash (T_0 \cap T_1)$; 4) $A = T_0 \cap (L \backslash S)$; 5) $A = S \backslash (T_0 \backslash T_1)$;
6) $A = (L \cap S) \backslash (T_0 \cup T_1)$; 7) $A = S \backslash T_1 \cup L \backslash (T_1 \cup T_0)$;
8) $A = L \backslash (S \cup T_0)$; 9) $A = L \backslash (T_0 \cup T_1)$; 10) $A = (T_0 \backslash T_1) \cup (M \backslash L)$;
11) $A = (T_0 \backslash T_1) \cup (M \backslash T_0)$; 12) $A = M \backslash (S \cup L)$.

6.7 1) Пусть $P_2^c(X^2)$ — множество всех функций из $P_2(X^2)$, существенно зависящих от двух переменных. Найти базисы $Б \subseteq P_2^c(X^2)$, содержащие: а) одну функцию; б) две функции; в) три функции.

2) Доказать, что нет базисов $Б \subseteq P_2(X^2)$, содержащих четыре функции.

6.8. Выяснить, можно ли расширить до базиса в P_2 множество A:
1) $A = \{x \sim y,\ m(x, y, z)\}$; 2) $A = \{x\}$; 3) $A = \{x \oplus y,\ x \vee y\}$;
4) $A = \{x \vee y,\ xy\}$; 5) $A = \{0,\ 1\}$; 6) $A = \{0,\ 1,\ x \vee y\}$;
7) $A = \{x \to y,\ x \vee y\}$; 8) $A = \{x \oplus y,\ x \sim y\}$.

6.9. Выяснить, полна ли система функций $A = \{f_1,\ f_2\}$:
1) $f_1 \in S \backslash M$, $f_2 \notin L \cup S$, $f_1 \to f_2 \equiv 1$;
2) $f_1 \notin L \cup T_0 \cup T_1$, $f_2 \in M \cap L$, $f_1 \to f_2 \equiv 1$;
3) $f_1 \notin T_0 \cup L$, $f_2 \notin S$, $f_1 \to f_2 \equiv 1$;
4) $f_1 \in (S \cap L) \backslash T_0$, $f_2 \in M \backslash (T_1 \cap L)$, $f_1 \to f_2 \equiv 1$.

6.10. Выяснить, при каких $n \geqslant 2$ функция $f(\widetilde{x}^n)$ является шефферовой:
1) $f(\widetilde{x}^n) = 1 \oplus x_1x_2 \oplus \ldots \oplus x_ix_{i+1} \oplus \ldots \oplus x_{n-1}x_n \oplus x_nx_1$;
2) $f(\widetilde{x}^n) = 1 \oplus x_1x_2 \oplus \ldots \oplus x_ix_{i+1} \oplus \ldots \oplus x_{n-1}x_n$;

3) $f(\widetilde{x}^n) = \bigvee\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n} \overline{x}_i\overline{x}_j$; 4*) $f(\widetilde{x}^n) = 1 \oplus \sum\limits_{1\leqslant i<j\leqslant n} x_ix_j$;

5) $f(\widetilde{x}^n) = \bigvee\limits_{1\leqslant i_1<\ldots<i_{[n/2]}\leqslant n} \overline{x}_{i_1}\overline{x}_{i_2}\ldots\overline{x}_{i_{]n/2[}}$;

6) $f(\widetilde{x}^n) = 1 \oplus (x_1 \to x_2) \oplus (x_2 \to x_3) \oplus \ldots$
$\ldots \oplus (x_{n-1} \to x_n) \oplus (x_n \to x_1)$;

7) $f(\widetilde{x}^n) = 1 \oplus (x_1 \to x_2) \oplus (x_2 \to x_3) \oplus \ldots \oplus (x_{n-1} \to x_n)$;

8) $f(\widetilde{x}^n) = (x_1 \mid x_2) \oplus (x_2 \mid x_3) \oplus \ldots \oplus (x_{n-1} \mid x_n) \oplus (x_n \mid x_1)$;

9) $f(\widetilde{x}^n) = (x_1 \mid x_2) \oplus (x_2 \mid x_3) \oplus \ldots \oplus (x_{n-1} \mid x_n)$;

10) $f(\widetilde{x}^n) = x_1x_2\ldots x_n \oplus (x_1 \to x_2)\,\&\,(x_2 \to x_3)\,\&\,\ldots$
$\ldots\,\&\,(x_{n-1} \to x_n)\,\&\,(x_n \to x_1)$.

6.11. Доказать, что, если f монотонна и зависит существенно не менее чем от двух переменных, то система $\{0, \overline{f}\}$ полна в P_2.

6.12. Пусть f_1, f_2, f_3 — попарно различные функции переменных x_1, x_2, существенно зависящие от двух переменных. Доказать, что система $\{\overline{x}, f_1, f_2, f_3\}$ полна в P_2.

6.13. С помощью суперпозиции из функции f можно получить константы 0 и 1. Доказать, что f — шефферова функция.

6.14. Монотонная функция f имеет ровно две нижние единицы. Доказать, что $\overline{f}$ — шефферова функция.

6.15. Доказать, что если $f \notin T_0 \cup T_1 \cup S$, то f — шефферова функция.

6.16. Подсчитать число шефферовых функций в $P_2(X^n)$.

6.17. Функция f зависит существенно ровно от двух переменных и не принадлежит множеству $T_1 \cup T_0$. Доказать, что функция f шефферова.

6.18*). Доказать, что с помощью отождествления переменных из шефферовой функции, зависящей от $n \geqslant 3$ переменных, можно получить одну из функций $\widetilde{x} \vee \overline{y}$ или $\overline{x}\,\overline{y}$.

6.19. 1) Доказать, что $L \subseteq T_1 \cup T_0 \cup S$.

2) Доказать, что множество A является непустым:

а) $A = (L \cap T_1)\backslash(T_0 \cup S)$; б) $A = (L \cap T_0)\backslash(T_1 \cup S)$;

в) $A = (L \cap S)\backslash(T_0 \cup T_1)$.

6.20. Пусть $f(\widetilde{x}^n)$ — симметрическая функция, существенно зависящая от $n \geqslant 3$ переменных, и $f(1110\ldots0) = f(00\ldots0)$. Доказать, что система $\{f(\widetilde{x}^n), 0, \overline{x}\}$ полна в P_2.

2) Пусть n четно, $f(\widetilde{x}^n)$ — симметрическая функция, существенно зависящая от n переменных, $f(\widetilde{0}) \neq f(\widetilde{1})$. Доказать, что система $\{f(\widetilde{x}^n), \overline{x}\}$ полна в P_2.

6.21. 1) Пусть A — множество функций из $P_2(X^n)$ такое, что $|A| > \frac{1}{2}\cdot 2^{2^n}$. Доказать, что система A полна в P_2, $n \geqslant 2$.

2) Пусть A — множество функций из $P_2(X^n)$, существенно зависящих от n переменных, $|A| \geqslant \frac{1}{2} \cdot 2^{2^n}$ $(n \geqslant 2)$. Доказать, что система A полна в P_2.

3) Пусть $|A \backslash (T_0 \cup T_1)| > \frac{1}{2} \cdot 2^{2^{n-1}}$, $A \subseteq P_2(X^n)$ $(n \geqslant 2)$. Доказать, что система A полна в P_2.

4) Пусть $|A \cap L| > 2^n$, $|A \cap M| > n + 2$, $A \subseteq P_2(X^n)$ $(n \geqslant 2)$. Доказать, что система A полна.

5) Пусть $|A \cap L| > 2^n$, $|A \cap S| > 2^n$, $A \subseteq P_2(X^n)$ $(n \geqslant 3)$. Доказать, что система A полна.

6) Пусть $|A \cap S| > \frac{1}{2} \cdot 2^{2^{n-1}}$, $|A \cap (L \backslash T_0)| > 2^{n-1}$, $A \subseteq P_2(X^n)$ $(n \geqslant 3)$. Доказать, что система A полна.

6.22. Доказать, что всякая функция f из множества $S \backslash (T_0 \cup T_1 \cup M \cup L)$ образует базис в S.

6.23. Верно ли, что всякая функция $f \in T_0 \backslash (T_1 \cup M \cup L \cup S)$ образует базис в T_0?

6.24. 1) Верно ли, что если $f \in M \backslash S \cup L$, то $\{0, 1, f\}$ — базис в M?

2) Верно ли, что для всякой функции $f \in M \backslash S \cup L$ такой, что $f \notin ([\{x \vee y\}] \cup [\{xy\}])$, множество $\{0, 1, f\}$ является базисом?

6.25. Пусть функция $f(\widetilde{x}^4)$ такова, что для всякого i $(1 \leqslant i \leqslant 4)$ каждая из подфункций f_0^i и f_1^i принимает значение 1 ровно на четырех наборах значений переменных. Может ли система $\{0, 1, f\}$ быть полной в P_2?

Пусть функция $f(\widetilde{x}^n)$ существенно зависит от всех своих переменных. Через $\mathfrak{N}(f(\widetilde{x}^n))$ обозначается множество всех таких функций, которые получаются из $f(\widetilde{x}^n)$ отождествлением переменных, причем сама функция $f(\widetilde{x}^n)$ множеству $\mathfrak{N}(f(\widetilde{x}^n))$ не принадлежит. Если $n < 2$, то по определению $\mathfrak{N}(f(\widetilde{x}^n)) = \varnothing$. Множество $\mathfrak{N}(f)$ называется *наследственной системой функции* f. Функция называется *неприводимой*, если $[\mathfrak{N}(f)] \neq [f]$. Базис $Б$ замкнутого класса K называется *простым*, если после замены произвольной функции f из $Б$ ее наследственной системой получается система, неполная в K. Функция f, не принадлежащая замкнутому классу K, называется *простой относительно* K, если ее наследственная система $\mathfrak{N}(f)$ содержится в K.

6.26. По функции f найти все попарно неконгруэнтные функции, входящие в ее наследственную систему $\mathfrak{N}(f)$:

1) $f = xy$; 2) $f = xy \vee yz \vee zx$; 3) $f = xy \oplus z$; 4) $f = xy \vee z$;

5) $f = xy \vee zt$; 6) $f = xy \vee \overline{z}\overline{t}$; 7) $f = x \oplus y \oplus z$;

8) $f = xy \oplus zy \oplus x \oplus y$; 9) $f = (x \vee z) \to y$;

10) $f = xyz \oplus xy \oplus x \oplus 1$.

6.27. Найти все попарно неконгруэнтные функции, простые относительно класса K:

1) $K = \{0\}$; 2) $K = T_0$; 3) $K = \{0, 1\}$; 4) $K = L$;

5) $K = L \cap S$; 6) $K = T_0 \cap T_1$; 7) $K = M$; 8) $K = S$;
9) $K = [0, 1, x]$; 10) $K = [0, 1, x, \overline{x}]$; 11) $K = [x, \overline{x}]$;
12) $K = T_0 \cap L \cap S$.

6.28. Выяснить, является ли функция f неприводимой:
1) $f = x \oplus y$; 2) $f = x \oplus y \oplus z$; 3) $f = x \oplus y \oplus z \oplus t$;
4) $f = xy \oplus yz \oplus zx$; 5) $f = \overline{x} \vee \overline{y} \vee \overline{z}$; 6) $f = xyz \vee t(x \vee y \vee z)$;
7) $f = xy \vee z$; 8) $xy \vee zt$; 9) $f = xy \oplus yz \oplus zt$; 10) $f = xy \oplus z$.

6.29. Выяснить, является ли базис $Б$ класса K простым:
1) $Б = \{0,\ 1,\ xy,\ x \oplus y \oplus z\}$, $K = P_2$;
2) $Б = \{xy \oplus z,\ 1\}$, $K = P_2$; 3) $Б = \{xy \vee z,\ 0,\ 1\}$, $K = M$;
4) $Б = \{xy \vee zt,\ 0,\ 1\}$, $K = M$; 5) $Б = \{xy \oplus x \oplus y,\ \overline{x}\}$, $K = P_2$;
6) $Б = \{x \oplus y,\ x \sim y\}$, $K = L$; 7) $Б = \{x \oplus y,\ x \to y\}$, $K = P_2$;
8) $Б = \{x \oplus y \oplus z,\ 1\}$, $K = L \cap T_1$; 9) $Б = \{x \to y,\ x\overline{y}\}$, $K = P_2$;
10) $Б = \{x \sim y,\ m(x, y, z)\}$, $K = T_1$.

6.30. Доказать, что в P_2 существует ровно два простых базиса, состоящих из одной функции: $\{x \mid y\}$ и $\{x \downarrow y\}$.

6.31. Доказать, что каждая функция f из простого базиса в P_2 является простой относительно некоторого предполного класса в P_2, к которому f не принадлежит.

Глава III

k-ЗНАЧНЫЕ ЛОГИКИ

§ 1. Представление функций k-значных логик формулами

1. Элементарные функции k-значных логик и соотношения между ними. Всюду в этой главе число k предполагается натуральным и бóльшим 2. Через E_k обозначается множество $\{0, 1, \ldots, k-1\}$. Функция $f(\widetilde{x}^n) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется *функцией k-значной логики*, если на всяком наборе $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ значений переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, где $\alpha_i \in E_k$, значение $f(\widetilde{\alpha})$ также принадлежит множеству E_k. *Совокупность всех функций k-значной логики* обозначается через P_k. Понятия фиктивной и существенной переменных, равенства функций, формулы над множеством функций (и связок), операций суперпозиции и замыкания, замкнутого класса, базиса и другие в k-значных логиках определяются так же, как соответствующие понятия в алгебре логики. Поэтому в дальнейшем приводятся определения только таких понятий, которые чем-то существенным отличаются от аналогичных понятий в P_2.

Следующие функции k-значной логики считаются *элементарными*:

константы $0, 1, \ldots, k-1$; эти функции будут рассматриваться как функции, зависящие от произвольного конечного числа переменных (включая и нуль переменных);

отрицание Поста: $x + 1 (\mathrm{mod}\ k)$; обозначение $\overline{x}$;

отрицание Лукасевича: $(k-1) - x$; обозначение $\sim x$ или Nx;

характеристическая функция (первого рода) числа i: $j_i(x)$ $(i = 0, 1, \ldots, k-1)$,

$$f_i(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x = i, \\ 0, & \text{если } x \neq i; \end{cases}$$

характеристическая функция второго рода числа i: $J_i(x)$ $(i = 0, 1, \ldots, k-1)$,

$$J_i(x) = \begin{cases} k-1, & \text{если } x = i, \\ 0, & \text{если } x \neq i; \end{cases}$$

минимум x *и* y: $\min(x, y)$ (другие обозначения: xy, $x \,\&\, y$);
максимум x *и* y: $\max(x, y)$ (другое обозначение: $x \vee y$);
сумма по модулю k: $x + y \pmod k$, читается «x *плюс* y *по модулю* k»;
произведение по модулю k: $x \cdot y \pmod k$ читается *произведение* x *на* y *по модулю* k *);
усеченная разность:

$$x \dot{-} y = \begin{cases} 0, & \text{если } 0 \leqslant x < y \leqslant k-1, \\ x - y, & \text{если } 0 \leqslant y \leqslant x \leqslant k-1; \end{cases}$$

импликация:

$$x \supset y = \begin{cases} k-1, & \text{если } 0 \leqslant x < y \leqslant k-1, \\ (k-1) - x + y, & \text{если } 0 \leqslant y \leqslant x \leqslant k-1; \end{cases}$$

функция Вебба: $\max(x, y) + 1 \pmod k$, обозначение $v_k(x, y)$;
разность по модулю k:

$$x - y = \begin{cases} x - y, & \text{если } 0 \leqslant y \leqslant x \leqslant k-1, \\ k - (y - x), & \text{если } 0 \leqslant x < y \leqslant k-1. \end{cases}$$

Функции (операции) min, max, + и · обладают свойствами коммутативности и ассоциативности. Кроме того, справедливы соотношения:

$$(x + y) \cdot z = (x \cdot z) + (y \cdot z)$$

— дистрибутивность умножения относительно сложения;

$$\max(\min(x, y),\ z) = \min(\max(x, z),\ \max(y, z))$$

— дистрибутивность операции max относительно операции min;

$$\min(\max(x, y),\ z) = \max(\min(x, z),\ \min(y, z))$$

— дистрибутивность операции min относительно операции max;

$$\max(x, x) = x, \quad \min(x, x) = x$$

— идемпотентность операций max и min;

$$\min(\sim x, \sim y) = \sim \max(x, y), \quad \max(\sim x, \sim y) = \sim \min(x, y)$$

— аналоги правил де Моргана в P_2.

Следующие равенства вводятся по определению:

$$\max(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n) = \max(\max(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}),\ x_n), \quad n \geqslant 3;$$
$$\min(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_n) = \min(\min(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}),\ x_n), \quad n \geqslant 3;$$

$$-x = \begin{cases} 0, & \text{если } x = 0, \\ k - x, & \text{если } x \neq 0. \end{cases}$$

Принимая во внимание ассоциативность умножения по модулю k, произведение $xx \ldots x$ (l сомножителей, $l \geqslant 1$) записывают часто в виде степени x^l.

*) Всюду в этой главе, если не оговаривается противное, знаки + и · понимаются как знаки *сложения* и *умножения* по модулю k.

1.1. Доказать справедливость следующих равенств:

1) $-(\overline{x}) = \sim x$; 2) $x \supset y = \sim (x \dot{-} y)$; 3) $x \dot{-} (x \dot{-} y) = \min(x, y)$;
4) $(x \supset y) \supset y = \max(x, y)$; 5) $(x \supset y) + \overline{x} = \min(x, y)$;
6) $x \dot{-} y = x - \min(x, y)$; 7) $x \dot{-} y = \max(x, y) - y$;
8) $(\sim x) \dot{-} (y \dot{-} x) = \sim \max(x, y)$; 9) $(\sim x) \dot{-} (\sim y) = y \dot{-} x$;
10) $\sim (\overline{x} + y) = (\sim x) + (\sim y)$; 11) $\overline{\sim (\overline{x} \cdot \overline{y})} = (\sim x) \cdot \overline{y}$;
12) $\max((x + 2) \dot{-} 1,\ J_{k-2}(x)) = \overline{x}$;
13) $\min(\sim J_{k-1}(x),\ (k - 2) \supset x) = \overline{x}$;
14) $\overline{x} \dot{-} \overline{y} = (x \dot{-} y) + \overline{x} \cdot j_{k-1}(y) + \overline{y} \cdot j_{k-1}(x)$;
15) $v_k(x, y) + \overline{x} \cdot j_{k-1}(y) + \overline{y} \cdot j_{k-1}(x) = \max(\overline{x}, \overline{y})$;
16) $\max(x, y) + j_0(y \dot{-} x) + j_{k-1}(x) \cdot y = \max(\overline{x}, y)$;
17) $\overline{\min(x, y)} + J_0(y \dot{-} x) - j_{k-1}(x) \cdot y = \min(\overline{x}, y)$;
18) $J_0(\max(J_0(x),\ J_1(x),\ \ldots,\ J_{k-2}(x))) = J_{k-1}(x)$;
19) $J_1(\max(x,\ 1,\ J_1(x),\ J_2(x),\ \ldots,\ J_{k-2}(x))) = J_0(x)$;
20) $x \cdot j_0(j_1(x)) + j_0(x) \cdot \overline{j_1(x)} = x + j_0(x) - j_1(x)$;
21) $J_0(x \dot{-} i) \dot{-} J_0(x \dot{-} (i - 1)) = J_i(x), \quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ k - 1$;
22) $(\sim ((\sim x) \dot{-} 1)) \dot{-} (\ldots (((k - 1) \dot{-}$
$\dot{-} \underbrace{(\sim x)) \dot{-} (\sim x) \dot{-} \ldots \dot{-} (\sim x))}_{k-1 \text{ раз}} = \overline{x}$;
23) $(\ldots (((k - 1) \dot{-} j_0(x)) \dot{-} j_0(x \dot{-} 1)) \dot{-} \ldots$
$\ldots \dot{-} j_0(x \dot{-} (k - 3))) \dot{-} ((k - 1) \cdot j_0(\sim x)) = \overline{x}$.

1.2. Показать, что функция f из P_k порождается с помощью операции суперпозиции множеством функций A $(A \subset P_k)$, если:

1) $f = J_1(x), \quad A = \{J_0(x),\ J_2(x),\ \max(x, y)\}, \quad k = 3$;
2) $f = \sim x, \quad A = \{J_0(x),\ J_1(x),\ \min(x, y),\ \max(x, y)\}, \quad k = 3$;
3) $f = \overline{x}, \quad A = \{1,\ x^2,\ J_1(x),\ \max(x, y)\}, \quad k = 3$;
4) $f = j_0(x), \quad A = \{x - 1,\ x^2\}, \quad k = 3,\ 5$;
5) $f = j_1(x), \quad A = \{x \cdot y + x - y^2 + 1\}, \quad k = 3,\ 5$;
6) $f = \sim x, \quad A = \{1,\ x \cdot \overline{y}\}, \quad k = 3,\ 5$;
7) $f = \overline{x}, \quad A = \{3,\ j_0(x),\ x \dot{-} y\}, \quad k = 4$;
8) $f = \sim x, \quad A = \{x + 2,\ J_0(x),\ J_1(x),\ \max(x, y),\ x \cdot y\}, \quad k = 4$;
9) $f = j_4(x), \quad A = \{x \dot{-} 1,\ J_2(x)\}, \quad k = 6$;
10) $f = j_5(x), \quad A = \{x + 2,\ x^2,\ J_3(x)\}, \quad k = 6$;
11) $f = j_1(x), \quad A = \{\overline{x},\ -x,\ J_{k-1}(x)\}$;
12) $f = J_{k-1}(x), \quad A = \{\sim x,\ x \dot{-} y\}$;
13) $f = J_{k-2}(x), \quad A = \{k - 1,\ x + 2,\ x \dot{-} y\}$;
14) $f = j_0(x), \quad A = \{1,\ \sim x,\ x \dot{-} 2y\}$;
15) $f = \overline{x}, \quad A = \{1,\ \sim x,\ x \dot{-} y\}$.

1.3. Доказать, что если α принадлежит E_k и взаимно просто с k, то каждую функцию $J_i(x)$ $(0 \leqslant i \leqslant k - 2)$ можно представить в виде суперпозиции над множеством $\{x + \alpha,\ J_{k-1}(x)\}$.

1.4. Показать, что функция φ из P_k представима формулой над множеством $\{0, 1, \ldots, k-1, x \dot{-} 2y\}$, если:

1) $\varphi = j_{k-1}(x)$, $k = 2m$ $(m \geqslant 2)$; 2) $\varphi = j_0(x)$, $k = 2m+1$ $(m \geqslant 1)$.

1.5. Пусть $h_1(x) = \sim x$, $h_{i+1}(x) = x \supset h_i(x)$ $(i \geqslant 1)$. Доказать, что $\sim h_{k-1}(x) = J_{k-1}(x)$.

1.6. При каких значениях k $(k \geqslant 3)$ функции x^2, x^3 и x^4 попарно различны?

1.7. Пусть $k = 3, 4, \ldots, 9, 10$. Для каждого такого k выяснить, сколько различных функций из P_k, зависящих только от переменной x, можно представить в форме x^l ($l \geqslant 1$ и степень рассматривается по модулю k).

1.8. Доказать, что каждую одноместную функцию $f(x)$ из P_k можно представить в виде суперпозиции над множеством $\{1, J_{k-1}(x), x + y\}$.

1.9. Функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ из P_3 удовлетворяют следующим условиям: $f_1(x) \not\equiv \text{const}$, $f_1(E_3) \neq E_3$ и $f_2(E_3) = E_3$, где $f(E) = \{f(e): e \in E\}$. Доказать, что функция $g(x) = f_1(x) + f_2(x)$, где сумма берется по модулю 3, выпускает хотя бы одно значение из E_3, т. е. $g(E_3) \neq E_3$.

1.10. Пусть функция $f(x)$ из P_3 представима в виде $a_0x^2 + a_2x + a_2$ (здесь сумма и произведение берутся по модулю 3 и a_0, a_1, a_2 принадлежат E_3). Выяснить, какие значения могут принимать коэффициенты a_0, a_1, a_2, если известно, что функция $f(x)$ выпускает хотя бы одно значение из E_3, т. е. $f(E_3) \neq E_3$.

2. Разложение функций k-значных логик в первую и вторую формы. Любую функцию $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ из P_k $(n \geqslant 1)$ можно представить в так называемой *первой форме*, являющейся аналогом совершенной д. н. ф. для функций алгебры логики:

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \max_{\widetilde{\sigma}} \{\min(f(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n), J_{\sigma_1}(x_1), J_{\sigma_2}(x_2), \ldots, J_{\sigma_n}(x_n))\},$$

где максимум берется по всем наборам $\widetilde{\sigma} = (\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$ значений переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

Справедливо еще одно представление для функций k-значной логики, называемое *второй формой*:

$$f(\widetilde{x}^n) = \sum_{\widetilde{\sigma}} f(\widetilde{\sigma}) j_{\sigma_1}(x_1) \ldots j_{\sigma_n}(x_n),$$

где суммирование ведется по всем наборам $\widetilde{\sigma} = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ значений переменных $x_1, \ldots, x_n$ (сумма и произведение берутся по модулю k).

Пример. Представить функцию $f(x, y) = \max(j_0(x) \cdot j_0(y), x \cdot (j_1(y) + 2j_2(y)))$ из P_3 в первой и второй формах.

Таблица 3.1

y	x		
	0	1	2
0	1	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

Решение. Сначала выпишем значения функции f в таблицу (табл. 3.1).

Затем по этой таблице строим первую и вторую формы функции f. Первая форма выглядит

следующим образом:

$$f(x,\,y)=\max\{\min(1,\,J_0(x),\,J_0(y)),\ \min(0,\,J_0(x),\,J_1(y)),$$
$$\min(0,\,J_0(x),\,J_2(y)),\ \min(0,\,J_1(x),\,J_0(y)),\ \min(1,\,J_1(x),\,J_1(y)),$$
$$\min(2,\,J_1(x),\,J_2(y)),\ \min(0,\,J_2(x),\,J_0(y)),\ \min(2,\,J_2(x),\,J_1(y)),$$
$$\min(1,\,J_2(x),\,J_2(y))\}.$$

Выполняя простые преобразования, имеем

$$f(x,\,y)=\max\{\min(1,\,J_0(x),\,J_0(y)),\ \min(1,\,J_0(x),\,J_1(y)),$$
$$\min(J_1(x),\,J_2(y)),\ \min(J_2(x),\,J_1(y)),\ \min(1,\,J_2(x),\,J_2(y))\},$$

$$f(x,\,y)=1\cdot j_0(x)\cdot j_0(y)+0\cdot j_0(x)\cdot j_1(y)+0\cdot j_0(x)\cdot j_2(y)+$$
$$+0\cdot j_1(x)\cdot j_0(y)+1\cdot j_1(x)\cdot j_1(y)+2\cdot j_1(x)\cdot j_2(y)+0\cdot j_2(x)\cdot j_0(y)+$$
$$+2\cdot j_2(x)\cdot j_1(y)+1\cdot j_2(x)\cdot j_2(y)=j_0(x)\cdot j_0(y)+j_1(x)\cdot j_1(y)+$$
$$+2\cdot j_1(x)\cdot j_2(y)+2\cdot j_2(x)\cdot j_1(y)+j_2(x)\cdot j_2(y).$$

1.11. Для заданного k представить функцию f в первой и второй формах (полученные выражения упростить):

1) $f=\overline{x},\ k=3$; 2) $f=\sim x,\ k=4$; 3) $f=-j_0(x),\ k=5$;
4) $f=2J_1(x),\ k=6$; 5) $f=J_2(x^2+x),\ k=5$;
6) $f=(\sim x)^2+x,\ k=4$; 7) $f=3j_1(x)-j_3(x),\ k=4$;
8) $f=x+2y,\ k=3$; 9) $f=\max(x,\,y),\ k=3$;
10) $f=x\dot{-}y^2,\ k=3$; 11) $f=x^2\cdot y,\ k=3$;
12) $f=x\cdot\overline{y},\ k=4$.

1.12. Доказать справедливость следующего соотношения, являющегося аналогом совершенной конъюнктивной нормальной формулы для функций из P_k:

$$f(\widetilde{x}^n)=\min_{\widetilde{\sigma}}\{\max(f(\sigma_1,\,\sigma_2,\,\ldots,\,\sigma_n),\ \sim J_{\sigma_1}(x_1),\ \sim J_{\sigma_2}(x_2),\ \ldots$$
$$\ldots,\ \sim J_{\sigma_n}(x_n))\}$$

(здесь $n\geqslant 1$ и минимум берется по всем наборам $\widetilde{\sigma}=(\sigma_1,\,\sigma_2,\,\ldots,\,\sigma_n)$ значений переменных $x_1,\,x_2,\,\ldots,\,x_n$).

§ 2. Замкнутые классы и полнота в k-значных логиках

1. Некоторые замкнутые классы k-значных логик. Представление функций из P_k полиномами по модулю k. Пусть $\mathfrak{E}$ — подмножество множества E_k. Говорят, что функция $f(\widetilde{x}^n)$ из P_k $(n\geqslant 1)$ *сохраняет множество* $\mathfrak{E}$, если на любом наборе $\widetilde{\alpha}^n=(\alpha_1,\,\alpha_2,\ldots,\,\alpha_n)$ таком, что $\alpha_i\in\mathfrak{E}$ $(i=1,\,2,\,\ldots,\,n)$, она принимает значение $f(\widetilde{\alpha}^n)$, также принадлежащее $\mathfrak{E}$. При $n=0$ считают по определению, что функция $f\equiv a$ $(a\in E_k)$ *сохраняет множество* $\mathfrak{E}$ только в том случае, когда $a\in\mathfrak{E}$. *Множество всех функций из* P_k, *сохраняющих множество* $\mathfrak{E}$, является замкнутым классом; оно обозначается через $T(\mathfrak{E})$ и называется *классом сохранения множества* $\mathfrak{E}$.

Если $\mathfrak{E}$ — собственное подмножество множества E_k $\left(\text{т. е. } \varnothing \subsetneqq \mathfrak{E} \subsetneqq E_k\right)$, то $T(\mathfrak{E}) \neq P_k$ (см. задачу 2.3).

Пусть $D = \{\mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2, \ldots, \mathfrak{E}_s\}$ — разбиение множества E_k, т. е. $E_k = \bigcup\limits_{i=1}^{s} \mathfrak{E}_i$, $\mathfrak{E}_i \neq \varnothing$ при $i = 1, 2, \ldots, s$ и $\mathfrak{E}_i \cap \mathfrak{E}_j \neq \varnothing$ при $i \neq j$. Говорят, что элементы a и b из E_k *эквивалентны относительно разбиения* D (обозначение $a \sim b \,(\mathrm{mod}\, D)$), если a и b принадлежат одному и тому же подмножеству $\mathfrak{E}_j$ разбиения D. Два набора $\widetilde{\alpha}^n$ и $\widetilde{\beta}^n$ называются *эквивалентными относительно разбиения* D (обозначение $\widetilde{\alpha}^n \sim \widetilde{\beta}^n \,(\mathrm{mod}\, D)$), если $\alpha_i \sim \beta_i \,(\mathrm{mod}\, D)$ при $i = 1, 2, \ldots, n$. Говорят, что функция $f(\widetilde{x}^n)$ из P_k $(n \geqslant 1)$ *сохраняет разбиение* D, если для любых наборов $\widetilde{\alpha}^n$ и $\widetilde{\beta}^n$ из эквивалентности $\widetilde{\alpha}^n \sim \widetilde{\beta}^n \,(\mathrm{mod}\, D)$ следует эквивалентность $f(\widetilde{\alpha}^n) \sim f(\widetilde{\beta}^n) \,(\mathrm{mod}\, D)$. По определению считают, что всякая константная функция (т. е. нульместная функция вида $f = a$, $a \in E_k$) сохраняет любое разбиение D.

Множество всех функций из P_k, *сохраняющих разбиение* $D = \{\mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2, \ldots, \mathfrak{E}_s\}$, является замкнутым классом; оно обозначается через $U(D)$ или $U(\mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2, \ldots, \mathfrak{E}_s)$ и называется *классом сохранения разбиения* D. Если $s \neq 1$ и $s \neq k$, то класс $U(D)$ отличен от P_k (см. задачу 2.4).

Функция $f(\widetilde{x}^n)$ из P_k $(n \geqslant 0)$ называется *линейной*, если она представима в виде $a_0 + a_1 x_1 + \ldots + a_n x_n$, где $a_j \in E_k$ $(j = 0, 1, \ldots, n)$, а сумма и произведение берутся по модулю k. *Множество всех линейных функций из* P_k образует замкнутый *класс линейных функций*, который обозначается через L_k (или L). Класс L_k отличен от P_k при всяком $k \geqslant 3$. *Полиномом* (или *многочленом*) *по модулю* k от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называется выражение вида $a_0 + a_1 X_1 + \ldots + a_m X_m$, где коэффициенты a_i принадлежат множеству E_k и X_j — либо некоторая переменная из $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, либо произведение переменных из этого множества $(j = 1, \ldots, m)$.

Говорят, что некоторая функция из P_k *представима* (или *реализуется*) *полиномом по модулю* k, если существует полином по модулю k, равный этой функции. Множество всех функций из P_k, представимых полиномами по модулю k (или, короче, множество всех полиномов по модулю k), является замкнутым классом в P_k.

Теорема (критерий полноты класса полиномов в P_k). *Представление каждой функции из* P_k *полиномом по модулю* k *возможно в том и только том случае, когда* k — *простое число* (*иными словами, система полиномов по модулю* k *полна в* P_k *тогда и только тогда, когда* k — *простое число*).

Если k — составное число, то в P_k имеются функции, представимые полиномами, и функции, не представимые полиномами (например, константные функции $0, 1, \ldots, k-1$ и «полиномиальные» x, x^2, $x \cdot y$, $x + y$ представимы полиномами, а функции $j_0(x)$, $\max(x, y)$, $\min(x, y)$, $x \dot{-} y$ не представимы).

Пример 1. Представить полиномом по модулю 5 функцию $f(x) = x^2 \dot{-} x$ из P_5.

Решение. Сначала представим функцию $f(x)$ во второй форме:

$$f(x) = \sum_{\sigma} f(\sigma) \cdot j_\sigma(x) = f(0) \cdot j_0(x) + f(1) \cdot j_1(x) + \\ + f(2) \cdot j_2(x) + f(3) \cdot j_3(x) + f(4) \cdot j_4(x) = \\ = 0 \cdot j_0(x) + 0 \cdot j_1(x) + 2 \cdot j_2(x) + 1 \cdot j_3(x) + 0 \cdot j_4(x) = 2 \cdot j_2(x) + j_3(x).$$

Далее воспользуемся тем, что $j_0(x) = 1 - x^{k-1}$, если k — простое число $(k \geqslant 3)$, и что $j_i(x) = j_0(x - i)$, $i = 1, \ldots, k-1$. (Здесь, как обычно, разность и степень берутся по модулю k.) Имеем

$$j_2(x) = 1 - (x-2)^4 = -x^4 - 2x^3 + x^2 + 2x,$$
$$j_3(x) = 1 - (x-3)^4 = 1 - (x+2)^4 = -x^4 + 2x^3 + x^2 - 2x.$$

Следовательно, $x^2 \dot{-} x = 2x^4 - 2x^3 - 2x^2 + 2x$. Это выражение можно записать компактнее: $2x(x-1)^2(x+1$.

Полином, реализующий функцию $f(x)$, можно найти также *методом неопределенных коэффициентов*: пусть $f(x) = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot x^2 + a_3 \cdot x^3 + a_4 \cdot x^4$ (более высокие показатели степени рассматривать не нужно, ибо $x^{4+l} = x^l \pmod 5$). Составим систему:

$$a_0 = f(0) = 0,$$
$$a_0 + a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = f(1) = 0,$$
$$a_0 + 2a_1 + 4a_2 + 3a_3 + a_4 = f(2) = 2,$$
$$a_0 + 3a_1 + 4a_2 + 2a_3 + a_4 = f(3) = 1,$$
$$a_0 + 4a_1 + a_2 + 4a_3 + a_4 = f(4) = 0.$$

Решая ее, например, методом исключения, находим: $a_0 = 0$, $a_1 = 2$, $a_2 = 3$, $a_3 = 3$, $a_4 = 2$.

Пример 2. Доказать, что функция $f(x, y) = x^2 \dot{-} y$ из P_4 не представима полиномом по модулю 4.

Решение. Предположим противное, т. е. что $f(x, y)$ реализуется полиномом по модулю 4, и запишем этот гипотетический полином в общем виде (с неопределенными коэффициентами):

$$f(x,y) = (a_{00} + a_{10}x + a_{20}x^2 + a_{30}x^3) + (a_{01}y + a_{11}xy + a_{21}x^2y + a_{31}x^3y) + \\ + (a_{02}y^2 + a_{12}xy^2 + a_{22}x^2y^2 + a_{32}x^3y^2) + \\ + (a_{03}y^3 + a_{13}xy^3 + a_{23}x^2y^3 + a_{33}x^3y^3).$$

(Показатель степени выше 3 рассматривать не надо, так как при $l \geqslant 1$ справедливы соотношения $x^{2l+2} = x^2 \pmod 4$ и $x^{2l+3} = x^3 \pmod 4$). Имеем

$$f(1, 0) = a_{00} + a_{10} + a_{20} + a_{30} = 1,$$
$$f(1, 2) = a_{00} + a_{10} + a_{20} + a_{30} + 2(a_{01} + a_{11} + a_{21} + a_{31}) = 0. \qquad (*)$$

Так как уравнение $1 + 2a = 0 \pmod 4$ решений не имеет (в чем можно убедиться непосредственно, полагая последовательно $a = 0$, 1, 2, 3), то система $(*)$ также не имеет решения. Следовательно,

нельзя подобрать подходящие коэффициенты a_{ij}, которые обеспечили бы представимость функции f в виде полинома по модулю 4. Значит, функция f не реализуема полиномом по модулю 4.

Замечание. В рассмотренной задаче достаточно было выписать два соотношения между коэффициентами. Однако иногда бывает необходимо рассматривать более полную совокупность уравнений. В п. 2 мы продемонстрируем другие методы доказательства непредставимости функций из P_k полиномами по модулю k.

2.1. 1) Выяснить, каким из классов $T(\{0, 2\})$ и $U(\{0, 1\}, \{2\})$ принадлежат следующие функции из P_3: а) $\sim x$; б) $j_1(x)$; в) $J_2(x)$; г) $x \dot{-} y$; д) $x + y$; е) $\min(x, y)$.

2) Выяснить, каким из классов $T(\{1, 3\})$, $U(\{0, 1\}, \{2\}, \{3\})$ и $U(\{0, 3\}, \{1, 2\})$ принадлежат следующие функции из P_4: а) $\overline{x}$; б) $\sim x$; в) $j_0(x)$; г) $x + 2y$; д) $\max(x, y)$; е) $x^2 \cdot y$.

2.2. Для функции f из P_k при заданном k подобрать классы типа $T(\mathfrak{E})$ и $U(D)$, которым она принадлежит. При этом $\mathfrak{E}$ должно быть собственным подмножеством множества E_k (т. е. $\mathfrak{E} \neq \varnothing$ и $\mathfrak{E} \neq E_k$, а D — таким разбиением $\{\mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2, \ldots, \mathfrak{E}_s\}$ множества E_k, чтобы выполнялись неравенства $1 < s < k$:

1) $k = 3$, $f = x^2 + 1$; 2) $k = 3$, $f = J_0(x^2 + 2x)$;

3) $k = 3$, $f = (x^2 \dot{-} y^2) + 1$; 4) $k = 3$, $f = x \cdot \overline{y} - y + 1$;

5) $k = 4$, $f = j_2(x - x^2)$; 6) $k = 4$, $f = J_3(2x + x^2)$;

7) $k = 4$, $f = x \cdot y - y + 3$; 8) $k = 5$, $f = \min(x^2, y)$;

9) $k = 5$, $f = (2x^2 \dot{-} y) - 1$; 10) $k = 6$, $f = x^3 \cdot y + 2$;

11) k — произвольное число, не меньшее 3, $f = j_1(2x \dot{-} x^2)$;

12) k — произвольное число, не меньшее 3, $f = J_{k-1}(x \cdot y - 1)$.

2.3. 1) Пусть $\mathfrak{E} \subseteq E_k$. Доказать, что $T(\mathfrak{E}) \neq P_k$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{E}$ — собственное подмножество множества E_k (т. е. $\mathfrak{E} \neq \varnothing$ и $\mathfrak{E} \neq E_k$).

2) Сколько существует различных замкнутых классов в P_k, являющихся классами сохранения множеств?

3) Пусть $\mathfrak{E} \subseteq E_k$. Подсчитать число функций в P_k, содержащихся в классе $T(\mathfrak{E})$ и зависящих от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ $(n \geqslant 0)$.

2.4. 1) Пусть $D = \{\mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2, \ldots, \mathfrak{E}_s\}$ — разбиение множества E_k. Доказать, что $U(D) \neq P_k$ тогда и только тогда, когда $1 < s < k$.

2) Для $k = 3, 4, 5$ подсчитать число различных замкнутых классов в P_k, являющихся классами сохранения разбиений.

3) Пусть $D = \{\mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2, \ldots, \mathfrak{E}_s\}$ — разбиение множества E_k. Подсчитать число функций в P_k, содержащихся в классе $U(D)$ и зависящих от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ $(n \geqslant 0)$.

2.5. Пусть $\mathfrak{E}$ — непустое подмножество из E_k, отличное от всего E_k, и $D = \{\mathfrak{E}, E_k \backslash \mathfrak{E}\}$. Подсчитать число функций в P_k, зависящих от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ $(n \geqslant 0)$ и содержащихся в множестве:

1) $T(\mathfrak{E}) \backslash U(D)$; 2) $U(D) \backslash T(\mathfrak{E})$; 3) $T(\mathfrak{E}) \cup U(D)$.

2.6. Через S_k обозначается множество всех разнозначных функций из P_k, зависящих от одной переменной (т.е. $g(x)$ принадлежит S_k тогда и только тогда, когда $g(E_k) = E_k$). Пусть $P_k^{(1)}$ — множество всех функций k-значной логики P_k, зависящих от одной переменной, и $CS_k = P_k^{(1)} \setminus S_k$.

1) Показать, что множества S_k и CS_k являются замкнутыми классами.

2) Подсчитать число функций, зависящих от переменной x и принадлежащих классу $S_k \cap U(\{0, k-2\}, \{1, \ldots, k-3\}, \{k-1\})$. (При $k = 3$ считаем, что $\{1, \ldots, k-3\} = \varnothing$.)

2.7. Разложить в полином по модулю k функцию f из P_k:

1) $f = 2x \dot{-} x^2$, $k = 5$; 2) $f = \min(x^2, x^3)$, $k = 5$;

3) $f = \max(2x \dot{-} 1, x^2)$, $k = 5$; 4) $f = 3x \dot{-} (x \dot{-} 2x)$, $k = 7$;

5) $f = \max((x \dot{-} 1)^2, x^3)$, $k = 7$; 6) $f = \min(x^2, y)$, $k = 3$;

7) $f = \max(2x \dot{-} y, x \cdot y)$, $k = 3$; 8) $f = x \dot{-} y$, $k = 3$;

9) $f = J_{k-2}(x)$, k — произвольное простое число;

10) $f = j_2(x - x^2)$, k — произвольное простое число.

2.8. 1) Доказать, что функция $2j_i(x)$ из P_4 при любом $i = 0, 1, 2, 3$ представима полиномом по модулю 4.

2) Доказать, что если функция из P_4, зависящая от одной переменной, принимает значения либо только из множества $\{0, 2\}$, либо только из множества $\{1, 3\}$, то она представима полиномом по модулю 4.

3) Используя функцию $f(x, y) = 2 \cdot j_0(x) \cdot j_0(y)$ (из P_4), показать, что утверждение 2) не обобщается на функции, зависящие более чем от одной переменной.

2.9. Доказать, что если функция $f(x)$ из P_4 не представима полиномом по модулю 4, то при любом целом $m \geqslant 2$ функция $(f(x))^m$, равная m-й степени функции $f(x)$, также не представима полиномом по модулю 4.

2.10. Подсчитать число функций в P_4, которые зависят только от переменной x и реализуются полиномами по модулю 4.

2.11. 1) Пусть функция $f(x)$ из P_6 реализуется полиномом по модулю 6. Доказать, что ее можно реализовать полиномом по модулю 6, имеющим вид $a_0 + a_1 x + a_2 x^2$.

2) Доказать, что в P_6 число функций, зависящих от переменной x и представимых полиномами по модулю 6, равно 108.

3) Перечислить все функции $f(x)$ из P_6, которые представимы в виде $a + b \cdot j_0(x)$ (a и b принадлежат E_6), не реализуемы полиномами по модулю 6 и удовлетворяют следующему условию: функция $(f(x))^2$ реализуема полиномом по модулю 6.

2.12. Выяснить, представима ли полиномом по модулю k функция f из P_k, если:

1) $f = 3x \dot{-} 2x^2$, $k = 4$; 2) $f = 3j_0(x)$, $k = 6$;

3) $f = 2 \cdot (J_1(x) + J_4(x))$, $k = 6$; 4) $f = (x \dot{-} y) \dot{-} y$, $k = 4$;
5) $f = (\max(x, y) - \min(x, y))^2$, $k = 4$.

2. Исследование систем функций k-значной логики на полноту. В k-значных логиках исследование произвольной системы функций на полноту сопряжено с большими техническими трудностями: использование критерия полноты, основанного на рассмотрении совокупности всех предполных классов в P_k, даже при $k = 3, 4$ требует проверки весьма значительного числа условий (так как в P_3 существует ровно 18, а в P_4 — ровно 82 предполных класса). Доказательства полноты конкретных систем в P_k проводятся обычно методом сведения к заведомо полным системам (таким, например, как *система Россера–Туркетта*

$$\{0, 1, \ldots, k-1, J_0(x), J_1(x), \ldots, J_{k-1}(x), \min(x, y), \max(x, y)\}$$

или *система Поста* $\{\overline{x}, \max(x, y)\}$). Существует, кроме того, ряд признаков полноты, в которых рассматриваются множества функций, содержащие некоторые совокупности функций от одной переменной и еще только одну функцию, существенно зависящую не менее чем от двух переменных. Сформулируем наиболее важные из таких признаков. Напомним, что:

S_k — это множество всех разнозначных функций из P_k, зависящих от одной переменной;

$CS_k = P_k^{(1)} \backslash S_k$;

$P_k^{(1)}$ — множество всех одноместных функций из P_k.

Функция $f(\widetilde{x}) \in P_k$ называется *существенной*, если она зависит существенно не менее чем от двух переменных и принимает все k значений из множества E_k.

Теорема 1 (критерий Е. Слупецкого). *Система* $P_k^{(1)} \cup \{f(\widetilde{x})\}$ *полна в* P_k (*при* $k \geqslant 3$) *тогда и только тогда, когда* $f(\widetilde{x})$ — *существенная функция.*

Теорема 2 (критерий С. В. Яблонского). *Система* $CS_k \cup \{f(\widetilde{x})\}$ *полна в* P_k (*при* $k \geqslant 3$) *тогда и только тогда, когда* $f(\widetilde{x})$ — *существенная функция.*

Теорема 3 (критерий А. Са́ломаа). *Система* $S_k \cup \{f(\widetilde{x})\}$ *полна в* P_k (*при* $k \geqslant 5$) *тогда и только тогда, когда функция* $f(\widetilde{x})$ *существенная.*

При использовании этих теорем полезными являются утверждения, дающие разнообразные критерии полноты систем функций в множествах $P_k^{(1)}$, S_k и CS_k. Приведем один из таких результатов. Пусть функция $h_{ij}(x)$, где $0 \leqslant i < j \leqslant k-1$, определяется так:

$$h_{ij}(x) = \begin{cases} i, & \text{если } x = j, \\ j, & \text{если } x = i, \\ x & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Теорема 4 (С. Пикар). *Каждая из систем* $\{\overline{x}, h_{01}(x), x + j_0(x)\}$ *и* $\{h_{01}(x), h_{02}(x), \ldots, h_{0(k-1)}(x), x + j_0(x)\}$ *полна в* $P_k^{(1)}$.

2.13. Подобрав подходящий класс типа $T(\mathfrak{E})$ или $U(D)$ доказать, что система A не полна в P_k:

1) $A = \{\sim x,\ \min(x, y),\ x \cdot y^2\}$;

2) $A = \{1,\ 2,\ \overline{x \dot{-} j_2(x)},\ \max(x, y)\}$;

3) $A = \{2,\ j_0(x),\ x + j_0(x) + J_1(x) + J_{k-1}(x),\ \min(x, y)\}$;

4) $A = \{J_2(x),\ x + j_0(x),\ x + j_0(x) + J_1(x),\ \max(x, y)\}$;

5) $A = \{k - 1,\ J_0(x),\ x \dot{-} y,\ x \cdot y \cdot z\}$;

6) $A = \{2x^3,\ 2x + y,\ x^2 \cdot y,\ x \cdot J_0(y),\ \overline{x}^2 + (\sim y)\}$;

7) $A = \{x \cdot y,\ \max(x, y) - z + 1\}$; 8) $A = \{-x^2,\ \max(x, y) + \overline{z}\}$;

9) $A = \{1,\ -x \cdot y,\ \overline{x^2 \dot{-} y}\}$; 10) $A = \{2,\ \max(x, y),\ x \dot{-} y\}$;

11) $A = \{k - 2,\ \sim j_{k-2}(x),\ \max(x, y),\ \overline{x} + \overline{y}\}$;

12) $A = \{j_2(x),\ x + j_0(x) + J_1(x),\ x \cdot y,\ x \dot{-} y\}$;

13) $A = \{1,\ J_0(x),\ \overline{x} + j_{k-1}(x),\ \min(x, y),\ \max(x, y)\}$;

14) $A = \{1,\ 2,\ \ldots,\ k - 1,\ x + j_0(x),\ j_2(x) + 1,\ \max(x, y)\}$;

15) $A = \{1,\ \sim x,\ \overline{x \dot{-} y},\ \min(x, y)\}$;

16) $A = \{\sim x,\ J_0(x),\ J_1(x),\ \ldots,\ J_{k-1}(x),\ \min(x, y) + (j_0(x) + j_0(y)) \cdot (x + y)\}$;

17) $A = \{1 - x,\ j_0(x),\ j_1(x),\ \ldots,\ j_{k-1}(x),\ x \cdot y,\ x \dot{-} y),\ \min(x, \overline{y})\}$.

2.14. Как известно (см. § 1), система

$$A = \{0,\ 1,\ \ldots,\ k - 1,\ j_0(x),\ j_1(x),\ \ldots,\ j_{k-1}(x),\ x + y,\ x \cdot y\}$$

полна в P_k.

1) Доказать, что из системы A можно выделить полную в P_k подсистему, состоящую из двух функций.

2) Показать, что любая подсистема системы A, состоящая из одной функции, не полна в P_k.

2.15. Система Россера–Туркетта

$A_1 = \{0, 1, \ldots,\ k - 1, J_0(x), J_1(x), \ldots, J_{k-1}(x), \min(x, y), \max(x, y)\}$, как известно, полна в P_k (см. § 1).

1) Проверить, что, удаляя из A_1 любую константу, отличную от 0 и $k - 1$, получаем подсистему, содержащуюся в некотором классе типа $T(\mathfrak{E})$, где $\varnothing \neq \mathfrak{E} \neq E_k$ (и, значит, неполную в P_k).

2) Выделить из системы A_1 полную в P_k подсистему, состоящую из $2k - 2$ функций.

2.16. Для заданных k исследовать на полноту следующие подсистемы системы Россера–Туркетта:

1) $k = 3$, $\{1,\ J_0(x),\ J_2(x),\ \min(x, y),\ \max(x, y)\}$;

2) $k = 3$, $\{1,\ 2,\ J_2(x),\ \min(x, y),\ \max(x, y)\}$;

3) $k = 4$, $\{1,\ 2,\ J_0(x),\ J_1(x),\ \min(x, y),\ \max(x, y)\}$;

4) $k = 4$, $\{1,\ 2,\ J_0(x),\ J_3(x),\ \min(x, y),\ \max(x, y)\}$.

2.17. Доказать, что каждая из приводимых ниже систем полна в S_k:

1) $\{h_{01}(x),\ h_{02}(x),\ \ldots,\ h_{0(k-1)}(x)\}$;

2) $\{h_{01}(x),\ h_{12}(x),\ \ldots,\ h_{i,i+1}(x),\ \ldots,\ h_{k-2,k-1}(x)\}$;
3) $\{\overline{x},\ h_{01}(x)\}$.

2.18. Доказать, что система $\{h_{01}(x),\ h_{02}(x),\ \ldots,\ h_{0,k-1}(x),\ x + j_0(x)\}$ полна в $P_k^{(1)}$.

2.19. Используя метод сведения к заведомо полным системам, доказать полноту в P_k следующих систем:
1) $\{J_0(x),\ J_1(x),\ \ldots,\ J_{k-1}(x),\ x^2,\ x \dot{-} y\}$;
2) $\{k-1,\ x \dot{-} y,\ x+y\}$; 3) $\{\sim x,\ x+2,\ x \dot{-} y\}$;
4) $\{-x,\ 1-x^2,\ x \dot{-} y\}$; 5) $\{x+y,\ (\sim x) \dot{-} 2y\}$;
6) $\{\overline{x},\ \min(x,\ y)\}$; 7) $\{\min(x,\ y)-1\}$; 8) $\{J_{k-1}(x),\ x+y,\ x \cdot y\}$;
9) $\{1,\ x^2+y,\ x^2 \dot{-} y\}$; 10) $\{J_0(x),\ x+y,\ x \cdot y^2\}$;
11) $\{k-2,\ x \cdot y+1,\ (\sim x) \dot{-} y\}$; 12) $\{k-1,\ x^2-y,\ x^2 \dot{-} y\}$;
13) $\{1,\ 2 \cdot x+y,\ x \cdot y\}$; 14) $\{1,\ x^2-y,\ \min(x,\ y)\}$;
15) $\{1,\ x+y+2,\ x^2 \dot{-} y\}$; 16) $\{\overline{x} \cdot j_0(y),\ \min(x,\ y)\}$.

2.20. Используя критерий Слупецкого, доказать полноту в P_k нижеприводимых систем:
1) $\{k-1,\ x-y+2,\ x^2 \dot{-} y\}$; 2) $\{j_2(x),\ x+y^2,\ x \cdot y+1\}$;
3) $\{x \dot{-} y,\ (\sim x)-y\}$; 4) $\{j_1(x),\ \overline{x}-y,\ x^2-y\}$; 5) $\{\overline{x},\ j_0(x),\ x \cdot y\}$;
6) $\{x-1,\ (x+j_0(x)) \cdot (1 \dot{-} y)+(1 \dot{-} x) \cdot (y-j_1(y))\}$;
7) $\{(1 \dot{-} x) \cdot y+\overline{x} \cdot (1 \dot{-} y)\}$;
8) $\{\overline{x} \cdot j_0(x-y)+(x-j_1(x)) \cdot j_0(y)+y \cdot j_0(x)\}$;
9) $\{j_0(x-y)+x \cdot j_0(y)+(\overline{x}-j_1(x)) \cdot j_1(y)\}$;
10) $\{x \cdot j_0(y)+j_0(x) \cdot (y+j_0(y)-j_1(y))+j_1(x) \cdot (\overline{y}-j_0(y))\}$;
11) $\{\overline{y} \cdot j_0(x)+j_1(x) \cdot (y+j_0(y))+j_1(y) \cdot (j_2(x)-j_1(x))\}$.

2.21. Исследовать на полноту в P_k следующие системы:
1) $\{k-1,\ x+2,\ \max(x,\ y)\}$; 2) $\{1,\ 2,\ \overline{x \dot{-} y}\}$;
3) $\{k-2,\ x+y,\ \min(x,\ y)\}$; 4) $\{0,\ 1,\ \overline{x} \dot{-} (\sim y)\}$;
5) $\{2,\ 2x+y,\ x^2 \dot{-} y\}$; 6) $\{1,\ 2,\ \max(\overline{x},\ y)\}$;
7) $\{2 \dot{-} x,\ x \cdot y,\ \max(x,\ y)\}$; 8) $\{k-2,\ 2x+y,\ x \dot{-} y\}$;
9) $\{\sim x,\ -x \cdot y,\ \min(x,\ y)\}$; 10) $\{2,\ x+y,\ x \dot{-} y\}$;
11) $\{\sim x,\ 2j_0(x),\ J_1(x),\ x \dot{-} y\}$;
12) $\{1,\ \sim x,\ J_0(x)+J_1(x),\ \max(x,\ y)\}$;
13) $\{0,\ 1,\ \sim x,\ 2-j_0(x)-2j_1(x),\ \min(x,\ y)\}$;
14) $\left\{1,\ k-1,\ x \dot{-} \left[\frac{k}{2}\right],\ \min(x,\ y)\right\}$; 15) $\{k-2,\ \sim x,\ x \dot{-} y\}$.

2.22. Доказать, что приводимые ниже системы полны в P_k тогда и только тогда, когда k — простое число:
1) $\{1,\ x+y+x \cdot z\}$; 2) $\{x-y+1,\ x^2-y,\ x \cdot y^2\}$;
3) $\{x-1,\ x+y,\ x^2 \cdot y\}$; 4) $\{k-1,\ x \cdot y+x-y+z\}$;
5) $\{k-2,\ x+2y,\ x \cdot y^2\}$; 6) $\{\sim x,\ x-y,\ x^2 \cdot y\}$;

7) $\{x-2,\ x+2y+1,\ x\cdot y-x-y\}$; 8) $\{1,\ 2x+y,\ x\cdot y^2-x+y\}$;
9) $\{x+y+1,\ x\cdot y-x^2\}$; 10) $\{x-2y,\ x\cdot y+x+1\}$;
11) $\{1+x_1-x_2+x_1\cdot x_2\cdot\ldots\cdot x_k\}$.

2.23. Доказать, что при составном k перечисленные ниже функции из P_k не представимы полиномами по модулю k:
1) $f_i(x)$, $0\leqslant i\leqslant k-1$; 2) $\max(x,\,y)$; 3) $\min(x,\,y)$;
4) $x\dot{-}y$; 5) $x\supset y$; 6) $(x\dot{-}y)\dot{-}z$;
7) любая функция Шеффера (т. е. функция, образующая в P_k полную систему).

2.24. Подобрав для функции $f(x,\,y)$ такие многочлены $Q_0(x)$, $Q_1(x)$ и $Q_2(x)$, чтобы хотя бы одна из функций $Q_0(f(Q_1(x),\ Q_2(y)))$ или $Q_0(f(Q_1(x),\ Q_2(x)))$ была заведомо не разложима в полином по модулю k, доказать, что при $k=4$, 6 нижеперечисленные функции не представимы полиномами по модулю k:
1) $f=(2\dot{-}x^3)\cdot\overline{y}$; 2) $f=((\sim\overline{x})+y)\dot{-}(\overline{x}\dot{-}1)$;
3) $f=\min(\sim x,\,y)\dot{-}(1\dot{-}x)$; 4) $f=\max(x,\,y)\dot{-}(x\dot{-}2)$.

2.25. Выделить базис из полной в P_k системы A:
1) $A=\{k-1,\ j_0(x),\ j_1(x),\ \ldots,\ j_{k-1}(x),\ x\cdot y,\ x\dot{-}y\}$;
2) $A=\{x-2,\ J_0(x),\ \max(x,\,y),\ x\dot{-}y^2,\ x^2\cdot y\}$;
3) $A=\{\sim x,\ \min(x,\,y),\ x\cdot y,\ x+y\}$;
4) $A=\{x-1,\ x+2,\ \max(x,\,y),\ x\dot{-}y\}$;
5) $A=\{2,\ j_0(x),\ x+y^2,\ x^2\dot{-}y,\ x\cdot y\cdot z\}$.

2.26. Пусть B — произвольный базис, выделенный из системы Рессора–Туркетта. Доказать, что в нем:
а) содержится хотя бы одна из функций $J_i(x)$ $(0\leqslant i\leqslant k-2)$;
б) нет константы 0;
в) если $J_0(x)\in B$, то $k-1\notin B$.

2.27. Доказать, что если замкнутый класс в P_k имеет конечную полную систему, то множество всех различных базисов у него не более чем счетное. (Два базиса считаются *различными*, если один из них нельзя получить из другого путем переименования переменных без отождествления.)

2.28. 1) Пусть A — непустое множество одноместных функций из P_k, отличное от всего множества $P_k^{(1)}$ и удовлетворяющее следующему условию: существует предполный класс B в P_k такой, что $B\cap P_k^{(1)}=A$. Доказать, что такой класс B единственный.
2) Доказать, что число предполных классов в P_k, каждый из которых не содержит целиком множество $P_k^{(1)}$, меньше 2^{k^k}.

2.29. 1) Показать, что в замкнутом классе $K_1=[x^2\cdot y^2]$ из P_3 нет ни констант, ни тождественной функции.
2) Показать, что в замкнутом классе $K_2=[j_1(x)\cdot j_2(y)]$ из P_3 нет функций, зависящих существенно от одной переменной.

2.30. Две функции из P_k называются *конгруэнтными*, если они могут быть получены друг из друга путем переименования переменных без отождествления. Показать, что замкнутый класс $K_3 = [j_2(x) \cdot j_2(y)]$ из P_3 состоит из конечного числа попарно неконгруэнтных функций, зависящих существенно от всех своих аргументов.

2.31. Рассмотрим в P_k замкнутый класс

$$K_4 = [f_1(x_1),\ f_2(x_1, x_2),\ f_3(x_1, x_2, x_3),\ \ldots,\ f_n(x_1, x_2, \ldots, x_n),\ \ldots],$$

где $f_n(\widetilde{x}^n) = j_2(x_1) \cdot j_2(x_2) \cdot \ldots \cdot j_2(x_n)$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$. Очевидно, что он содержит бесконечно много попарно неконгруэнтных функций. Доказать, что в K_4 нет предполных классов.

2.32. Подсчитать число существенных функций в P_k, зависящих от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ $(n \geqslant 2)$.

2.33. Как известно, в P_k при $k \geqslant 3$ существуют замкнутые классы, не имеющие базисов, и замкнутые классы со счетно-бесконечными базисами. Рассмотрим класс $A_k = [f_2, \ldots, f_m, \ldots]$, где

$$f_m(x_1, \ldots, x_m) = \begin{cases} 1 \quad \text{при } x_1 = \ldots = x_{i-1} = x_{i+1} = \ldots = x_m = 2, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad x_i = 1 \quad (i = 1, \ldots, m), \\ 0 \quad \text{в остальных случаях,} \end{cases}$$

$m \geqslant 2$. Базисом в A_k является множество $\{f_2, \ldots, f_m, \ldots\}$. Используя класс A_k, доказать, что в P_k $(k \geqslant 3)$ существует континуальное семейство $\{B_\gamma\}$ замкнутых классов, образующих по включению цепь, т. е. для любых двух классов B_{γ_1} и B_{γ_2} из семейства $\{B_\gamma\}$ справедливо только одно из включений: $B_{\gamma_1} \subset B_{\gamma_2}$ или $B_{\gamma_2} \cap B_{\gamma_1}$.

Глава IV

ОГРАНИЧЕННО-ДЕТЕРМИНИРОВАННЫЕ ФУНКЦИИ

§ 1. Отображения последовательностей

1. Основные понятия и факты, связанные с заданием детерминированных функций. Пусть A — непустой конечный *алфавит*. Его элементы называются *буквами* (или *символами*). *Словом длины s в алфавите A* называется последовательность вида $x(1)\,x(2)\ldots x(s)$, составленная из букв алфавита A (здесь $s \geqslant 1$). Кратко эта последовательность обозначается так: $\widetilde{x}^s$. Множество всех слов длины s в алфавите A $(s \geqslant 1)$ обозначается через A^s. Часто рассматривают и слово длины 0 (*пустое слово*); его обозначают символом Λ. Через A^* обозначается множество $\{\Lambda\} \cup \bigcup\limits_{s \geqslant 1} A^s$. Символ вида $[a_1 \ldots a_n]^s$, где $s \geqslant 2$, $n \geqslant 1$ и $a_1, \ldots, a_n$ — буквы из алфавита A, используется для краткой записи «периодического» слова $a_1 \ldots a_n\, a_1 \ldots a_n \ldots a_1 \ldots a_n$ (длины $n \cdot s$). Если $n = 1$, то вместо $[a_1]^s$ применяют также символ a_1^s.

Бесконечные последовательности $\widetilde{x}^\omega = x(1)\,x(2)\ldots x(t)\ldots$, составленные из букв алфавита A, называются *бесконечными словами в алфавите A*. Множество всех бесконечных слов в алфавите A обозначается через A^ω.

Слово w, получающееся приписыванием слова w_2 справа к конечному слову w_1, называется *соединением слов w_1 и w_2* и обозначается через $w_1 w_2$. Слово w_1 называют при этом *префиксом* (или *началом*), а слово w_2 — *суффиксом* (или *окончанием*).

Слово $\widetilde{x}^\omega = x(1)\,x(2)\ldots$ из A^ω называется *квазипериодическим*, если существуют такие целые числа n_0 и T, что $n_0 \geqslant 1$, $T \geqslant 1$ и $x(n+T) = x(n)$ при $n \geqslant n_0$. Префикс $x(1)\,x(2)\ldots x(n_0-1)$ слова $\widetilde{x}^\omega$ в этом случае называют *предпериодом*, число $n_0 - 1$ — *длиной предпериода*, слово $x(n_0)\,x(n_0+1)\ldots x(n_0+T-1)$ — *периодом слова $\widetilde{x}^\omega$*, а число T — *длиной периода*. Такое квазипериодическое слово удобно записывать в виде

$$x(1)\,x(2)\ \ldots\ x(n_0-1)\,[x(n_0)\,x(n_0+1)\ldots x(n_0+T-1)]^\omega.$$

Символом $\widetilde{a}^\omega$ обозначается слово $\widetilde{x}^\omega \in A^\omega$, в котором $x(t) = a$ при любом $t = 1, 2, \ldots$ $(a \in A)$.

Пусть A и B — конечные непустые алфавиты. Множество отображений вида $f\colon A^\omega \to B^\omega$ обозначается через $P_{A,B,\omega}$. Алфавиты A и B называют соответственно *входным* и *выходным алфавитами* отображения из $P_{A,B,\omega}$; слова (последовательности) из множества A^ω называют *входными*, а из множества B^ω — *выходными*. Отображение f из $P_{A,B,\omega}$ называется *детерминированным оператором* или *детерминированной функцией* (сокращенно: *д. оператором* или *д. функцией*), если оно удовлетворяет следующему условию: для всякого $s \geqslant 1$ и любого входного слова $\widetilde{x}^\omega$ (из A^ω) s-й символ выходного слова $\widetilde{y}^\omega = f(\widetilde{x}^\omega)$ является однозначной функцией первых s символов слова $\widetilde{x}^\omega$. Множество всех д. функций из $P_{A,B,\omega}$ обозначается через $P_{A,B,\text{д}}$.

В тех случаях, когда

$$A = \underbrace{E_k \times \ldots \times E_k}_{n \text{ раз}} \quad (n \geqslant 1), \qquad B = \underbrace{E_l \times \ldots \times E_l}_{m \text{ раз}} \quad (m \geqslant 1),$$

где $E_k = \{0, 1, \ldots, k-1\}$ $(k \geqslant 2)$ и $E_l = \{0, 1, \ldots, l-1\}$ $(l \geqslant 2)$, множества $P_{A,B,\omega}$ и $P_{A,B,\text{д}}$ будут обозначаться через $P^{n,m}_{k,l,\omega}$ и $P^{n,m}_{k,l,\text{д}}$ соответственно. Если отображение $\widetilde{y}^\omega = f(\widetilde{x}^\omega)$ принадлежит множеству $P^{n,m}_{k,l,\omega}$ (или $P^{n,m}_{k,l,\text{д}}$), то при $m \geqslant 2$ вместо $\widetilde{y}^\omega$ можно применять запись $(\widetilde{y}^\omega_1, \ldots, \widetilde{y}^\omega_n)$, а при $n \geqslant 2$ вместо $f(\widetilde{x}^\omega)$ употреблять запись $f(\widetilde{x}^\omega_1, \ldots, \widetilde{x}^\omega_n)$; здесь $\widetilde{y}^\omega_j$ $(j = 1, \ldots, m)$ — переменная, пробегающая множество E^ω_l, и $\widetilde{x}^\omega_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ — переменная, пробегающая множество E^ω_k. При $n = m = 1$ верхние индексы у $P^{n,m}_{k,l,\omega}$ и $P^{n,m}_{k,l,\text{д}}$ будем иногда опускать, т. е. будем писать $P_{k,l,\omega}$ и $P_{k,l,\text{д}}$. Полагаем $\widehat{P}_{k,l,\text{д}} = \bigcup\limits_{\substack{n\geqslant 1\\ m\geqslant 1}} P^{n,m}_{k,l,\text{д}}$. Если $l = k$, то вместо двух индексов внизу будем писать один (например, $\widehat{P}_{k,\text{д}}$).

Функции f_1 и f_2 из множества $P_{A,B,\text{д}}$ называются *различимыми*, если существует такое слово $\widetilde{x}^s_0$ $(s \geqslant 1)$, что $f_1(\widetilde{x}^s_0) \neq f_2(\widetilde{x}^s_0)$. Если же $f_1(\widetilde{x}^s) = f_2(\widetilde{x}^s)$ для любых слов $\widetilde{x}^s$ $(s = 1, 2, \ldots)$, т. е. если равенство $f_1(\widetilde{x}^\omega) = f_2(\widetilde{x}^\omega)$ выполняется при всяком входном слове $\widetilde{x}^\omega$, то функции f_1 и f_2 называются *эквивалентными* (или *неразличимыми*) д. функциями.

Пусть f и g — функции из $P_{A,B,\text{д}}$. Если существует такое слово $\widetilde{x}^s_0 \in A^*$, что $f(\widetilde{x}^s_0\widetilde{x}^\omega) = f(\widetilde{x}^s_0)g(\widetilde{x}^\omega)$ для любого слова $\widetilde{x}^\omega \in A^\omega$ (здесь через $f(\widetilde{x}^s_0)$ обозначен префикс длины s выходного слова $f(\widetilde{x}^s_0\widetilde{x}^\omega)$), то функция g называется *остаточной функцией* (или *остаточным оператором*) функции f, порожденной (порожденным) словом $\widetilde{x}^s_0$, и обозначается через $f_{\widetilde{x}^s_0}$. Множество $\widetilde{Q}(f, \widetilde{x}^s_0)$ всех остаточных функций функции f, эквивалентных функции $f_{\widetilde{x}^s_0}$, образует *класс эквивалентности*, называемый *состоянием функции* f, содержащим остаточную функцию $f_{\widetilde{x}^s_0}$. Состояние, содержащее функцию f, называется *начальным*. Функция f называется *ограниченно-детерминированной* (сокращенно *о.-д. функцией* или *о.-д. оператором*), если она имеет

конечное число попарно различных состояний. Число различных состояний о.-д. функции называется ее *весом*. Если множество попарно различных состояний функции f бесконечное, то считают, что вес ее равен ∞. Множество всех о.-д. функций, принадлежащих множеству $P_{A,B,\text{д}}$ (соответственно множествам $P^{n,m}_{k,l,\text{д}}$, $P^{n,m}_{k,\text{д}}$, $\widehat{P}_{k,l,\text{д}}$ и $\widehat{P}_{k,\text{д}}$), обозначается через $P_{A,B,\text{од}}$ (соответственно через $P^{n,m}_{k,l,\text{од}}$, $P^{n,m}_{k,\text{од}}$, $\widehat{P}_{k,l,\text{од}}$ и $\widehat{P}_{k,\text{од}}$).

При описании д. функций бывает удобно пользоваться теоретико-графовым языком (а именно *бесконечными информативными деревьями*). Пусть A — алфавит, состоящий из l букв ($l \geqslant 1$). Через D_A обозначим бесконечное ориентированное корневое дерево *) , удовлетворяющее следующим условиям:

а) из каждой вершины дерева, включая и корень, выходят ровно l дуг (т. е. ориентированных ребер);

б) в каждую вершину дерева, отличную от корня, входит только одна дуга, а в корень дерева не входит ни одной;

в) каждой дуге дерева D_A приписана некоторая буква алфавита A, причем разным дугам, выходящим из одной и той же вершины дерева (в частности, из корня), приписаны разные буквы.

Корень дерева D_A считается *вершиной нулевого ранга*; если вершина дерева D_A является концом дуги, выходящей из вершины i-го ранга ($i \geqslant 0$), то она называется *вершиной* $(i+1)$*-го ранга. Дугой* (*ребром*) j*-го яруса* ($j \geqslant 1$) называется всякая дуга, выходящая из вершины $(j-1)$*-го ранга.* Каждой бесконечной ориентированной цепи в дереве D_A соответствует вполне определенное слово из множества A^ω. На рис. 4.1 изображен *фрагмент дерева* D_A (где $A = \{0, 1\}$), состоящий из трех первых ярусов этого дерева (здесь и в дальнейшем мы предполагаем, что символу 0 соответствует левое ребро (дуга), выходящее из вершины, а символу 1 — правое); жирными ребрами выделена цепь, соответствующая слову 101.

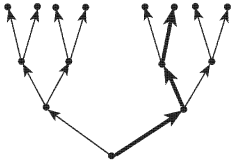


Рис. 4.1

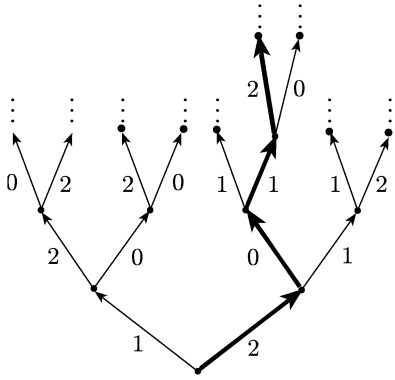


Рис. 4.2

Нагруженное дерево $D_{A,B}$ получается из дерева D_A приписыванием каждой дуге некоторой буквы из алфавита B. Всякой бесконечной

*) Определение корневого дерева см. в гл. VI.

ориентированной цепи в дереве $D_{A,B}$ отвечает слово из множества B^ω, составленное из букв, приписанных дугам этой цепи. Поэтому можно считать, что нагруженное дерево $D_{A,B}$ *задает* (*реализует*) вполне определенное отображение $f\colon\ A^\omega \to B^\omega$, являющееся д. функцией из множества $P_{A,B,\text{д}}$. На рис. 4.2 изображен фрагмент нагруженного дерева $D_{A,B}$, где $A = \{0, 1\}$ и $B = \{0, 1, 2\}$; д. функция, соответствующая этому дереву, «перерабатывает», например, слово 1010 в слово 2012.

Пусть $D_{A,B}$ — нагруженное дерево, реализующее д. функцию f. Остаточной функции $f_{\widetilde{x}_0^s}$ $(s \geqslant 0)$ отвечает поддерево $D_{A,B}(\widetilde{x}_0^s)$, растущее из такой вершины $v(\widetilde{x}_0^s)$ s-го ранга, в которой оканчивается цепь, выходящая из корня дерева и содержащая ровно s ребер; i-е по порядку ребро этой цепи принадлежит i-му ярусу дерева и помечено символом $x_0(i) \in A$.

Если остаточные функции $f_{\widetilde{x}_1^s}$ и $f_{\widetilde{x}_2^r}$ эквивалентны, то соответствующие им вершины $v(\widetilde{x}_1^s)$ и $v(\widetilde{x}_2^r)$, а также растущие из этих вершин поддеревья называются *эквивалентными*. Вес дерева, реализующего д. функцию, равен весу этой функции, а следовательно, равен *максимальному числу попарно неэквивалентных вершин* (или *поддеревьев*) данного дерева.

2. Типовые примеры.

Пример 1. Выяснить, является ли д. функцией отображение $\widetilde{y}^\omega = f(\widetilde{x}^\omega) \in P^{1,1}_{2,\omega}$, где $\widetilde{x}^\omega = x(1)\,x(2)\ldots x(t)\ \ldots$, $\widetilde{y}^\omega = y(1)\,y(2)\ldots$ $\ldots\, y(t)\ldots$ и

$$y(t) = x(t) \to x(1) \quad \text{при} \quad t \geqslant 1.$$

Решение. Из описания функции следует, что значение «выхода» $y(t)$ в момент времени t однозначно определяется значениями «входа» в моменты времени 1 и t, т. е. s-й символ выходного слова $\widetilde{y}^\omega$ при всяком $s \geqslant 1$ является однозначной функцией первых s символов входного слова $\widetilde{x}^\omega$. Значит, рассматриваемая функция детерминированная.

Пример 2. Является ли функция $\widetilde{y}^\omega$ детерминированной, если $\widetilde{y}^\omega = f(\widetilde{x}^\omega) \in P^{1,1}_{2,\omega}$, где $\widetilde{x}^\omega = x(1)\,x(2)\ldots x(t)\ \ldots$, $\widetilde{y}^\omega = y(1)\,y(2)\ldots$ $\ldots\, y(t)\ \ldots$ и

$$y(t) = \begin{cases} \overline{x}(t-1), & \text{если} \quad t \text{ — четное число,} \\ x(t)\cdot y(t+1), & \text{если} \quad t \text{ — нечетное число?} \end{cases}$$

Решение. Если ориентироваться на форму задания функции, то естественно предположить, что она не является детерминированной, так как, например, «выход» в момент времени $t = 1$ зависит от «выхода» в момент $t = 2$. Однако указанная зависимость может оказаться «фиктивной», возникшей только вследствие «плохого» (неудачного) описания функции. Поэтому необходимо проанализировать «природу» рассматриваемой функции. Пусть $t = 2s + 1$, где $s \geqslant 0$. Имеем $y(2s+1) = x(2s+1)\cdot y(2s+2) = x(2s+1)\cdot \overline{x}(2s+1) =$ $= 0$. Следовательно, при всяком нечетном t выход $y(t)$ равен 0, т. е.

является однозначной функцией первых t символов входного слова $\widetilde{x}^\omega$. Очевидно также, что аналогичная однозначность имеет место и для четных значений t. Таким образом, рассматриваемая функция детерминированная.

Пример 3. Выяснить, является ли д. функцией отображение $\widetilde{y}^\omega = f(\widetilde{x}^\omega) \in P^{1,1}_{2,\omega}$, где $\widetilde{x}^\omega = x(1)\,x(2)\ldots x(t)\ldots$, $\widetilde{y}^\omega = y(1)\,y(2)\ldots \ldots, y(t)\ldots$ и

$$y(t) = \begin{cases} 0, & \text{если существует такое } s \leqslant t, \\ & \text{что } 3x(s) \leqslant x(s+1) + x(s+2), \\ 1 & \text{в ином случае.} \end{cases}$$

Решение. При $x(s) = 0$ неравенство $3x(s) \leqslant x(s+1) + x(s+2)$ выполняется независимо от значений $x(s+1)$ и $x(s+2)$, а при $x(s) = 1$ оно не выполняется ни при каких значениях $x(s+1)$ и $x(s+2)$. Следовательно,

$$y(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } x(s) = 0 \text{ при некотором } s \leqslant t, \\ 1 & \text{в ином случае,} \end{cases}$$

т. е. отображение f является д. функцией.

Пример 4. Пусть $\widetilde{y}^\omega = f(\widetilde{x}^\omega) \in P^{1,1}_{2,\omega}$, где $\widetilde{x}^\omega = x(1)\,x(2)\ldots \ldots x(t)\ldots$, $\widetilde{y}^\omega = y(1)\,y(2)\ldots y(t)\ldots$ и $y(t)$ есть $(t+2)$-я цифра после запятой в двоичном разложении числа $x(t)/6$. Выяснить, является ли д. функцией отображение $f(\widetilde{x}^\omega)$.

Решение. Из описания функции видно, что выход $y(t)$ в момент времени t определяется однозначно значением входа $x(t)$: надо просто найти $(t+2)$-ю цифру после запятой в двоичном разложении числа $x(t)/6$. Значит, рассматриваемая функция является детерминированной. Запишем выход $y(t)$ в «явной форме». Нетрудно установить, что $\dfrac{1}{6} = \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{32} + \dfrac{1}{128} + \ldots + \dfrac{1}{2\cdot 4^l} + \ldots$ Следовательно, двоичное разложение числа $1/6$ имеет вид $0{,}0010101\ldots = 0{,}0\,(01)$, а поэтому

$$y(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } x(t) = 1 \text{ и } t = 2s+1, \text{ где } s \geqslant 1, \\ 0 & \text{в иных случаях.} \end{cases}$$

Пример 5. Показать, что оба приводимых ниже отображения $\widetilde{y}^\omega = f(\widetilde{x}^\omega)$ (из $P^{1,1}_{2,\omega}$) не являются д. функциями (здесь, как обычно, $\widetilde{x}^\omega = x(1)\,x(2)\ldots x(t)\ldots$ и $\widetilde{y}^\omega = y(1)\,y(2)\ldots y(t)\ldots$):

а) $y(t) = x\Big(\dfrac{t^3+2t^2+1}{t^2+3}\Big)$, $t \geqslant 1$;

б) $y(t) = \begin{cases} 0, & \text{если в слове } x(1)\,x(2)\ldots x(t^2-2t+2) \text{ имеется} \\ & \text{массив из } t \text{ нулей и ему не предшествует} \\ & \text{массив из } t \text{ единиц,} \\ 0 & \text{в ином случае.} \end{cases}$

Решение. а) Можно последовательно вычислять $y(1)$, $y(2)$ и т. д. до тех пор, пока не придем к соотношению вида $y(t_0) = x(t_0 + s)$

для некоторого $t_0 \geqslant 1$ и некоторого $s \geqslant 1$. Однако такая процедура «последовательного нахождения выходов» $y(t)$ может оказаться практически неосуществимой (например, если минимальное t_0, удовлетворяющее соотношению $y(t_0) = x(t_0 + s)$, где $s \geqslant 1$, равно 2000).

Поэтому надо действовать иначе, а именно выяснить, при каком (хотя бы одном) t выполняется неравенство $(t^3 + 2t^2 + 1)/(t^2 + 3) \geqslant t + 1$. Получаем, что это неравенство справедливо при всяком натуральном $t \geqslant 4$ (в частности, если $t = 4$, то $y(4) = x(5)$). Следовательно, при $t \geqslant 4$ «выход» $y(t)$ зависит от некоторого «входа» $x(t + s)$, где $s \geqslant 1$ (здесь s является функцией от t). Тем самым недетерминированность заданного отображения доказана.

б) Прикинем, как меняется длина слова $x(1)\,x(2)\ldots x(t^2 - 2t + 2)$ в зависимости от значения t, чтобы можно было высказать конкретное соображение о том, при каком входном слове $\widetilde{x}^\omega$ «выход» $y(t_0)$ в некоторый момент времени t_0 зависит от входов вида $x(t_0 + s)$, где $s \geqslant 1$. Ясно, что длина упомянутого выше слова равна $(t - 1)^2 + 1$.

Следовательно, она превосходит значение t на заведомо подходящую для наших целей величину уже при $t = 3$: массив из трех нулей может начинаться с 3-го символа входного слова. Имеем следующее: если $\widetilde{x}^\omega = 01000\,x(6)\ldots$, то $\widetilde{y}^\omega = 010\ldots$, а если $\widetilde{x}^\omega = 01011\,x(6)\ldots$, то $\widetilde{y}^\omega = 011\ldots$ Таким образом, 3-й символ выходного слова, соответствующий входному слову $010\,x(4)\,x(5)\ldots$, зависит не только от первых трех букв этого слова, но также и от символов $x(4)$ и $x(5)$.

Значит, рассматриваемое отображение не является детерминированным. (Заметим, что $y(1) = x(1)$ и $y(2)$ является однозначной функцией символов $x(1)$ и $x(2)$.)

Пример 6. Через $\mathfrak{E}$ обозначим здесь подмножество всех таких слов $\widetilde{x}^\omega$ из множества $\{0, 1\}^\omega$, в которых на четных местах стоят единицы, т. е. $x(2s) = 1$ при $s \geqslant 1$. Выяснить, можно ли функцию f доопределить до детерминированной:

а) $f(\widetilde{x}^\omega) = \begin{cases} 1\,\widetilde{x}^\omega, & \text{если } \widetilde{x}^\omega \in \mathfrak{E}, \\ \widetilde{1}^\omega, & \text{если } \widetilde{x}^\omega = 01\,[0]^\omega; \end{cases}$

б) $f(\widetilde{x}^\omega) = \begin{cases} \widetilde{x}^\omega, & \text{если } \widetilde{x}^\omega \in \mathfrak{E}, \\ \widetilde{0}^\omega, & \text{если } \widetilde{x}^\omega = 00\,x(3)\,x(4)\ldots x(t)\ldots \text{ (т. е. входное слово начинается с двух нулей).} \end{cases}$

Решение. а) Очевидно, что значение первого выходного символа $y(1)$ не зависит от входного символа ($y(1) = 1$ и при $\widetilde{x}^\omega = 01\,[0]^\omega$, и при $\widetilde{x}^\omega \in \mathfrak{E}$). Однако $y(2)$ является функцией от последовательности $x(2)\,x(4)\ldots x(2s)\ldots$, причем $y(2) = x(1)$, если $x(2s) = 1$ при всяком $s \geqslant 1$, и $y(2) = 1$, если $\widetilde{x}^\omega = 01\,[0]^\omega$.

Рассмотрим два входных слова: $[01]^\omega$ и $01\,[0]^\omega$. Имеем $f([01]^\omega) = [10]^\omega$ и $f(01\,[0]^\omega) = \widetilde{1}^\omega$. Значит, $y(2) = 0$, если $\widetilde{x}^\omega = [01]^\omega$, и $y(2) = 1$, если $\widetilde{x}^\omega = 01\,[0]^\omega$, т. е. $y(2)$ не является однозначной функцией от входных символов $x(1)$ и $x(2)$.

Таким образом, рассматриваемая нами функция f не может быть «продолжена» до детерминированной (она уже сама недетерминированная, хотя и не является всюду определенной на множестве $\{0, 1\}^\omega$).

б) Из приведенного описания функции f видно, что $y(1) = x(1)$ и $y(2) = x(2)$ как для $\widetilde{x}^\omega \in \mathfrak{E}$, так и для $\widetilde{x}^\omega = 00\,x(3)\,x(4)\,\ldots\,x(t)\,\ldots$ Далее, если $x(2)$ в рассматриваемых входных словах равно 0, то $y(t) = 0$ при всяком $t \geqslant 3$, а если $x(2) = 1$, то $y(t) = x(t)$, $t \geqslant 3$. Значит, заданную функцию f можно попытаться доопределить следующим образом: если $\widetilde{x}^\omega = x(1)1x(3)1x(5)1\ldots 1x(2s-1)0x(2s+1)x(2s+2)\ldots$, где $s \geqslant 1$, то $\widehat{f}(\widetilde{x}^\omega) = x(1)\,1x(3)\,1\,\ldots\,1x(2s-1)\,[0]^\omega$ (другими словами, на «выходе» выдается $y(t) = x(t)$ до тех пор, пока при некотором $t_0 = 2s$ на «вход» не поступит символ 0; после этого $y(t) = 0$ для всех $t \geqslant t_0$. Очевидно, что $\widehat{f}(\widetilde{x}^\omega)$ — д. функция, являющаяся продолжением функции $f(\widetilde{x}^\omega)$.

Пример 7. Выяснить, является ли функция $f(\widetilde{x}^\omega) = y(1)\,y(2)\ldots\ldots y(t)\ldots$ (из $P^{1,1}_{2,\text{д}}$) о.-д. функцией, и найти ее вес:

а) $y(t) = \begin{cases} x(1) & \text{при } t = 1, 2, \\ x([t/3]) & \text{при } t \geqslant 3; \end{cases}$

б) $y(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t = 1, \\ x(t) \to y(t-1) & \text{при } t \geqslant 2; \end{cases}$

в) $y(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } t \text{ — нечетное число}, \\ \overline{x}(1), & \text{если } t \text{ — четное число}. \end{cases}$

Решение. а) Из приведенного описания функции $f(\widetilde{x}^\omega)$ следует, что для получения выходного символа при $t = 3s$ $(s \geqslant 1)$ необходимо «хранить в памяти» входной символ, поступивший в момент времени s, т. е. этот входной символ надо «помнить» в течение $2s$ моментов времени. Значит, для «реализации» рассматриваемой д. функции нужно иметь бесконечную (растущую во времени) память, что соответствует бесконечному множеству состояний.

К такому же выводу можно прийти, строя для заданной функции фрагменты ее информативного дерева. (Однако потребуется построить 8–9 ярусов дерева, что весьма громоздко.)

Для обоснования того, что данная функция не является ограниченно-детерминированной, рассмотрим остаточные функции, порожденные словами $0^s = \underbrace{00\ldots0}_{s \text{ раз}}$, где $s \geqslant 1$, и сравним значения этих функций на входном слове $\widetilde{1}^\omega$. Имеем $f(\widetilde{0}^s\,\widetilde{1}^\omega) = \underbrace{00\ldots0}_{3s+2}[1]^\omega$, а следовательно, $f_{\widetilde{0}^s}(\widetilde{1}^\omega) = \underbrace{00\ldots0}_{3s+2}[1]^\omega$. Значит, для разных значений s эти функции попарно не эквивалентны. Таким образом, вес функции f равен ∞, т. е. она не является о.-д. функцией.

б) Построив четыре яруса информативного дерева заданной функции (рис. 4.3), нетрудно высказать предположение, что все вершины

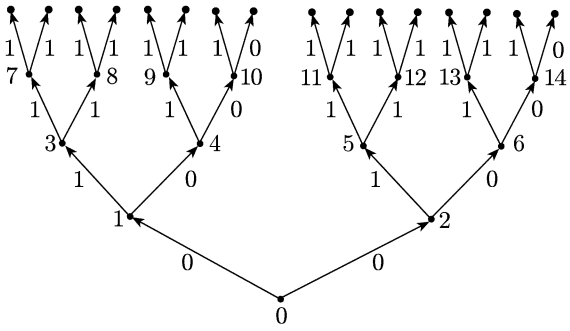


Рис. 4.3

дерева разбиваются на три класса эквивалентности: первый класс содержит только вершину 0, второй — вершины 1, 2, 4, 6, 10, 14 и т. д., а третий — вершины 3, 5, 7, 8, 9, 11, 12, 13 и т. д.

Вершинам из второго класса соответствуют остаточные функции $f_0(\widetilde{x}^\omega)$, $f_{0\widetilde{1}^s}(\widetilde{x}^\omega)$ и $f_{\widetilde{1}^s}(\widetilde{x}^\omega)$, где $s \geqslant 1$, а вершинам из третьего класса — остаточные функции $f_{\sigma\widetilde{x}^s}(\widetilde{x}^\omega)$, где σ равно 0 или 1, $s \geqslant 1$ и $\widetilde{x}^s \neq \widetilde{1}^s$.

Убедимся в эквивалентности функций, входящих в один и тот же класс эквивалентности. Имеем

$$f(0\,x(1)\,x(2)\dots x(t)\dots) = 0(x(1) \to 0)(x(2) \to (x(1) \to 0))\dots$$
$$\dots(x(t) \to (x(t-1) \to \dots \to x(1) \to 0)\dots))\dots =$$
$$= 0\,\overline{x}(1)\,(\overline{x}(1) \vee \overline{x}(2))\dots\,(\overline{x}(1) \vee \dots \vee \overline{x}(t-1) \vee \overline{x}(t))\dots,$$

$$f(0\,\widetilde{1}^s\,x(1)\,x(2)\dots\,x(t)\dots) = 0\,\underbrace{\overline{1}\dots\overline{1}}_{s}\,\overline{x}(1)(\overline{x}(1) \vee$$
$$\vee\,\overline{x}(2))\dots\,(\overline{x}(1) \vee \dots \vee \overline{x}(t-1) \vee \overline{x}(t))\dots,$$

$$f(\widetilde{1}^s\,x(1)\,x(2)\dots\,x(t)\dots) = 0\,\underbrace{\overline{1}\dots\overline{1}}_{s-1}\,\overline{x}(1)(\overline{x}(1) \vee \overline{x}(2))\dots$$
$$\dots\,(\overline{x}(1) \vee \dots \vee \overline{x}(t-1) \vee \overline{x}(t))\dots$$

(здесь $\overline{1} = 0$ и при $s \geqslant 1$ слово $\underbrace{\overline{1}\dots\overline{1}}_{s-1}$ пустое).

Отсюда заключаем, что каждая из остаточных функций $f_0(\widetilde{x}^\omega)$, $f_{0\widetilde{1}^s}(\widetilde{x}^\omega)$ и $f_{\widetilde{1}^s}(\widetilde{x}^\omega)$, где $s \geqslant 1$, эквивалентна функции $g(\widetilde{x}^\omega) = y(1)\,y(2)\dots\,y(t)\dots$, где $y(t) = \overline{x}(1) \vee \dots \vee \overline{x}(t-1) \vee \overline{x}(t)$, $t \geqslant 1$.

Далее,

$$f(\sigma\,x_1\,x_2\,\dots\,x_s\,x(1)\,x(2)\dots\,x(t)\dots) =$$
$$= 0\,\overline{x}_1(\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2)\dots(\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \vee \dots \vee \overline{x}_{s-1})(\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \vee \dots \vee \overline{x}_s)\,\&$$
$$\&\,(\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \dots \vee \overline{x}_s \vee \overline{x}(1))(\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \vee \dots \vee \overline{x}_s \vee \overline{x}(1) \vee \overline{x}(2))\dots$$

$$\ldots(\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \vee \ldots \vee \overline{x}_s \vee \overline{x}(1) \vee \overline{x}(2) \vee \ldots \vee \overline{x}(t)) \ldots =$$
$$= 0\,\overline{x}_1(\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2)\ldots(\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \vee \ldots \vee \overline{x}_{s-1})11\ldots1\ldots,$$

ибо $\widetilde{x}^s \neq \widetilde{1}^s$ (а значит, $\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \vee \ldots \vee \overline{x}_s = 1$).

Таким образом, $f_{\sigma\widetilde{x}^s}(x(1)\,x(2)\ldots) \equiv \widetilde{1}^\omega$. Из наших рассмотрений вытекает, что заданная функция f является о.-д. функцией веса 3.

в) Нарисовав пять полных ярусов и частично шестой ярус информативного дерева заданной функции (рис. 4.4), легко увидеть, на какие классы эквивалентности разбивается множество вершин этого дерева.

Вершина 0 образует один класс эквивалентности; все вершины, принадлежащие дереву, растущему из вершины 1, образуют второй

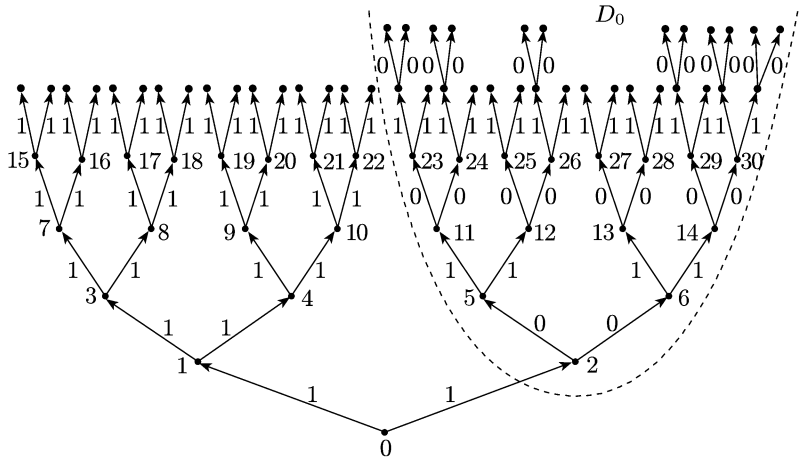


Рис. 4.4

класс эквивалентности; вершина 2 вместе со всеми вершинами четного ранга дерева D_0, растущего из нее (сама вершина 2 имеет в дереве D_0 ранг 0), образует третий класс эквивалентности; наконец, все вершины нечетного ранга дерева D_0 образуют четвертый класс эквивалентности.

Следовательно, рассматриваемая нами сейчас функция есть о.-д. функция веса 4. Все ее остаточные функции из упомянутого выше второго класса эквивалентны функции $g(\widetilde{x}^\omega) \equiv \widetilde{1}^\omega$. Остаточные функции, соответствующие вершинам четного ранга дерева D_0, эквивалентны функции $\varphi(\widetilde{x}^\omega) = y(1)\,y(2)\ldots y(t)\ldots$, где

$$y(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t \text{ нечетное,} \\ 1, & \text{если } t \text{ четное.} \end{cases}$$

Наконец, остаточные функции, соответствующие вершинам нечетного ранга дерева D_0, эквивалентны функции $\psi(\widetilde{x}^\omega) = y(1)\,y(2)\ldots y(t)\ldots$, где

$$y(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } t \text{ нечетное,} \\ 0, & \text{если } t \text{ четное.} \end{cases}$$

3. Выявление свойства детерминированности функции. Эквивалентность детерминированных функций. Остаточные функции.

1.1. Пусть $f(x(1)\,x(2)\ldots x(t)\ldots) = y(1)\,y(2)\ldots y(t)\ldots$ — функция из множества $P^{1,1}_{2,\omega}$. Выяснить, является ли она детерминированной, когда:

1) $y(1) = x(1)$ и $y(t) = x(1) \oplus x(2) \oplus \ldots \oplus x(t)$ при $t \geqslant 2$;
2) $y(t) = x(1) \vee x(2) \vee \ldots \vee x(t) \vee x(t+1)$ при $t \geqslant 1$;
3) $y(t) = x(1)\cdot x(2)\cdot \ldots \cdot x(t)\cdot x(t+2) \to x(1)$ при $t \geqslant 1$;
4) $y(t) = x([\log_2 t] + 1)$ при $t \geqslant 1$;
5) $y(t) = x(\sqrt{[3/(2\,t)]})$ при $t \geqslant 1$;
6) $y(1) = y(2) = 1$ и $y(t) = x(2^{t-1} - t)$ при $t \geqslant 3$;
7) $y(t) = x([3t/4] + [\sqrt{t}])$ при $t \geqslant 1$;
8) $y(1) = 1$ и $y(t) = x(2 + x(t))$ при $t \geqslant 2$;
9) $y(1) = y(2) = 0$ и $y(t) = x(2 + x(t))$ при $t \geqslant 3$;
10) $y(1) = 1$ и $y(t) = x(2 + y(t-1))$ при $t \geqslant 2$;
11) $y(t) = \begin{cases} 1, & \text{если существует такое целое } l \geqslant 0, \text{ что } t = 2^l; \\ 0 & \text{в ином случае;} \end{cases}$
12) $y(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } t \leqslant 100, \\ 0, & \text{если } t > 100; \end{cases}$
13) $y(t) = \begin{cases} x(20t - t^2 - 90), & \text{если } 7 \leqslant t \leqslant 13, \\ 0 & \text{в ином случае;} \end{cases}$
14) $y(t) = \begin{cases} x(19t - t^2 - 80), & \text{если } 7 \leqslant t \leqslant 12, \\ 1 & \text{в ином случае.} \end{cases}$

1.2. Выяснить, является ли детерминированной функция f из $P^{1,1}_{2,\omega}$, заданная следующим описанием:

1) $f(\widetilde{x}^{\,\omega}) = \begin{cases} \widetilde{0}^{\,\omega}, & \text{если } \widetilde{x}^{\,\omega} = \widetilde{0}^{\,\omega}, \\ \widetilde{1}^{\,\omega} & \text{в ином случае;} \end{cases}$
2) $f(\widetilde{x}^{\,\omega}) = \begin{cases} \widetilde{1}^{\,\omega}, & \text{если } \widetilde{x}^{\,\omega} = \widetilde{0}^{\,\omega}, \\ \overline{x}(1)\overline{x}(2)\ldots\overline{x}(t)\ldots & \text{в ином случае} \end{cases}$

(здесь $\overline{x}(1)\overline{x}(2)\ldots\overline{x}(t)\ldots$ — выходная последовательность, соответствующая входной последовательности $\widetilde{x}^{\,\omega} = x(1)x(2)\ldots x(t)\ldots$);

3) $f(\widetilde{x}^{\,\omega}) = \begin{cases} \widetilde{1}^{\,\omega}, & \text{если } \widetilde{x}^{\,\omega} = \widetilde{0}^{\,\omega}, \\ x(1)\overline{x}(2)x(3)\overline{x}(4)\ldots x(2s-1)\overline{x}(2s)\ldots & \text{в ином случае} \end{cases}$

(здесь $x(1)\overline{x}(2)x(3)\overline{x}(4)\ldots x(2s-1)\overline{x}(2s)\ldots$ — выходная последовательность, соответствующая входной последовательности $\widetilde{x}^{\,\omega} = x(1)x(2)\ldots x(t)\ldots$);

4) $f(\widetilde{x}^{\omega}) = y(1)\,y(2)\ldots y(t)\ldots$, где

$$y(t) = \begin{cases} x(t), & \text{если } t \text{ — простое число,} \\ 0 & \text{в ином случае;} \end{cases}$$

5) $f(\widetilde{x}^{\omega}) = \begin{cases} \widetilde{1}^{\omega}, & \text{если найдется число } c \text{ такое, что } \sum\limits_{t \geqslant 1} x(t) \leqslant c, \\ \widetilde{0}^{\omega} & \text{в ином случае;} \end{cases}$

6) $f(\widetilde{x}^{\omega}) = \begin{cases} \widetilde{1}^{\omega}, & \text{если последовательность } \widetilde{x}^{\omega} \text{ такова, что} \\ & \sum\limits_{l=1}^{t} x(2l-1) \leqslant \sum\limits_{l=1}^{t} x(2l) \ \text{ для всех } \ t = 1, 2, \ldots, \\ \widetilde{0}^{\omega} & \text{в ином случае;} \end{cases}$

7) $f(\widetilde{x}^{\omega}) = y(1)\,y(2)\ldots y(t)\ldots$, где

$$y(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } \sum\limits_{l=1}^{[(t+1)/2]} x(2l-1) \leqslant \sum\limits_{l=1}^{[t/2]} x(2l), \\ 0 & \text{в ином случае;} \end{cases}$$

8) $f(\widetilde{x}^{\omega}) = y(1)\,y(2)\ldots y(t)\ldots$, где

$$y(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } \sum\limits_{l=1}^{[t/2]+1} x(2l-1) \leqslant \sum\limits_{l=1}^{[t/2]+1} x(2l), \\ 0 & \text{в ином случае;} \end{cases}$$

9) $f(\widetilde{x}^{\omega}) = \begin{cases} \widetilde{x}^{\omega}, & \text{если последовательность } \widetilde{x}^{\omega} \text{ такова, что} \\ & \sum\limits_{i=1}^{t} x(i) \geqslant t/2 \ \text{ для всех } \ t = 1, 2, \ldots, \\ \widetilde{0}^{\omega} & \text{в ином случае;} \end{cases}$

10) $f(\widetilde{x}^{\omega}) = y(1)\,y(2)\ldots y(t)\ldots$, где

$$y(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } \sum\limits_{i=1}^{t} x(i) \geqslant \dfrac{t}{2}, \\ 0 & \text{в ином случае;} \end{cases}$$

11) $f(\widetilde{x}^{\omega}) = y(1)\,y(2)\ldots y(t)\ldots$, где

$$y(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } \sum\limits_{i=0}^{t} x(i+1) \geqslant \dfrac{t}{2}, \\ 0 & \text{в ином случае;} \end{cases}$$

12) $f(\widetilde{x}^{\omega}) = y(1)\,y(2)\ldots y(t)\ldots$, где

$$y(t) = \begin{cases} \overline{x}(1), & \text{если } t = 1, \\ \overline{x}(t) \oplus y(t-1), & \text{если } t \text{ — нечетное число и } t > 1, \\ x(t-1), & \text{если } t \text{ — четное число;} \end{cases}$$

13) $f(\widetilde{x}^{\omega}) = y(1)\,y(2)\ldots y(t)\ldots$, где $y(t)$ определяется из соотношений $y(2l) = x(2l-1)$ и $y(2l-1) = x(2l-1) \vee \overline{y}(2l)$, $l = 1, 2, \ldots$;

14) $f(\widetilde{x}^{\omega}) = y(1)\,y(2)\ldots y(t)\ldots$, где $y(t)$ есть $(t+1)$-я цифра после запятой в двоичном разложении числа $x(t)/3$;

15) $f(\widetilde{x}^{\omega}) = y(1)\,y(2)\ldots y(t)\ldots$, где $y(t)$ есть $(3t+2)$-я цифра после запятой в двоичном разложении числа $x(t+1)/7$;

16) $f(\widetilde{x}^{\omega}) = y(1)\,y(2)\ldots y(t)\ldots$, где $y(t)$ есть 2^{t+1}-я цифра после запятой в двоичном разложении числа $(2x(t+1)+1)/15$.

1.3. Через D будем обозначать здесь подмножество всех таких слов из множества $\{0, 1\}^{\omega}$, в которых не встречаются две единицы подряд. Выяснить, можно ли доопределить функцию f до детерминированной, и если доопределение возможно, указать, какую-либо функцию, являющуюся доопределением функции f:

1) $f(\widetilde{x}^{\omega}) = \widetilde{0}^{\omega}$ при $\widetilde{x}^{\omega} \in D$;

2) $f(\widetilde{x}^{\omega}) = x(1)\,x(2)\ldots x(t)\ldots$ при $\widetilde{x}^{\omega} \in D$;

3) $f(\widetilde{x}^{\omega}) = 0\widetilde{x}^{\omega}$ при $\widetilde{x}^{\omega} \in D$;

4) функция f определена только на одном слове $\widetilde{x}_0^{\omega} = 11010010001\ldots$ (т. е. $x_0(t) = 1$ лишь для $t = i(i-1)/2 + 1$, $i = 1, 2, \ldots$) и $f(\widetilde{x}_0^{\omega}) = \widetilde{y}_0^{\omega} = 1010010001\ldots$ (т. е. $y_0(t) = 1$ лишь при $t = \binom{j}{2}$, $j = 2, 3, \ldots$);

5) функция f определена только на двух словах: $\widetilde{0}^{\omega}$ и $[01]^{\omega}$, причем $\widetilde{f}(0^{\omega}) = \widetilde{1}^{\omega}$ и $f([01]^{\omega}) = 1[10]^{\omega}$;

6) $f(\widetilde{x}^{\omega}) = \begin{cases} \widetilde{0}^{\omega}, & \text{если } \widetilde{x}^{\omega} \in D, \\ \widetilde{1}^{\omega}, & \text{если } \widetilde{x}^{\omega} = \widetilde{1}^{\omega}; \end{cases}$

7) $f(\widetilde{x}^{\omega}) = \begin{cases} \widetilde{0}^{\omega}, & \text{если } \widetilde{x}^{\omega} \in D, \\ 0[1]^{\omega}, & \text{если } \widetilde{x}^{\omega} = \widetilde{1}^{\omega}; \end{cases}$

8) $f(\widetilde{x}^{\omega}) = \begin{cases} \widetilde{x}^{\omega}, & \text{если } \widetilde{x}^{\omega} \in D, \\ 0[1]^{\omega}, & \text{если } \widetilde{x}^{\omega} = \widetilde{1}^{\omega}; \end{cases}$

9) $f(\widetilde{x}^{\omega}) = \begin{cases} 0\,\widetilde{x}^{\omega}, & \text{если } \widetilde{x}^{\omega} \in D, \\ 0[1]^{\omega}, & \text{если } \widetilde{x}^{\omega} = \widetilde{1}^{\omega}; \end{cases}$

10) $f(\widetilde{x}^{\omega}) = \begin{cases} 0\,\overline{x}(1)\,\overline{x}(2)\ldots\overline{x}(t)\ldots, & \text{если } \widetilde{x}^{\omega} \in D, \\ 00[1]^{\omega}, & \text{если } \widetilde{x}^{\omega} = \widetilde{1}^{\omega}. \end{cases}$

1.4. В дереве, соответствующем функции f из $P^{1,1}_{2,\text{д}}$, изменена метка на ребре l-го яруса, принадлежащем цепи, отвечающей входной последовательности 0^{ω}. Найти вес $r(f)$ функции f и вес $r(g)$ вновь полученной функции g, если:

1) $f(\widetilde{x}^{\omega}) \equiv \widetilde{0}^{\omega}$, $l = 3$; 2) $f(\widetilde{x}^{\omega}) = \widetilde{x}^{\omega}$, $l = 4$;

3) $f(\widetilde{x}^{\omega}) = 00\,[01]^{\omega}$, $l = 2$; 4) $f(\widetilde{x}^{\omega}) = 0\,\widetilde{x}^{\omega}$, $l = 1$;

5) $f(\widetilde{x}^{\omega}) = y(1)\,y(2)\ldots y(t)\ldots$, где $y(t)$ есть t-я цифра после запятой в двоичном разложении числа $2/3$, $l = 3$;

6) $f(\widetilde{x}^{\,\omega}) = y(1)\,y(2)\ldots y(t)\ldots$, где $y(t)$ есть t-я цифра после запятой в двоичном разложении числа $1/\sqrt{2}$, $l = 1$;

7) $f(\widetilde{x}^{\,\omega}) = y(1)\,y(2)\ldots y(t)\ldots$, где

$$y(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t = 1, \\ y(t-1) \oplus x(t), & \text{если } t \geqslant 2, \end{cases} \qquad l = 1;$$

8) $f(\widetilde{x}^{\,\omega}) = y(1)\,y(2)\ldots y(t)\ldots$, где

$$y(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t = 1, \\ x(t) \to x(t-1), & \text{если } t \geqslant 2, \end{cases} \qquad l = 1;$$

9) $f(\widetilde{x}^{\,\omega}) = y(1)\,y(2)\ldots y(t)\ldots$, где

$$y(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } t = 1, \\ x(t) \to \overline{y}(t-1), & \text{если } t \geqslant 2, \end{cases} \qquad l = 2.$$

1.5. 1) Доказать, что если изменить метку на каком-либо ребре, принадлежащем j-му ярусу дерева, соответствующего функции $f \in \in P_{2,\text{од}}$, то вес $r(g)$ вновь полученной функции g удовлетворяет неравенству $|r(f) - r(g)| \leqslant j$.

2) Как может измениться вес о.-д. функции $f \in P_{2,\text{од}}$, если в соответствующем ей дереве изменить метки на двух ребрах j-го яруса?

1.6. Выяснить, эквивалентны ли д. функции f_1 и f_2, если:

1) $f_1(\widetilde{x}^{\,\omega}) = x(1)\,x(2)\,\overline{x}(3)\,x(4)\,\overline{x}(5)\ldots x(2s)\,\overline{x}(2s+1)\ldots$ (т. е. входная последовательность $\widetilde{x}^{\,\omega} = x(1)\,x(2)\ldots x(t)\ldots$ «перерабатывается» в выходную последовательность $x(1)\,x(2)\,\overline{x}(3)\ \ldots$, выписанную в данном соотношении справа),

$$f_2(\widetilde{x}^{\,\omega}) = y(1)\,y(2)\ldots y(t)\ldots,$$

где

$$y(t) = \begin{cases} x(t) & \text{при } t = 1,\ 2, \\ x(t-1) \oplus x(t) \oplus \overline{y}(t-1) & \text{при } t \geqslant 3; \end{cases}$$

2) $f_1(\widetilde{x}^{\,\omega}) = 0x(1)\,0x(2)\,0x(3)\ldots 0x(t)\ldots$ (т. е. входная последовательность $\widetilde{x}^{\,\omega} = x(1)\,x(2)\ldots x(t)\ldots$ «перерабатывается» в выходную последовательность $0x(1)\,0x(2)\,0x(3)\ldots$, выписанную в данном соотношении справа),

$$f_2(\widetilde{x}^{\,\omega}) = y(1)\,y(2)\ldots y(t)\ldots,$$

где

$$y(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t = 1, \\ x([t/2])\cdot\overline{y}(t-1) & \text{при } t \geqslant 2; \end{cases}$$

3) $f_1(\widetilde{x}^{\,\omega}) = x(1)\,(x(1)\,\&\,x(2))\ldots(x(1)\,\&\,x(2)\,\&\,\ldots\,\&\,x(t))\ldots$ (т. е. в момент времени $t \geqslant 2$ «выход» равен $x(1)\,\&\,x(2)\,\&\,\ldots\,\&\,x(t)$, а при $t = 1$ он равен $x(1)$),

$$f_2(\widetilde{x}^{\,\omega}) = y(1)\,y(2)\ldots y(t)\ldots,$$

где

$$y(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } \displaystyle\sum_{i=1}^{t} x(t) \leqslant \frac{t}{2}, \\ 1 & \text{в ином случае;} \end{cases}$$

4) $f_1(\widetilde{x}^{\omega}) = x(1)\,(x(2) \to x(1))(x(3) \to x(2)) \dots (x(t) \to x(t-1)) \dots$ (т. е. при $t = 1$ «выход» равен $x(1)$, а при $t \geqslant 2$ он равен $x(t) \to \to x(t-1)$),

$$f_2(\widetilde{x}^{\omega}) = y(1)\,y(2) \dots y(t) \dots,$$

где

$$y(t) = \begin{cases} x(t), & \text{если } t = 1, \\ \overline{x}(t), & \text{если } t \geqslant 2 \text{ и } x(t-1) = 0, \\ 1 & \text{в остальных случаях;} \end{cases}$$

5) $f_1(\widetilde{x}^{\omega}) = 1(x(2) \to x(1))(x(3) \to x(1) \cdot x(2)) \dots (x(t) \to \to x(1) \cdot x(2) \cdot \dots \cdot x(t-1)) \dots$ (т. е. при $t = 1$ «выход» равен 1, а при $t \geqslant 2$ он равен $x(t) \to \to x(1) \cdot x(2) \cdot \dots \cdot x(t-1)$),

$$f_2(\widetilde{x}^{\omega}) = y(1)\,y(2) \dots y(t) \dots,$$

где

$$y(t) = \begin{cases} \overline{x}(t), & \text{если } t \geqslant 2 \text{ и найдется такое } s < t, \text{ что } x(s) = 0, \\ 1 & \text{в остальных случаях;} \end{cases}$$

6) $f_1(\widetilde{x}^{\omega}) = \overline{x}(1)\,1\overline{x}(3)\,1\overline{x}(5)\,1 \dots 1\overline{x}(2s-1)\,1 \dots$ (т. е. входная последовательность $\widetilde{x}^{\omega} = x(1)\,x(2) \dots$ «перерабатывается» в выходную последовательность $\overline{x}(1)\,1\overline{x}(3)\,1\overline{x}(5) \dots$, указанную в данном соотношении справа),

$$f_2(\widetilde{x}^{\omega}) = y(1)\,y(2) \dots y(t) \dots,$$

где

$$y(t) = \begin{cases} \overline{x}(t) & \text{при } t = 1, \\ x(2[(t+1)/2] - 1) \oplus y(t-1) & \text{при } t \geqslant 2; \end{cases}$$

7) $f_1(\widetilde{x}^{\omega}) = y(1)\,y(2) \dots y(t) \dots$, где

$$y(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t = 1, \\ x(t) \to (x(t-1) \oplus x(t) \cdot y(t-1)) & \text{при } t \geqslant 2, \end{cases}$$

$f_2(\widetilde{x}^{\omega}) = 1(x(2) \to \overline{x}(1))(x(3) \to (x(2) \to x(1)))(x(4) \to \to (x(2) \to x(1))) \dots (x(t) \to (x(2) \to x(1))) \dots$ (т. е. при $t = 1$ «выход» совпадает с 1, при $t = 2$ — с $x(2) \to \overline{x}(1)$, а при $t \geqslant 3$ — с $x(t) \to (x(2) \to x(1))$);

8) $f_1(\widetilde{x}^{\omega}) = y(1)\,y(2) \dots y(t) \dots$, где

$$y(t) = \begin{cases} x(t) & \text{при } t = 1, \\ x(t) \to (x(t-1) \to x(t) \cdot y(t-1)) & \text{при } t \geqslant 2, \end{cases}$$

$$f_2(\widetilde{x}^{\omega}) = x(1)\,[1]^{\omega};$$

9) $f_1(\widetilde{x}^{\omega}) = y(1)\,y(2) \dots y(t) \dots$, где

$$y(t) = \begin{cases} x(t) & \text{при } t = 1, \\ x(t) \to (x(t) \cdot y(t-1) \to x(t-1)) & \text{при } t \geqslant 2, \end{cases}$$

$f_2(\widetilde{x}^{\omega}) = x(1)1(x(3) \to x(2))(x(4) \to x(3)) \dots (x(t) \to x(t-1)) \dots$ (т. е. при $t = 1$ «выход» совпадает с $x(1)$, при $t = 2$ — с 1, а при $t \geqslant 3$ — с $x(t) \to x(t-1)$);

10) $f_1(\widetilde{x}^{\omega}) = 01(x(2) \to \overline{x}(1))(x(3) \to \overline{x}(2)) \dots (x(t) \to \overline{x}(t-1)) \dots$ (т. е. при $t = 1$ «выход» совпадает с 0, при $t = 2$ — с 1, а при $t \geqslant 3$ — с $x(t) \to \overline{x}(t-1)$),

$$f_2(\widetilde{x}^{\omega}) = y(1)\, y(2) \dots y(t) \dots,$$

где

$$y(t) = \begin{cases} 0 \text{ при } t = 1, \\ 1 \text{ при } t = 2, \\ x(t-1)y(t-1) \to (x(t-2) \to \overline{x}(t-1)) \text{ при } t \geqslant 3. \end{cases}$$

1.7. Выяснить, эквивалентны ли остаточные функции $f_{\widetilde{x}_1^s}$ и $f_{\widetilde{x}_2^r}$ д. функции $f \in P_{2,\text{д}}^{1,1}$ (здесь всюду $f(\widetilde{x}^{\omega}) = \widetilde{y}^{\omega} = y(1)\, y(2) \dots y(t) \dots$):

1) $y(t) = \begin{cases} x(t) \text{ при } t = 1, 2, 3, \\ \overline{x}(t) \text{ при } t \geqslant 4: \end{cases}$

а) $\widetilde{x}_1^2 = 11$, $\widetilde{x}_2^5 = 00101$; б) $\widetilde{x}_1^3 = 010$, $\widetilde{x}_2^4 = 1001$;

2) $y(t) = \begin{cases} x(t) \text{ при } t = 1, 2, 3, \\ x(t-1) \text{ при } t \geqslant 4: \end{cases}$

а) $\widetilde{x}_1^2 = 10$, $\widetilde{x}_2^3 = 011$; б) $\widetilde{x}_1^3 = 111$, $\widetilde{x}_2^5 = 00101$;
в) $\widetilde{x}_1^4 = 0101$, $\widetilde{x}_2^4 = 1000$;

3) $y(t) = \begin{cases} \overline{x}(t) \text{ при } t \text{ нечетном}, \\ x(t) \text{ при } t \text{ четном}: \end{cases}$

а) $\widetilde{x}_1^2 = 00$, $\widetilde{x}_2^6 = 100101$; б) $\widetilde{x}_1^3 = 101$, $\widetilde{x}_2^3 = 110$;
в) $\widetilde{x}_1^4 = 0101$, $\widetilde{x}_2^5 = 11111$;

4) $y(t) = \begin{cases} 0 \text{ при } t = 1, \\ x(t-1) \oplus x(t) \text{ при } t \geqslant 2: \end{cases}$

а) $\widetilde{x}_1^2 = 00$, $\widetilde{x}_2^3 = 110$; б) $\widetilde{x}_1^4 = 0110$, $\widetilde{x}_2^4 = 0101$;
в) $\widetilde{x}_1^5 = 11111$, $\widetilde{x}_2^6 = 001001$;

5) $y(t) = \begin{cases} 1 \text{ при } t = 1, 2, \\ y(t-2) \oplus y(t-1) \text{ при } t \geqslant 3: \end{cases}$

а) $\widetilde{x}_1^2 = 10$, $\widetilde{x}_2^3 = 010$; б) $\widetilde{x}_1^4 = 1110$, $\widetilde{x}_2^7 = 1011101$;
в) $\widetilde{x}_1^3 = 110$, $\widetilde{x}_2^5 = 00101$;

6) $y(t) = \begin{cases} 0 \text{ при } t = 1, \\ x(t) \to y(t-1) \text{ при } t \geqslant 2: \end{cases}$

а) $\widetilde{x}_1^3 = 011$, $\widetilde{x}_2^4 = 1111$; б) $\widetilde{x}_1^5 = 01111$, $\widetilde{x}_2^5 = 00111$;
в) $\widetilde{x}_1^4 = 0100$, $\widetilde{x}_2^6 = 111010$;

7) $y(t) = \begin{cases} 0 \text{ при } t = \binom{i}{2},\ i = 2, 3, \dots, \\ 1 \text{ в остальных случаях}: \end{cases}$

а) $\widetilde{x}_1^3 = 101$, $\widetilde{x}_2^3 = 110$; б) $\widetilde{x}_1^4 = 0101$, $\widetilde{x}_2^5 = 11011$;

8) $y(t)$ есть t-я цифра после запятой в двоичном разложении числа $9/20$:

а) $\widetilde{x}\,{}_1^1 = 0,\ \widetilde{x}\,{}_2^6 = 001110$; б) $\widetilde{x}\,{}_1^3 = 101,\ \widetilde{x}\,{}_2^7 = 1001011$;

в) $\widetilde{x}\,{}_1^4 = 1101,\ \widetilde{x}\,{}_2^5 = 00100$;

9) $y(t)$ есть t-я цифра после запятой в двоичном разложении числа $23/28$:

а) $\widetilde{x}\,{}_1^1 = 1,\ \widetilde{x}\,{}_2^4 = 0110$; б) $\widetilde{x}\,{}_1^2 = 10,\ \widetilde{x}\,{}_2^5 = 00110$;

в) $\widetilde{x}\,{}_1^3 = 110,\ \widetilde{x}\,{}_2^9 = 111101111$;

10) $y(t) = \begin{cases} x(t), & \text{если } x(1) + x(2) + \ldots + x(t) < t/2, \\ 1 & \text{в ином случае:} \end{cases}$

а) $\widetilde{x}\,{}_1^2 = 10,\ \widetilde{x}\,{}_2^4 = 0011$; б) $\widetilde{x}\,{}_1^3 = 111,\ \widetilde{x}\,{}_2^5 = 01111$;

в) $\widetilde{x}\,{}_1^4 = 1101,\ \widetilde{x}\,{}_2^5 = 10010$;

11) $y(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } x(1) + x(2) + \ldots + x([(t+1)/2]) \leqslant t/3, \\ 1 & \text{в ином случае:} \end{cases}$

а) $\widetilde{x}\,{}_1^2 = 10,\ \widetilde{x}\,{}_2^4 = 0110$; б) $\widetilde{x}\,{}_1^3 = 110,\ \widetilde{x}\,{}_2^3 = 001$;

в) $\widetilde{x}\,{}_1^6 = 100101,\ \widetilde{x}\,{}_2^6 = 010101$;

12) $y(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } t = 1 \\ & \text{или если } t \geqslant 2 \text{ и } \sum\limits_{i=1}^{t-1}(1 - x(i)) \cdot i < t \cdot x(t), \\ x(t) \to x(t-1) & \text{в ином случае:} \end{cases}$

а) $\widetilde{x}\,{}_1^2 = 01,\ \widetilde{x}\,{}_2^2 = 11$; б) $\widetilde{x}\,{}_1^3 = 101,\ \widetilde{x}\,{}_2^4 = 0011$;

в) $\widetilde{x}\,{}_1^6 = 011101,\ \widetilde{x}\,{}_2^6 = 000111$;

13) $y(t) = \begin{cases} 1, & \text{если } t = 1 \\ & \text{или если } t \geqslant 2 \text{ и } t \cdot x(t) \geqslant 1 + \sum\limits_{i=1}^{t-1}(1 - x(i)) \cdot i, \\ 0 & \text{в ином случае:} \end{cases}$

а) $\widetilde{x}\,{}_1^3 = 011,\ \widetilde{x}\,{}_2^3 = 101$; б) $\widetilde{x}\,{}_1^2 = 11,\ \widetilde{x}\,{}_2^4 = 0101$;

в) $\widetilde{x}\,{}_1^5 = 11001,\ \widetilde{x}\,{}_2^5 = 10110$.

1.8. Доказать, что д. функция f_1 ($f_1 \in P_{2,\text{д}}$) не является остаточной функцией д. функции $f_0 \in P_{2,\text{д}}$ (здесь, как обычно, считаем, что $f_0 = f_0(\widetilde{x}^{\,\omega}) = \widetilde{y}^{\,\omega} = y(1)y(2)\ldots y(t)$ и $f_1 = f_1(\widetilde{x}^{\,\omega}) = \widetilde{y}^{\,\omega} = y(1)y(2)\ldots \ldots y(t)\ldots$):

1) f_0: $\begin{cases} y(1) = x(1), \\ y(t) = x(1) \oplus \overline{x}(t), \ t \geqslant 2, \end{cases}$ f_1: $\begin{cases} y(1) = 1, \\ y(t) = x(1) \oplus \overline{x}(t), \ t \geqslant 2; \end{cases}$

2) f_0: $\begin{cases} y(1) = 0, \\ y(t) = \overline{x}(t), \ t \geqslant 2, \end{cases}$ f_1: $\begin{cases} y(1) = 0, \\ y(t) = x(1) \to x(t-1), \ t \geqslant 2; \end{cases}$

3) f_0: $y(t) = \overline{x}(t), \ t \geqslant 1,$ f_1: $\begin{cases} y(1) = \overline{x}(1), \\ y(t) = x(t) \to \overline{y}(t-1), \ t \geqslant 2; \end{cases}$

4) f_0: $\begin{cases} y(1) = 1, \\ y(t) = y(t-1) \to x(t-1), \ t \geqslant 2, \end{cases}$

f_1: $\begin{cases} y(1) = 1, \\ y(t) = x(t-1), \ t \geqslant 2; \end{cases}$

5) f_0: $\begin{cases} y(1) = x(1), \\ y(t) = x(t) \cdot y(t-1), \ t \geqslant 2, \end{cases}$ f_1: $\begin{cases} y(t) = 0, \ t = 1, 2, \\ y(t) = 1, \ t \geqslant 3; \end{cases}$

6) f_0: $\begin{cases} y(t) = \overline{x}(t), \ t = 1, 2, \\ y(t) = y(t-2) \to y(t-1), \ t \geqslant 3, \end{cases}$

f_1: $\begin{cases} y(1) = \overline{x}(t), \ t = 1, 2, \\ y(t) = 1, \ t \geqslant 3. \end{cases}$

1.9. Доказать, что д. функция f_1 является остаточной функцией д. функции $f_0 \in P_{2,\text{д}}$ (считаем, как обычно, что $f_0 = f_0(\widetilde{x}^{\,\omega}) = \widetilde{y}^{\,\omega} = y(1)\,y(2)\ldots y(t)\ldots$ и $f_1 = f_1(\widetilde{x}^{\,\omega}) = \widetilde{y}^{\,\omega} = y(1)\,y(2)\ldots y(t)\ldots$):

1) f_0: $\begin{cases} y(1) = x(1), \\ y(t) = x(t-1) \cdot \overline{x}(t), \ t \geqslant 2, \end{cases}$

f_1: $\begin{cases} y(1) = 0, \\ y(t) = \overline{x(t-1) \to x(t)}, \ t \geqslant 2; \end{cases}$

2) f_0: $\begin{cases} y(1) = 0, \\ y(t) = y(t-1) \to x(t), \ t \geqslant 2, \end{cases}$

f_1: $\begin{cases} y(1) = x(1), \\ y(t) = x(t) \vee \overline{y}(t-1), \ t \geqslant 2; \end{cases}$

3) f_0: $\begin{cases} y(1) = 1, \\ y(t) = x(t-1) \oplus x(t), \ t \geqslant 2, \end{cases}$

f_1: $\begin{cases} y(1) = \overline{x}(1), \\ y(t) = (x(t-1) \to x(t)) \to \overline{x}(t-1) \cdot x(t), \ t \geqslant 2; \end{cases}$

4) f_0: $\begin{cases} y(t) = \overline{x}(t), \ t = 1, 2, 3, \\ y(t) = y(t-3) \to y(t-1), \ t \geqslant 4, \end{cases}$

f_1: $\begin{cases} y(t) = 0, \ t = 1, 2, \\ y(t) = 1, \ t \geqslant 3; \end{cases}$

5) f_0: $\begin{cases} y(t) = x(t), \ t = 1, 2, \\ y(t) = y(t-2) \to \overline{x}(t), \ t \geqslant 3, \end{cases}$

f_1: $\begin{cases} y(t) = \overline{x}(1), \ t = 1, 2, \\ y(t) = x(t) \to \overline{y}(t-2), \ t \geqslant 3; \end{cases}$

6) f_0: $\begin{cases} y(t) = 1, \ t = 1, 2, \\ y(t) = (\overline{y}(t-2) \to x(t-1)) \to \\ \qquad\qquad \to x(t-2) \cdot x(t-1) \cdot x(t), \ t \geqslant 3, \end{cases}$

$$f_1\colon \begin{cases} y(1) = x(1), \\ y(2) = x(1) \to x(2), \\ y(t) = (x(t-1) \to x(t-2)\cdot x(t))\cdot (y(t-2) \to \\ \qquad\qquad \to x(t-2)x(t-1)\cdot x(t)), \ \ t \geqslant 3; \end{cases}$$

7) f_0: $y(t)$ есть t-я цифра после запятой в двоичном разложении числа $2/3$,

f_1: $y(t)$ есть t-я цифра после запятой в двоичном разложении числа $1/3$;

8) f_0: $y(t)$ есть t-я цифра после запятой в двоичном разложении числа $7/60$,

f_1: $y(t)$ есть t-я цифра после запятой в двоичном разложении числа $13/15$.

4. Выявление свойства ограниченной детерминированности функции. Порожденные и автономные функции. Строение классов эквивалентности. Мощности некоторых множеств отображений.

1.10. Выяснить, является ли функция $f \in \widehat{P}_{2,\text{д}}$ о.-д. функцией, и найти ее вес:

1) $y(t) = \begin{cases} 1 \ \text{ при } \ t = 1, \\ \overline{x}(t-1) \ \text{ при } \ t \geqslant 2; \end{cases}$ 2) $y(t) = \begin{cases} 0 \ \text{ при } \ t = 1, \\ x(t) \ \text{ при } \ t \geqslant 2; \end{cases}$

3) $y(t) = \begin{cases} x(1) \ \text{ при } \ t = 1, \\ \overline{y}(t-1) \ \text{ при } \ t \geqslant 2; \end{cases}$ 4) $y(t) = \begin{cases} \overline{x}(1) \ \text{ при } \ t = 1, \\ 0 \ \text{ при } \ t \geqslant 2; \end{cases}$

5) $y(t) = \begin{cases} x(1) \ \text{ при } \ t = 1, \\ y(t-1) \to x(t) \ \text{ при } \ t \geqslant 2; \end{cases}$

6) $y(t) = \begin{cases} 1 \ \text{ при } \ t = 1,\, 2, \\ x(t-2) \ \text{ при } \ t \geqslant 3; \end{cases}$

7) $y(t) = \begin{cases} \overline{x}(1) \ \text{ при } \ t = 1, \\ x(1) \oplus x(2) \oplus \ldots \oplus x(t) \ \text{ при } \ t \geqslant 2; \end{cases}$

8) $y(t) = \begin{cases} 0 \ \text{ при } \ t = 1, \\ \left[\sqrt{t} - \sqrt{t-2}\,\right] \ \text{ при } \ t \geqslant 2; \end{cases}$

9) $y(t) = \begin{cases} x(1) \ \text{ при } \ t = 1,\, 2, \\ x(1)\cdot x(2)\cdot \ldots \cdot x(t-1) \ \text{ при } \ t \geqslant 3; \end{cases}$

10) $y(t) = x(2[(t-1)/2] + 1), \ \ t \geqslant 1;$

11) $y(t) = \begin{cases} x(t), \ \text{ если } \ t \text{ — нечетное число}, \\ \overline{x}(t), \ \text{ если } \ t \text{ — четное число}; \end{cases}$

12) $y(t) = \begin{cases} x(1), \ \text{ если } \ t = 1, \\ 1, \ \text{ если } \ t \text{ — нечетное число и } \ t \geqslant 3, \\ x(t/2) \to y(t/2), \ \text{ если } \ t \text{ — четное число}; \end{cases}$

13) $y(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t \text{ — нечетное число,} \\ x(t/2+1), & \text{если } t \text{ — четное число;} \end{cases}$

14) $y(t) = \begin{cases} 1 \text{ при } t = 1, 2, \\ y(t-2) \oplus x(t-1) \text{ при } t \geqslant 3; \end{cases}$

15) $y(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t = 1, \\ x(t) \oplus y(t-2), & \text{если } t \text{ — нечетное число и } t \geqslant 3, \\ x(t-1), & \text{если } t \text{ — четное число;} \end{cases}$

16) $y(t) = \begin{cases} 1 \text{ при } t = 1, \\ x([t/2]) \to x(t) \text{ при } t \geqslant 2; \end{cases}$

17) $y(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } t = 1, 2, \ldots, l, \\ \overline{y}(t-l), & \text{если } t \geqslant l+1, \ l \geqslant 1; \end{cases}$

18) $y(t)$ есть t-я цифра после запятой в двоичном разложении числа $7/15$;

19) $y(t)$ есть t-я цифра после запятой в двоичном разложении числа $11/24$;

20) $f \in P^{1,2}_{2,\text{д}}$ и f: $\begin{cases} y_1(1) = 0, \\ y_2(1) = 1, \\ y_1(t) = y_2(t-1), \ t \geqslant 2, \\ y_2(t) = y_1(t-1), \ t \geqslant 2; \end{cases}$

20) $f \in P^{2,2}_{2,\text{д}}$ и f: $\begin{cases} y_1(1) = x_1(1) \cdot x_2(1), \\ y_2(1) = x_1(1) \vee x_2(1), \\ y_1(t) = x_1(t) \vee x_2(t) \vee y_2(t-1), \ t \geqslant 2, \\ y_2(t) = x_1(t) \cdot x_2(t) \cdot y_2(t-1), \ t \geqslant 2. \end{cases}$

1.11. Пусть $f_1(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $f_2(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $\ldots$, $f_m(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — функции вида $\underbrace{E_k \times E_k \times \ldots \times E_k}_{n \text{ раз}} \to E_l$, где $k \geqslant 2$ и $l \geqslant 2$.

Оператор $\varphi_{f_1, f_2, \ldots, f_m}$ из $P^{n,m}_{k,l,\text{д}}$ (т. е. $\varphi_{f_1, f_2, \ldots, f_m} = (\widetilde{x}_1^{\omega}, \ldots, \widetilde{x}_n^{\omega}) = (\widetilde{y}_1^{\omega}, \widetilde{y}_2^{\omega}, \ldots, \widetilde{y}_n^{\omega})$) называется *оператором* (или *функцией*), *порожденным* (*порожденной*) *функциями* $f_1, f_2, \ldots, f_m$, если для всякого $t \geqslant 1$

$$y_i(t) = f_i(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)), \quad i = 1, 2, \ldots, m.$$

Выяснить, является ли порожденной функция $f \in \widehat{P}_{2,\text{д}}$, если:

1) $f \in P^{1,1}_{2,\text{д}}$ и f: $\begin{cases} y(1) = 1, \\ y(t) = x(t) \to y(t-1), \ t \geqslant 2; \end{cases}$

2) $f \in P^{1,1}_{2,\text{д}}$ и f: $\begin{cases} y(1) = 0, \\ y(t) = x(t-1) \to y(t-1), \ t \geqslant 2; \end{cases}$

3) $f \in P^{1,1}_{2,\text{д}}$ и f: $\begin{cases} y(t) = x(t), \text{ если } t = 2s-1, \ s \geqslant 1, \\ y(t) = \overline{x}(2) \to x(t-1) \cdot x(t), \text{ если } t = 2s, \ s \geqslant 1; \end{cases}$

4) $f \in P^{1,1}_{2,\text{д}}$ и f: $\begin{cases} y(1) = \overline{x}(t), \\ y(t) = x(t-1) \oplus x(t) \oplus y(t-1), \ t \geqslant 2; \end{cases}$

5) $f(\widetilde{x}^{\omega}) = 1(x(1)\cdot x(2) \to x(2)) \dots (x(1)\cdot x(z) \to x(z)) \dots$ (т. е. при $t = 1$ «выход» совпадает с 1, а при $t \geqslant 2$ — с $x(1)\cdot x(t) \to x(t)$);

6) $f(\widetilde{x}^{\omega}) = y(1)\, y(2) \dots y(t) \dots$, где $y(t)$ есть t-я цифра после запятой в двоичном разложении числа $1/7$;

7) $f(\widetilde{x}^{\omega}) = y(1)\, y(2) \dots y(t) \dots$, где $y(t)$ есть t-я цифра после запятой в двоичном разложении числа $1/5$;

8) $f \in P^{1,2}_{2,\text{д}}$ и f: $\begin{cases} y_1(1) = 0, \\ y_2(1) = 1, \\ y_1(t) = y_2(t-1) \to y_1(t-1), \ t \geqslant 2; \\ y_2(t) = x(t) \to y_2(t-1), \ t \geqslant 2; \end{cases}$

9) $f \in P^{1,2}_{2,\text{д}}$ и f: $\begin{cases} y_1(1) = x(1), \\ y_1(t) = (y_1(t-1) \to y_2(t-1)) \to x(t), \ t \geqslant 2; \\ y_2(t) = x(t), \ t \geqslant 1; \end{cases}$

10) $f \in P^{1,2}_{2,\text{д}}$ и f: $\begin{cases} y_1(1) = y_2(1) = \overline{x}(1), \\ y_1(t) = y_1(t-1) \oplus x(t), \ t \geqslant 2; \\ y_2(t) = y_2(t-1) \to y_1(t-1), \ t \geqslant 2; \end{cases}$

11) $f \in P^{2,1}_{2,\text{д}}$ и f: $\begin{cases} y(t) = x_1(t) \to x_2(t), \text{ если } \ t = 2s-1, \ s \geqslant 1, \\ y(t) = x_1(t)\cdot x_2(t) \oplus x_1(t) \oplus 1, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad \text{если } \ t = 2s, \ s \geqslant 1. \end{cases}$

1.12. Из определения порожденной функции (см. предыдущую задачу) следует, что вес порожденной функции равен 1. Доказать, что справедливо и обратное утверждение: если $f \in P_{A,B,\text{д}}$ и вес функции f равен 1, то существует функция φ: $A \to B$, порождающая функцию f, т. е. $f(\widetilde{x}^{\omega}) = \widetilde{y}^{\omega} = y(1)\, y(2) \dots y(t) \dots$, где $y(t) = \varphi(x(t))$ при всяком $t \geqslant 1$, $x(t) \in A$ и $y(t) \in B$.

1.13. 1) Функция f из $P_{2,\text{д}}$ определяется следующим образом: $f(\widetilde{x}^{\omega}) = [\underbrace{0 \dots 01}_{l}]^{\omega}$, где l — произвольное фиксированное целое число, не меньшее 1. Доказать, что:

а) у функции f вес каждой остаточной функции равен $l+1$;

б) каждый класс эквивалентности остаточных функций у функции f является счетно-бесконечным множеством.

2) Пусть $f(\widetilde{x}^{\omega}) \in P_{2,\text{д}}$ и $f(\widetilde{x}^{\omega}) = \underbrace{0 \dots 0}_{l}[1]^{\omega}$, где l — произвольное фиксированное целое число, не меньшее 1. Доказать, что:

а) для каждого r, удовлетворяющего неравенствам $1 < r \leqslant l+1$, у функции f существует в точности 2^{l-r+1} остаточных функций веса r;

б) функция f имеет только один бесконечный класс эквивалентности остаточных функций и его элементы — порожденные функции.

3) Пусть $f(\widetilde{x}^{\omega}) \in P_{2,\text{д}}$ и $f(\widetilde{x}^{\omega}) = y(1)\,y(2)\ldots y(t)\ldots$, где

$$y(t) = \begin{cases} 0, & \text{если } 1 \leqslant t \leqslant l, \\ x(1)\cdot x(2)\cdot \ldots \cdot x(t), & \text{если } t \geqslant l+1, \end{cases}$$

и l — произвольное фиксированное целое число, не меньшее 1. Доказать, что:

а) для каждого r, удовлетворяющего неравенствам $3 \leqslant r \leqslant l+2$, у функции f существует лишь одна остаточная функция веса r;

б) функция f имеет ровно два бесконечных класса эквивалентности остаточных функций, причем элементы одного из них являются порожденными функциями, а другого — функциями веса 2.

4) В задаче 3) изменим только одно условие: если $1 \leqslant t \leqslant l$, то $y(t) = 1$. Обозначим новую функцию через f_1. Доказать, что:

а) у функции f_1 в точности два бесконечных класса эквивалентности остаточных функций, и элементы одного из них являются функциями веса 2, а другого — порожденными функциями;

б) остальные классы эквивалентности остаточных функций функции f_1 конечные, и при $l \geqslant 2$ среди них ровно $l+1$ одноэлементных классов;

в) вес функции f_1 равен $2l+1$.

5) Функция f из $P_{2,\text{д}}$ определяется следующим образом:

$$f(\widetilde{x}^{\omega}) = \begin{cases} \underbrace{0\ldots 0}_{l}[1]^{\omega}, & \text{если } \widetilde{x}^{\omega} = \underbrace{0\ldots 0}_{l}\,x(l+1)\,x(l+2)\ldots, \\ \widetilde{0}^{\omega} & \text{в ином случае,} \end{cases}$$

l — произвольное фиксированное целое число, не меньшее 1. Доказать, что:

а) функция f имеет ровно два бесконечных класса эквивалентности остаточных функций, и элементы каждого из них — порожденные функции;

б) остальные классы эквивалентности у функции f одноэлементные;

в) для каждого r, удовлетворяющего неравенствам $3 \leqslant r \leqslant l+2$, у функции f существует единственная остаточная функция веса r.

1.14. Выяснить, сколько у функции $f \in P_{2,\text{д}}$ конечных и сколько бесконечных классов эквивалентности остаточных функций, выписать явно (в какой-либо форме) все остаточные функции (по одной из каждого класса эквивалентности) и найти их веса:

1) f: $\begin{cases} y(1) = 0, \\ y(t) = x(1) \oplus x(t) \oplus 1, \ t \geqslant 2; \end{cases}$

2) f: $y(t) = x(1)\cdot x(t)$, $t \geqslant 1$; 3) f: $\begin{cases} y(1) = 1, \\ y(t) = x(1) \vee \overline{y}(t-1), \ t \geqslant 2; \end{cases}$

4) f: $\begin{cases} y(1) = \overline{x}(1), \\ y(t) = y(t-1), \ t \geqslant 2; \end{cases}$ 5) f: $\begin{cases} y(1) = x(1), \\ y(t) = x(t) \to y(t-1), \ t \geqslant 2; \end{cases}$

6) $f(\widetilde{x}^{\,\omega}) = [010]^{\omega}$;

7) $f(\widetilde{x}^{\,\omega}) = \begin{cases} [01]^{\omega}, \ \text{если } \widetilde{x}^{\,\omega} = \widetilde{0}^{\,\omega}, \\ [01]^{l}\, 1x(2l+2)\, x(2l+3)\ldots, \ \text{если } \widetilde{x}^{\,\omega} = \\ \qquad = 0^{2l}1x(2l+2)\, x(2l+3)\ldots \ \text{и } l \geqslant 1, \\ [01]^{l}\, x(2l+1)\, x(2l+2)\ldots, \ \text{если } \widetilde{x}^{\,\omega} = \\ \qquad = 0^{2l-1}\, 1x(2l+1)\, x(2l+2)\ldots \ \text{и } l \geqslant 1, \\ \widetilde{x}^{\,\omega} \ \text{в ином случае;} \end{cases}$

8) $f(\widetilde{x}^{\,\omega}) = [0x(1)]^{\omega}$; 9) $f(\widetilde{x}^{\,\omega}) = [x(1)\, x(2)\, 1]^{\omega}$;

10) f: $\begin{cases} y(1) = y(2) = 0, \\ y(t) = x(t-2) \oplus x(t), \ t \geqslant 3. \end{cases}$

1.15. Функция f из $P_{A,B,\text{д}}$ называется *автономной* (или *константой*, или *функцией без выхода*), если она принимает постоянное значение (на множестве A^{ω}), т. е. если на любом входном слове $\widetilde{x}^{\,\omega} \in A^{\omega}$ функция f равна одному и тому же (выходному) слову из B^{ω}.

Выяснить, является ли автономной функция $f \in \widehat{P}_{2,\text{д}}$, и если она автономна, то найти ее вес:

1) $f \in P^{1,1}_{2,\text{д}}$ и f: $\begin{cases} y(1) = 0, \\ y(t) = \overline{y}(t-1), \ t \geqslant 2; \end{cases}$

2) $f \in P^{1,1}_{2,\text{д}}$ и f: $\begin{cases} y(1) = 1, \\ y(t) = x(2) \cdot x(t-1) \to x(t-1), \ t \geqslant 2; \end{cases}$

3) $f \in P^{1,1}_{2,\text{д}}$ и f: $y(t) = x(1) \cdot \ldots \cdot x(t) \to x(1) \cdot x(t), \ t \geqslant 1$;

4) $f \in P^{1,1}_{2,\text{д}}$ и f: $\begin{cases} y(t) = x(1) \to (x(t) \to x(1)), \\ \qquad\qquad \text{если } t = 3s-2, \ s \geqslant 1, \\ y(t) = \overline{y}(t-1) \to x(t-1) \cdot x(t), \\ \qquad\qquad \text{если } t = 3s-1, \ s \geqslant 1, \\ y(t) = y(t-2) \oplus y(t-1), \ \text{если } t = 3s, \ s \geqslant 1; \end{cases}$

5) $f \in P^{1,1}_{2,\text{д}}$ и f: $\begin{cases} y(1) = 0, \\ y(t) = \overline{x}(2) \to (x(1) \to \overline{x}(t)), \ t \geqslant 2; \end{cases}$

6) $f \in P^{1,1}_{2,\text{д}}$ и f: $\begin{cases} y(t) = 1, \ \text{если } t = 2^i \ (i = 0, 1, 2, \ldots), \\ y(t) = y(1) \oplus y(2) \oplus \ldots \oplus y(t-1) \\ \qquad\qquad \text{в ином случае;} \end{cases}$

7) $f \in P^{1,1}_{2,\text{д}}$ и f: $\begin{cases} y(t) = 0, \text{ если } il + 1 \leqslant t \leqslant (i+1)l, \\ \qquad\qquad\qquad\qquad i = 0, 2, 4, \ldots, 2m, \ldots, \\ y(t) = \overline{y}(t - l + 1) \text{ в ином случае} \end{cases}$

(здесь l — произвольное фиксированное число, не меньшее 2);

8) $f \in P^{1,2}_{2,\text{д}}$ и f: $\begin{cases} y_1(1) = 1, \\ y_2(1) = 0, \\ y_1(t) = x(t) \to (y_2(t-1) \to \overline{y}_1(t-1)), \ t \geqslant 2, \\ y_2(t) = y_1(t-1) \to y_2(t-1)x(t), \ t \geqslant 2; \end{cases}$

9) $f \in P^{1,2}_{2,\text{д}}$ и f: $\begin{cases} y_1(t) = \overline{x(1) \cdot x(t) \to x(t)}, \ t \geqslant 1, \\ y_2(1) = 0, \\ y_2(t) = \overline{y}_1(t-1) \to y_2(t-1), \ t \geqslant 2; \end{cases}$

10) $f \in P^{1,2}_{2,\text{д}}$ и f: $\begin{cases} y_1(1) = y_2(1) = 1, \\ y_1(t) = x(t) \to y_1(t-1)\, y_2(t-1), \ t \geqslant 2, \\ y_2(t) = \overline{x}(1)\,\overline{x}(2) \ldots \overline{x}(t) \to \overline{x}(2)\, y_1(t-1), \ t \geqslant 2; \end{cases}$

11) $f \in P^{1,2}_{2,\text{д}}$ и f: $\begin{cases} y_1(1) = 1, \\ y_2(1) = 0, \\ y_1(t) = y_2(t-1), \ t \geqslant 2, \\ y_2(t) = y_2(t-1) \to y_1(t-1) \cdot x(t-1), \quad t \geqslant 2. \end{cases}$

1.16. 1) Доказать, что если f — о.-д. функция из $P_{A,B,\text{д}}$, то для всякого квазипериодического слова $\widetilde{x}^{\omega}$ (из A^{ω}) слово $f(\widetilde{x}^{\omega})$ также квазипериодическое.

2) Утверждение, обратное к сформулированному в 1), неверно. Покажите это, используя следующую функцию $f(\widetilde{x}^{\omega}) = y(1)\, y(2) \ldots$ $\ldots\, y(t) \ldots$ из множества $P^{1,1}_{2,\text{д}}$:

$$y(t) = x^{\sigma_1}(1) \cdot x^{\sigma_2}(2) \cdot \ldots \cdot x^{\sigma_t}(t),$$

где $t \geqslant 1$,

$$x^{\sigma_i}(i) = \begin{cases} \overline{x}(i), & \text{если } \sigma_i = 0, \\ \overline{x}(i), & \text{если } \sigma_i = 1, \end{cases}$$

и $\sigma_1\sigma_2 \ldots \sigma_t$ — префикс длины t слова $0101101110\ldots$, в котором нули стоят только на местах с номерами $\binom{j}{2}$, $j = 2, 3, 4, 5, \ldots$ (Другими словами, функция $f(\widetilde{x}^{\omega})$ такова, что в реализующем ее дереве символ 1 приписан только дугам, которые принадлежат ориентированной цепи, исходящей из корня и соответствующей входному слову $010110111011110\ldots$; остальным дугам дерева приписан 0.)

1.17. 1) Пусть $D_{A,B}$ — нагруженное дерево веса $r \geqslant 1$. Доказать, что для каждой его вершины найдется эквивалентная ей вершина ранга не выше $r - 1$.

2) Пусть $r \geqslant 2$. Показать, что в задаче 1) заменить $r-1$ на $r-2$, вообще говоря, нельзя.

1.18. Пусть все вершины нагруженного дерева $D_{A,B}$ разбиты обычным образом на классы эквивалентности. Доказать, что, каков бы ни был класс эквивалентности дерева $D_{A,B}$, в нем существует такая вершина v, что в ориентированной цепи, исходящей из корня дерева и оканчивающейся в вершине v, все вершины попарно не эквивалентны.

1.19. Найти мощности следующих множеств:

1) множество всех отображений вида $f\colon \{0,1\}^\omega \to \{0,1\}^\omega$, зависящих от (фиксированной) переменной x_1;

2) множество всех одноместных д. функций вида $f\colon \{0,1\}^\omega \to \{0,1\}^\omega$, зависящих от (фиксированной) переменной $\widetilde{x}_1^\omega$;

3) множество всех одноместных о.-д. функций вида $f\colon \{0,1\}^\omega \to \{0,1\}^\omega$, зависящих от переменной $\widetilde{x}_1^\omega$;

4) множество всех автономных функций (см. задачу 1.15), принадлежащих множеству $P_{2,\text{д}}^{1,1}$ и зависящих от переменной $\widetilde{x}_1^\omega$;

5) множество всех порожденных д. функций (см. задачу 1.11), принадлежащих множеству $P_{2,\text{д}}^{n,1}$, где $n \geqslant 1$, и зависящих от переменных $\widetilde{x}_1^\omega, \widetilde{x}_2^\omega, \ldots \widetilde{x}_n^\omega$;

6) множество всех функций из $P_{2,\text{д}}^{1,1}$, зависящих от переменной $\widetilde{x}_1^\omega$ и удовлетворяющих следующему условию: в соответствующих им деревьях, начиная с l-го яруса, стоят только нули (здесь $l \geqslant 1$ и фиксировано);

7) множество всех функций из $P_{2,\text{д}}^{1,1}$, зависящих от переменной $\widetilde{x}_1^\omega$ и таких, что в соответствующих им деревьях единицы могут стоять только на дугах, принадлежащих цепи, отвечающей входному слову $\widetilde{\text{о}}^\omega$;

8) множество всех функций из $P_{2,\text{д}}^{1,1}$, зависящих от переменной $\widetilde{x}_1^\omega$ и удовлетворяющих следующему условию: в соответствующих им деревьях число единиц конечное (хотя может быть сколь угодно большим);

9) множество всех функций из $P_{2,\text{д}}^{1,1}$, зависящих от переменной $\widetilde{x}_1^\omega$ и таких, что в соответствующих им деревьях в любой цепи, выходящей из корня, две единицы не могут быть приписаны соседним дугам;

10) множество всех функций из $P_{2,\text{д}}^{1,1}$, зависящих от переменной $\widetilde{x}_1^\omega$ и таких, что в каждом ярусе соответствующих им деревьев:

а) находится только один нуль (остальные выходные символы — единицы);

б) число нулей равно 2;

в) число нулей равно числу единиц;

г) число нулей меньше числа единиц.

§ 2. Диаграммы, таблицы, канонические уравнения, схемы

1. Диаграммы Мура, канонические таблицы и канонические уравнения. Пусть $Q = \{Q_0, Q_1, \ldots, Q_{w-1}\}$ — множество всех состояний функции f из $P_{A,B,\text{од}}$. Сопоставим функции f ориентированный граф Γ_f, задаваемый следующим образом:

1) множеством вершин орграфа Γ_f является множество $E_w = \{0, 1, \ldots, w-1\}$, причем считается, что вершина j соответствует состоянию Q_j;

2) если $f^{(i)}$ и $f^{(j)}$ — остаточные функции, реализуемые соответственно состояниями Q_i и Q_j, и $f^{(j)}$ является остаточной функцией функции $f^{(i)}$, порождаемой словом $\widetilde{x}^1 = a$, причем $f^{(i)}(a\widetilde{x}^\omega) = bf^{(j)}(\widetilde{x}^\omega)$, то в орграфе Γ_f имеется дуга (i, j), и ей приписывается выражение $a(b)$;

3) дуга (i, j) существует в Γ_f только при выполнении условий п. 2).

Вершина из Γ_f, соответствующая начальному состоянию функции f, обычно отмечается звездочкой. Пусть из вершины i в вершину j идут m дуг, которым приписаны выражения $a_1(b_1), a_2(b_2), \ldots, a_m(b_m)$ (здесь обязательно $a_p \neq a_q$ при $p \neq q$, но некоторые или все символы b_s могут совпадать друг с другом); тогда будем соединять i с j только *одной* дугой (i, j) и будем приписывать ей все выражения $a_p(b_p)$ $(p = 1, 2, \ldots, m)$. Орграф Γ_f называется *диаграммой Мура функции* f.

Две вершины v_1 и v_2 диаграммы Мура называются *эквивалентными*, если всем вершинам диаграммы можно так сопоставить натуральные числа (номера), что будут выполняться следующие условия: а) номера вершин v_1 и v_2 совпадают; б) если u_1 и u_2 — две произвольные вершины с одинаковыми номерами, то, каков бы ни был входной символ a, дуги (u_1, w_1) и (u_2, w_2), соответствующие ему, имеют одинаковую пометку $a(b)$ и концы этих дуг, т. е. вершины w_1 и w_2, имеют одинаковые номера.

Операция склеивания (эквивалентных) состояний состоит в следующем: вершины с одинаковыми номерами «стягиваются» в одну вершину, а появляющиеся при этом параллельные *) одинаково помеченные дуги заменяются одной дугой (с тем же направлением), несущей ту же пометку.

Вершина v диаграммы Мура называется *достижимой из (начальной) вершины* u, если существует ориентированная цепь, выходящая из вершины u и заходящая в вершину v. Начальная вершина считается по определению достижимой.

*) Дуги в ориентированном графе называются *параллельными*, если они соединяют одни и те же вершины и их направления совпадают.

Операция исключения (удаления) недостижимых вершин состоит в удалении из диаграммы всех вершин, не являющихся достижимыми. Диаграмма, в которой нет ни одной пары эквивалентных вершин и все вершины достижимые, называется *приведенной диаграммой.*

Недостижимые вершины можно найти, просматривая в диаграмме все ориентированные цепи, выходящие из начальной вершины. Эквивалентность вершин можно устанавливать, используя непосредственно определение эквивалентных вершин или строя по диаграмме информативное дерево, соответствующее ей (и той о.-д. функции, которую эта диаграмма описывает).

С помощью информативных деревьев легко устанавливается справедливость следующих утверждений.

а) Операция исключения недостижимых вершин в диаграмме Мура о.-д. функции приводит к диаграмме, реализующей ту же функцию.

б) Операция склеивания эквивалентных вершин, примененная к диаграмме Мура о.-д. функции, приводит к диаграмме, реализующей ту же функцию.

в) Число вершин в приведенной диаграмме Мура о.-д. функции равно весу этой функции.

С диаграммой Γ_f функции f можно связать две функции:

а) $F\colon\ A \times Q \to B$ (*функция выходов*);

б) $G\colon\ A \times Q \to Q$ (*функция переходов*).

Функции F и G по орграфу Γ_f определяются так: по паре (a, j) находим вершину j и такую дугу, исходящую из j, которой приписан входной символ a (пусть эта дуга есть (j, l)); значением функции F на паре (a, j) является выходной символ, приписанный дуге (j, l) и стоящий в скобках за символом a; значение функции G на паре (a, j) совпадает с l, т. е. равно «номеру» того состояния, которое «является концом» дуги (j, l).

Система уравнений

$$\begin{aligned} y(t) &= F(x(t),\, q(t-1)), \\ q(t) &= G(x(t),\, q(t-1)), \\ q(0) &= q_0, \end{aligned} \tag{1}$$

где $x(t) \in A,\ y(t) \in B,\ q(t) \in Q\ \ (t = 1, 2, \dots)$ и $q_0 \in Q$, называется *каноническими уравнениями функции (оператора) f с начальным условием q_0.*

С помощью диаграмм Мура и канонических уравнений можно задавать и такие детерминированные функции, которые не являются ограниченно-детерминированными. Множество вершин орграфа Γ_f, соответствующего такой д. функции, совпадает с расширенным натуральным рядом $N = \{0, 1, 2, \dots\}$. («Орграф» определен в гл. VI.)

Если f — о.- д. функция, то функции $F(x(t), q(t-1))$ и $G(x(t), q(t-1))$ (см. систему (1)) и аргументы, от которых они зависят, принимают конечное число значений. Поэтому возможно табличное задание о.-д. функции f с помощью так называемой *канонической таблицы* (табл. 4.1).

Таблица 4.1

$x(t)$	$q(t-1)$	$y(t-1)$	$q(t)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
a	j	$F(a, j)$	$G(a, j)$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Вместо канонических уравнений (1) бывает удобно рассматривать такие канонические уравнения, в которых функции выходов и переходов являются функциями k-значной логики P_k $(k \geqslant 2)$. Для получения соответствующего представления функции f алфавиты A, B и Q кодируются векторами (наборами), координаты (компоненты) которых принадлежат множеству $E_k = \{0, 1, \ldots, k-1\}$ $(k \geqslant 2)$. Если f — о.-д. функция и $n =]\log_k |A|[$, $m =]\log_k |B|[$, $r =]\log_k |Q|[$, то для кодирования букв из алфавитов A, B и Q достаточно взять векторы (с координатами, принадлежащими E_k), имеющие длины n, m и r соответственно*) .

Система (1) преобразуется тогда в следующую:

$$\begin{gathered}
y_1(t) = F_1(x_1(t), \ldots, x_n(t), q_1(t-1), \ldots, q_r(t-1)), \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
y_m(t) = F_m(x_1(t), \ldots, x_n(t), q_1(t-1), \ldots, q_r(t-1)), \\
q_1(t) = G_1(x_1(t), \ldots, x_n(t), q_1(t-1), \ldots, q_r(t-1)), \\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
q_r(t) = G_r(x_1(t), \ldots, x_n(t), q_1(t-1), \ldots, q_r(t-1)), \\
q_1(0) = q_{01}, \quad \ldots, \quad q_r(0) = q_{0r}.
\end{gathered} \tag{2}$$

Используется также векторная запись систем, аналогичных системе (2). При такой записи система (2) примет вид

$$\begin{gathered}
\mathbf{y}^{(m)}(t) = \mathbf{F}^{(m)}(\mathbf{x}^{(n)}(t), \mathbf{q}^{(r)}(t-1)), \\
\mathbf{q}^{(r)}(t) = \mathbf{G}^{(r)}(\mathbf{x}^{(n)}(t), \mathbf{q}^{(r)}(t-1)), \\
\mathbf{q}^{(r)}(0) = \mathbf{q}_0^{(r)}.
\end{gathered} \tag{3}$$

Функции F_i и G_i в системе (2) являются, вообще говоря, *частичными*, т. е. не всюду определенными. Обычно их доопределяют так, чтобы правые части уравнений в (2) имели по возможности более простой вид.

Каноническая таблица, задающая о.-д. функцию f, соответствующую системе (2), имеет $m + n + 2r$ столбцов и k^{n+r} строк.

Уравнения системы (2) называются *каноническими уравнениями в скалярной форме*, а уравнения из системы (1) — *каноническими уравнениями в векторной форме.*

*) Если д. функция f не является ограниченно-детерминированной, то $r = \infty$.

Можно считать, что система (2) определяет функцию из множества $P^{n,m}_{k,\text{д}}$.

Пример 1. Построить диаграмму Мура, каноническую таблицу и канонические уравнения для функции $f(\widetilde{x})^{\omega} = y(1)\,y(2)\ldots y(t)\ldots$ (из $P^{1,1}_{2,\text{од}}$):

а) $y(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t = 1, \\ 1 & \text{при } t \geqslant 2; \end{cases}$ б) $y(t) = \begin{cases} 1 & \text{при } t = 1, \\ t(1) & \text{при } t \geqslant 2; \end{cases}$

в) $y(t) = \begin{cases} x(t) & \text{при } t \text{ нечетном}, \\ \overline{x}(t-1) & \text{при } t \text{ четном}. \end{cases}$

Решение. а) Построив три яруса информативного дерева заданной функции (рис. 4.5), видим, что все вершины дерева разбиваются

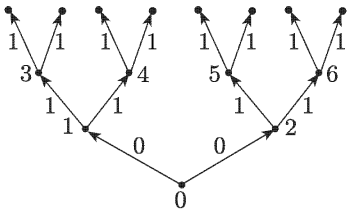


Рис. 4.5

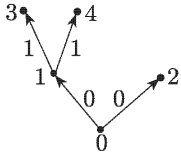


Рис. 4.6

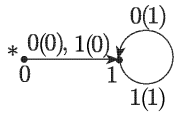


Рис. 4.7

на два класса эквивалентности: первый класс содержит только вершину 0, а второй — все остальные вершины. Следовательно, вес рассматриваемой функции равен 2, и диаграмму Мура для нее можно построить, отождествляя в «усеченном» дереве, изображенном на рис. 4.6, вершины 1, 2, 3, 4 и «восстанавливая» входные символы, соответствующие ребрам этого дерева.

Диаграмма Мура заданной функции приведена на рис. 4.7. (Вместо двух дуг, идущих из вершины 0 в вершину 1, мы изобразили на рисунке только одну, приписав ей два выражения: 0(0) и 1(0). Аналогично мы поступили и с дугами-петлями, исходящими из вершины 1. Начальное состояние помечено звездочкой.)

Используя диаграмму Мура, строим таблицу. В качестве «входной» и «выходной» переменных возьмем $x_1(t)$ и $y_1(t)$ (а не $x(t)$ и $y(t)$,

Таблица 4.2

$x_1(t)$	$q(t-1)$	$y_1(t)$	$q(t)$
0	0	0	1
0	1	1	1
1	0	0	1
1	1	1	1

чтобы явно подчеркнуть содержательное отличие переменных из первоначального задания рассматриваемой функции от переменных, входящих в ее канонические уравнения). В качестве переменной

для описания состояний берем $q(t-1)$ (на «входе») и $q(t)$ (на «выходе»). Каноническая таблица функции — табл. 4.2.

Из таблицы следует, что $y_1(t) = q(t-1)$ и $q(t) = 1$. Значит, канонические уравнения и начальное условие заданной функции таковы:

$$y_1(t) = q(t-1),$$
$$q(t) = 1,$$
$$q(0) = 0.$$

б) Для нахождения веса функции и построения диаграммы Мура достаточно изобразить три яруса ее информативного дерева (рис. 4.8).

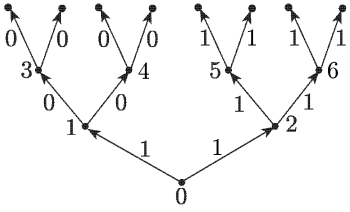


Рис. 4.8

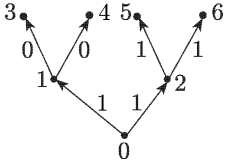


Рис. 4.9

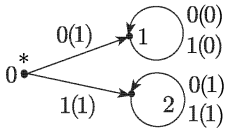


Рис. 4.10

Вес функции равен 3. Вершина 0 образует один класс эквивалентности. Второй класс образуют вершины 1, 3, 4, ... Третий класс — вершины 2, 5, 6, ... «Усеченное» дерево и диаграмма Мура приведены на рис. 4.9 и рис. 4.10.

Построим таблицу. В качестве «входной» переменной возьмем $x(t)$, а в качестве «выходной» — $y(t)$. Для описания состояний берем переменные $q_1(t-1)$, $q_2(t-1)$ (на «входе») и $q_1(t)$, $q_2(t)$ (на «выходе»). Состояние 0 кодируем парой (0, 0), т. е. $q_1 = q_2 = 0$, состояние 1 кодируем парой (0, 1), т. е. $q_1 = 0$, $q_2 = 1$, и состояние 2 — парой (1, 0), т. е. $q_1 = 1$, $q_2 = 0$. Каноническая таблица функции — табл. 4.3.

Таблица 4.3

$x(t)$	$q_1(t-1)$	$q_2(t-1)$	$y(t)$	$q_1(t)$	$q_2(t)$
0	0	0	1	0	1
0	0	1	0	0	1
0	1	0	1	1	0
0	1	1			
1	0	0	1	1	0
1	0	1	0	0	1
1	1	0	1	1	0
1	1	1			

В таблице выписаны все наборы значений переменных $x(t)$, $q_1(t-1)$, $q_2(t-1)$. Для $q_1 = q_2 = 1$ соответствующего состояния в рассматриваемой диаграмме нет. Из-за этого функции, «описывающие» $y(t)$, $q_1(t)$ и $q_2(t)$, являются *частичными* (не всюду определенными) булевыми функциями. Мы их доопределим каким-либо образом; например, как в табл. 4.4.

Таблица 4.4

$x(t)$	$q_1(t-1)$	$q_2(t-1)$	$y(t)$	$q_1(t)$	$q_2(t)$
0	1	1	0	1	0
1	1	1	0	0	1

Указанное доопределение дает достаточно простые представления переменных $y(t)$, $q_1(t)$ и $q_2(t)$ (как булевых функций от переменных $x(t)$, $q_1(t-1)$ и $q_2(t-1)$): $y(t) = \overline{q}_2(t-1)$, $q_1(t) = \overline{x}(t) \cdot q_1(t-1) \vee x(t) \cdot \overline{q}_2(t-1)$, $q_2(t) = \overline{x}(t) \cdot \overline{q}_1(t-1) \vee x(t) \cdot q_2(t-1)$. Тем самым канонические уравнения нами получены. Остается выписать начальное условие. Оно имеет вид $q_1(0) = q_2(0) = 0$.

в) Достаточно построить четыре яруса информативного дерева (рис. 4.11). Все вершины дерева разбиваются на три класса эквивалентности: первый класс содержит вершины 0, 3, 4, 5, 6, ..., второй

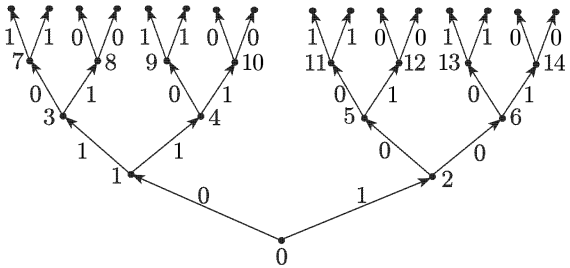


Рис. 4.11

класс — вершины 1, 7, 9, 11, 13, ..., третий класс — вершины 2, 8, 10, 12, 14, ... Вес рассматриваемой функции равен 3.

«Усеченное» дерево и диаграмма Мура изображены на рис. 4.12

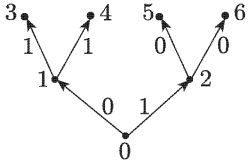


Рис. 4.12

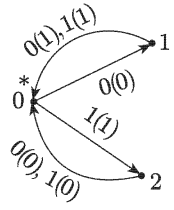


Рис. 4.13

и рис. 4.13. Каноническая таблица (с доопределенными значениями соответствующих функций) — табл. 4.5.

Состояния закодированы нами традиционным образом: состоянию 0 сопоставлена пара (0, 0), т. е. $q_1 = q_2 = 0$, состоянию 1 сопоставлена пара (0, 1), т. е. $q_1 = 0$ и $q_2 = 1$, состоянию 2 — пара (1, 0), т. е. $q_1 = 1$ и $q_2 = 0$.

Таблица 4.5

$x(t)$	$q_1(t-1)$	$q_2(t-1)$	$y(t)$	$q_1(t)$	$q_2(t)$
0	0	0	0	0	1
0	0	1	1	0	0
0	1	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0
1	0	0	1	1	0
1	0	1	1	0	0
1	1	0	0	0	0
1	1	1	0	0	0

Канонические уравнения и начальное условие имеют следующий вид:

$$y(t) = \overline{x}(t) \cdot q_2(t-1) \vee x(t) \cdot \overline{q}_1(t-1),$$
$$q_1(t) = x(t) \cdot \overline{q}_1(t-1) \cdot \overline{q}_2(t-1),$$
$$q_2(t) = \overline{x}(t) \cdot \overline{q}_1(t-1) \cdot \overline{q}_2(t-1),$$
$$q_1(0) = q_2(0) = 0.$$

Пример 2. Для каждой диаграммы, изображенной на рис. 4.14, построить приведенную диаграмму.

Решение. а) Рассматривая диаграмму, нетрудно заметить, что вершины 3 и 4 не достижимы из начальной вершины 0. Удаляя их,

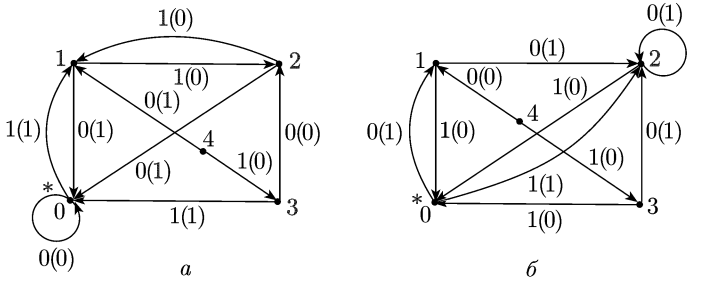


Рис. 4.14

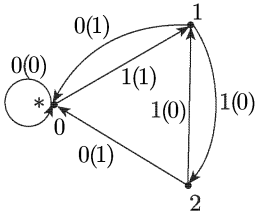


Рис. 4.15

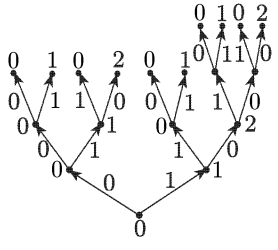


Рис. 4.16

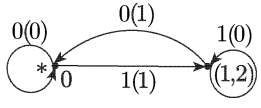


Рис. 4.17

получаем диаграмму, изображенную на рис. 4.15. Исходя из этой (новой) диаграммы строим несколько ярусов соответствующего информативного дерева (рис. 4.16; достаточно неполных четырех ярусов). Изображенный фрагмент дерева позволяет сделать заключение

об эквивалентности вершин 1 и 2. Склеивая эти вершины, получаем диаграмму, представленную на рис. 4.17. Эта диаграмма приведенная, так как обе ее вершины достижимые и не эквивалентны друг другу (хотя бы потому, что дуга, выходящая из вершины 0 и соответствующая входному символу 0, помечена выходным символом 0, а дуга с таким же входным символом, выходящая из вершины (1, 2), имеет метку 1).

Эквивалентность вершин 1 и 2 в диаграмме, изображенной на рис. 4.15, можно обосновать также следующим образом: 1) дуги, соединяющие вершины 1 и 2 между собой, помечены одинаково (на них стоят метки 1(0)); 2) дуги с меткой 0(1), выходящие из этих вершин, заходят в одну и ту же вершину 0; следовательно, вершины 1 и 2 эквивалентны (в силу определения эквивалентных вершин).

б) В диаграмме не достижимы вершины 3 и 4. После удаления их получаем диаграмму, изображенную на рис. 4.18. Фрагмент информативного дерева, соответствующего этой (новой) диаграмме, показан

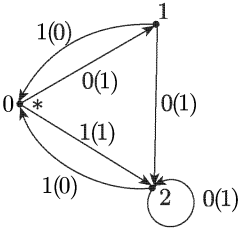


Рис. 4.18

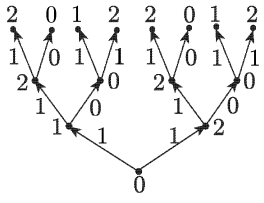


Рис. 4.19

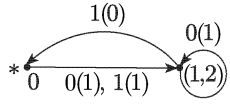


Рис. 4.20

на рис. 4.19 (достаточно трех ярусов). Ясно, что вершины 1 и 2 эквивалентны. Склеивая их, получаем приведенную диаграмму (рис. 4.20).

Пример 3. Для частично определенной функции $f(\widetilde{x}^\omega)$: $\{0, 1\}^\omega \to \to \{0, 1\}^\omega$, отображающей заданные последовательности в заданные, построить (если это возможно) диаграмму Мура с конечным и по возможности меньшим числом вершин. Затем полученную диаграмму доопределить до диаграммы Мура всюду определенной о.-д. функции из $P^{1,1}_{2,\text{од}}$:

а) $f(0[001]^\omega) = 1[0]^\omega$ и $f(1[100]^\omega) = [01]^\omega$;

б) $f([110]^\omega) = 0[001]^\omega$ и $f(1[10]^\omega) = 00[011]^\omega$.

Решение. а) Так как у заданных входных последовательностей первые символы (т. е. префиксы длины 1) разные, то исходная частично определенная функция может быть продолжена до всюду определенной д. функции. Далее, нетрудно заметить, что заданные входные и выходные последовательности квазипериодические.

Значит, исходную частичную функцию можно доопределить до о.-д. функции. (Если приведенные в условии задачи соотношения переписать в виде $f(0[001]^\omega) = 1[000]^\omega$ и $f(1[100100]^\omega) = 0[101010]^\omega$, то становится очевидным, что вес подходящей о.-д. функции не больше,

чем $1+3+6=10$. Здесь 1 — общая длина предпериодов в новой записи всех четырех входных и выходных последовательностей, а 3 и 6 — общие длины периодов у последовательностей соответственно из первого и второго соотношений.)

Мы вначале не будем пытаться найти диаграмму Мура с минимально возможным (или хотя бы с не очень большим) числом вершин, а просто будем строить какую-нибудь подходящую диаграмму, соответствующую всюду определенной д. функции, перерабатывающей заданные входные последовательности в заданные выходные последовательности.

Для достижения этой цели действуем следующим образом: сначала изобразим часть диаграммы, реализующую соотношение $f(0[001]^\omega) = 1[0]^\omega$, а затем добавим к ней часть, отвечающую равенству $f(1[100]^\omega) = [01]^\omega$. Так как соотношение $f(0[001]^\omega) = 1[0]^\omega$ можно записать в виде $f(0[001]^\omega) = 1[000]^\omega$, то имеем $x(i+3l) = x(i)$ и $y(i+3l) = y(i)$ при $i = 2, 3, 4, \ldots$ и $l = 1, 2, \ldots$

Отсюда следует, что данное соотношение можно реализовать 4-вершинной диаграммой с циклом длины 3 (рис. 4.21). Аналогич-

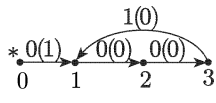


Рис. 4.21

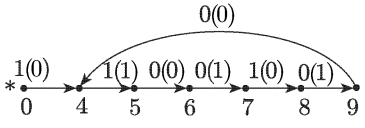


Рис. 4.22

но поступаем со вторым соотношением. Его можно записать так: $f(1[100100]^\omega) = 0[101010]^\omega$. Следовательно, имеем $x(j+6m) = x(j)$ и $y(j+6m) = y(j)$ при $j = 2, 3, 4, \ldots$ и $m = 1, 2, \ldots$, а поэтому рассматриваемое соотношение можно реализовать 7-вершинной диаграммой с циклом длины 6 (рис. 4.22).

Далее «склеиваем» две построенные диаграммы в «начальной» вершине 0 и доопределяем получившуюся при этом «частичную» диаграмму подходящим способом до диаграммы всюду определенной о.-д. функции. Приходим, например, к диаграмме, изображенной на рис. 4.23. Эта диаграмма имеет 10 вершин.

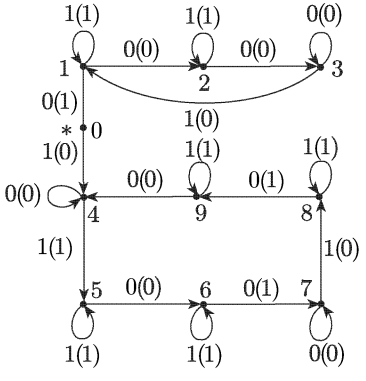


Рис. 4.23

Детально проанализировав взаимосвязи между входными и выходными последовательностями, указанными в условии задачи, и учтя структурные особенности этих последовательностей, можно построить более «экономную» (по числу вершин) диаграмму, реализующую заданное частичное отображение.

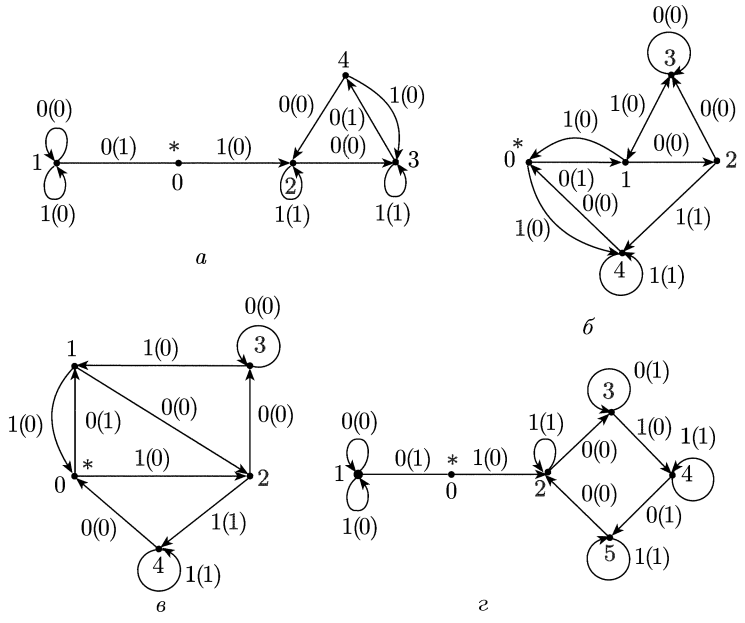


Рис. 4.24

На рис. 4.24 приведены три 5-вершинные (*а*–*в*) и одна (*г*) 6-вершинная диаграммы, реализующие заданную частично определенную функцию.

б) Входные последовательности можно записать так: $[110]^\omega = 1101[101]^\omega$ и $1[10]^\omega = 1101[01]^\omega$. Отсюда следует, что их префиксы длины 4 совпадают (а соответствующие префиксы большей длины попарно отличны друг от друга). Значит, прежде чем строить диаграмму, надо проверить, совпадают ли префиксы длины 4 у заданных выходных последовательностей (если эти префиксы различные, то не будет выполняться условие детерминированности).

Запишем заданные выходные последовательности в иной форме: $0[001]^\omega = 0001[001]^\omega$ и $00[011]^\omega = 0001[101]^\omega$. Теперь очевидно, что у этих последовательностей префиксы длины 4 одинаковые. Соотношения $f(1101[101]^\omega) = 0001[001]^\omega$ можно реализовать диаграммой, имеющей только две вершины (рис. 4.25). Однако «расширить» эту диаграмму таким образом, чтобы реализовывалось и соотношение $f(1101[01]^\omega) = 0001[101]^\omega$, не удается.

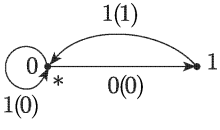


Рис. 4.25

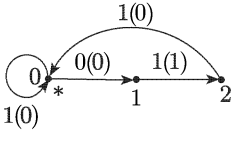


Рис. 4.26

Поэтому для получения возможности одновременной (совместной) реализации обоих соотношений надо более гибко строить части иско-

мой диаграммы, помня о том, что предстоит «склеивать» их. В нашем случае каждая из двух частей диаграммы должна иметь одинаковое «начало», соответствующее общему префиксу (длины 4) двух заданных входных последовательностей. (Кроме того, полезно принять во внимание, что общее наименьшее кратное длин периодов заданных входных и выходных последовательностей равно 6.)

Подходящая диаграмма для соотношения $f(1101[101]^\omega) = 0001[001]^\omega$ изображена на рис. 4.26. Диаграмма, реализующая соотношение $f(1101[01]^\omega) = 0001[101]^\omega$ и приспособленная для склейки с предыдущей диаграммой, изображена на рис. 4.27.

При ее построении использовался, как обычно, «полный перебор» возможных случаев. Покажем подробнее, как это делалось. До вершины 2 диаграмма совпадает с предыдущей и реализует преобразование

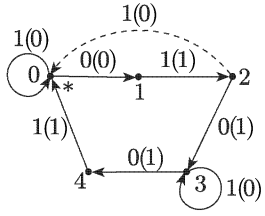


Рис. 4.27

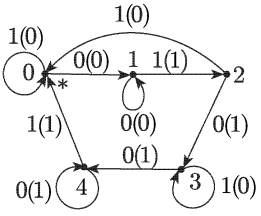


Рис. 4.28

префикса 1101 в префикс 0001 (дуга (1, 0), изображенная на рисунке штриховой линией, для реализации соотношения $f(1101[01]^\omega) = 0001[101]^\omega$ не нужна, но ее следует учитывать при построении диаграммы). Далее выясняем, можно ли «направить» дугу из вершины 2 с нужной нам меткой 0(1) в какую-либо из имеющихся вершин 0, 1 или 2. Если эта дуга будет входить в вершину 0, то слово 010 будет преобразовываться в слово 100 (при «движении» по диаграмме из вершины 2), а нам нужно иметь слово 101. Следовательно, в вершину 0 эту дугу направить нельзя. Не может заходить рассматриваемая дуга и в вершину 1, так как иначе слово 01 преобразовалось бы в слово 11 (а мы должны иметь слово 10). Делать эту дугу петлей в вершине 2 также нельзя, ибо в противном случае имеем следующее: слово 010 преобразуется в слово 100 (а нам нужно слово 101).

Итак, дуга, выходящая из вершины 2 и имеющая метку 0(1), должна заходить в «новую» вершину 3. Далее смотрим, куда можно направить дугу из вершины 3 с меткой 1(0). Легко убеждаемся в том, что ни в одну из вершин 0, 1 или 2 эту дугу вести нельзя, но сделать ее петлей в вершине 3 можно.

Затем выясняем, куда можно направить дугу из вершины 3 с меткой 0(1). Оказывается, что для этой дуги нужна новая вершина 4.

Наконец, нетрудно проверить, что дугу с меткой 1(1), выходящую из вершины 4, можно направить в вершину 0.

После «склеивания» двух построенных диаграмм в вершинах 0, 1 и 2 остается подходящим способом доопределить получившуюся «частичную» диаграмму до диаграммы всюду определенной функции. На рис. 4.28 изображена одна из таких диаграмм.

Пример 4. Найти вес о.-д. функции f из $P^{1,1}_{2,\text{од}}$, заданной каноническими уравнениями:

$$f\colon \begin{cases} y(t) = \overline{x}(t)\cdot \overline{q}_1(t-1), \\ q_1(t) = x(t) \sim q_1(t-1), \\ q_2(t) = q_1(t-1) \oplus q_2(t-1), \\ q_1(0) = 1, \quad q_2(0) = 0. \end{cases}$$

Решение. Эту задачу можно решать путем построения информативного дерева функции f. Однако мы поступим иначе: сначала

Таблица 4.6

$x(t)$	$q_1(t-1)$	$q_2(t-1)$	$y(t)$	$q_1(t)$	$q_2(t)$
0	0	0	1	1	0
0	0	1	1	1	1
0	1	0	0	0	1
0	1	1	0	0	0
1	0	0	0	0	0
1	0	1	0	0	1
1	1	0	0	1	1
1	1	1	0	1	0

построим для функции f каноническую таблицу, затем по таблице построим диаграмму Мура и, наконец, получим из нее приведенную диаграмму. Число вершин в приведенной диаграмме равно весу функции f (см. задачу 2.3.3). Каноническая таблица функции f — табл. 4.6.

Диаграмма Мура функции f изображена на рис. 4.29. Анализируя ее, получаем: состояние 00 эквивалентно состоянию 01, а состояние 10 — состоянию 11. Поэтому приведенная диаграмма выглядит так, как показано на рис. 4.30.

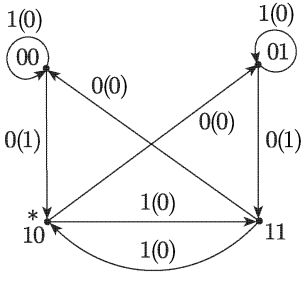


Рис. 4.29

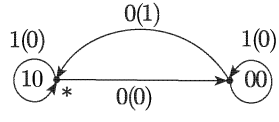


Рис. 4.30

Следовательно, вес функции f равен 2. Нетрудно видеть, что переменная q_2 является фиктивной: функция f эквивалентна (по своему функционированию) функции следующей f', задаваемой каноническими уравнениями и начальным условием:

$$f'\colon \begin{cases} y(t) = \overline{x}(t)\cdot \overline{q}(t-1), \\ q(t) = x(t) \sim q(t-1), \\ q(0) = 1. \end{cases}$$

Вес функции f' равен 2.

2.1. Построить диаграмму Мура, каноническую таблицу и канонические уравнения для функции $f(\widetilde{x}^{\omega}) = y(1)\,y(2)\ldots y(t)\ldots$ из $P^{1,1}_{2,\text{од}}$:

1) $y(t) = \begin{cases} 1 \text{ при } t = 1, \\ x(t-1) \to x(t) \text{ при } t \geqslant 2; \end{cases}$

2) $y(t) = \begin{cases} 0 \text{ при } t = 1, \\ x(t-1) \to \overline{y}(t-1) \text{ при } t \geqslant 2; \end{cases}$

3) $y(t) = \begin{cases} 1 \text{ при } t = 1, \\ y(t-1)\cdot x(t) \text{ при } t \geqslant 2; \end{cases}$

4) $y(t) = \begin{cases} 1 \text{ при } t = 1,\ 2, \\ x(t) \to x(2) \text{ при } t \geqslant 3; \end{cases}$

5) $y(t) = \begin{cases} x(1) \text{ при } t = 1, \\ x(t-1) \oplus x(t) \text{ при } t \geqslant 2; \end{cases}$

6) $y(t) = \begin{cases} x(t) \text{ при } t = 1,\ 2, \\ \overline{x}(t-1) \text{ при } t \geqslant 3; \end{cases}$

7) $y(t) = \begin{cases} x(2), \text{ если } t = 2, \\ 1 \text{ в остальных случаях}; \end{cases}$

8) $y(t) = \begin{cases} x(1) \to x(t), \text{ если } t = 1,\ 2,\ 3, \\ 0 \text{ в ином случае}; \end{cases}$

9) $y(t) = \begin{cases} \overline{x}(1) \text{ при } t = 1, \\ y(t-1) \vee x(t) \text{ при } t \geqslant 2; \end{cases}$

10) $y(t) = \begin{cases} x(1), \text{ если } t = 1,\ 2, \\ y(t-2) \oplus y(t-1), \text{ если } t \geqslant 3; \end{cases}$

11) $y(t) = \begin{cases} 0, \text{ если } t = 1 \text{ и } t = 3, \\ \overline{x}(t), \text{ если } t = 2 \text{ или } t \geqslant 4; \end{cases}$

12) $y(t) = \begin{cases} \overline{x}(1) \text{ при } t = 1, \\ \overline{y}(t-1)\cdot x(t) \text{ при } t \geqslant 2; \end{cases}$

13) $y(t) = \begin{cases} 1 \text{ при } t = 1, \\ x(t-1) \vee x(t) \text{ при } t \geqslant 2; \end{cases}$

14) $y(t) = \begin{cases} \overline{x}(1) \text{ при } t = 1, \\ y(t-1) \oplus \overline{x}(t) \text{ при } t \geqslant 2; \end{cases}$

15) $y(t) = \begin{cases} x(t), & \text{если } t \text{ нечетное,} \\ 0, & \text{если } t \text{ четное;} \end{cases}$

16) $y(t) = \begin{cases} \overline{x}(t), & \text{если } t \text{ нечетное,} \\ y(t-1) \oplus x(t), & \text{если } t \text{ четное;} \end{cases}$

17) $y(t) = \begin{cases} x(t), & \text{если } t \text{ нечетное,} \\ x(1) \to y(t-1), & \text{если } t \text{ четное;} \end{cases}$

18) $f(\widetilde{x}^{\omega}) = 0x(2)\,[1]^{\omega}$; 19) $f(\widetilde{x}^{\omega}) = \overline{x}(1)\,x(2)\,[0]^{\omega}$;

20) $f(\widetilde{x}^{\omega}) = 0x(1)\,[01]^{\omega}$; 21) $f(\widetilde{x}^{\omega}) = [x(1)\,0]^{\omega}$;

22) $f(\widetilde{x}^{\omega}) = \begin{cases} \widetilde{0}^{\omega}, & \text{если } \widetilde{x}^{\omega} = \widetilde{0}^{\omega}, \\ \widetilde{0}^{l}\,[1]^{\omega}, & \text{если } \widetilde{x}^{\omega} = \widetilde{0}^{l}1x(l+2)\,x(l+3)\ldots \text{ и } l \geqslant 1, \\ \widetilde{1}^{\omega}, & \text{если } \widetilde{x}^{\omega} = 1x(2)\,x(3)\ldots; \end{cases}$

23) $f(\widetilde{x}^{\omega}) = \begin{cases} \widetilde{1}^{\omega}, & \text{если } \widetilde{x}^{\omega} = \widetilde{0}^{\omega} \text{ или } \widetilde{x}^{\omega} = \widetilde{1}^{\omega}, \\ \widetilde{1}^{l}\,[0]^{\omega}, & \text{если } \widetilde{x}^{\omega} = \widetilde{0}^{l}1x(l+2)\,x(l+3)\ldots \text{ или} \\ & \widetilde{x}^{\omega} = \widetilde{1}^{l}\,0x(l+2)\,x(l+3)\ldots, \text{ где } l \geqslant 1; \end{cases}$

24) $y(t)$ есть t-я цифра после запятой в двоичном разложении числа $5/7$;

25) $y(t)$ есть $(t+1)$-я цифра после запятой в двоичном разложении числа $1/9$;

26) $y(t)$ есть $(t+2)$-я цифра после запятой в двоичном разложении числа $11/15$;

27) $y(t)$ есть $(t+1)$-я цифра после запятой в двоичном разложении числа $x(t)/5$;

28) $y(t)$ есть $(t+2)$-я цифра после запятой в двоичном разложении числа $3x(t)/7$;

29) $y(t)$ есть t-я цифра после запятой в двоичном разложении числа $(x(t)+1)/3$;

30) $y(t) = \begin{cases} x(1) & \text{при } t = 1, \\ \overline{x}(1) \cdot \overline{x}(2) & \text{при } t = 2, \\ (y(t-2) \oplus \overline{x}(t)) \cdot x(t-1) & \text{при } t \geqslant 3; \end{cases}$

31) $y(t) = \begin{cases} \overline{x}(1) & \text{при } t = 1, \\ \overline{x}(1) + x(2) & \text{при } t = 2, \\ x(t-2) \oplus x(t-1) \oplus x(t) & \text{при } t \geqslant 3; \end{cases}$

32) $y(t) = \begin{cases} x(1) \text{ при } t = 1, \\ x(2) \to x(1) \text{ при } t = 2, \\ x(t) \to (x(t-1) \to x(t-2)) \text{ при } t \geqslant 3; \end{cases}$

33) $y(t) = \begin{cases} 0, \text{ если } t = 1, \\ x(t-1) \to x(t), \text{ если } t \text{ четное}, \\ \overline{x}(t) \text{ в ином случае}; \end{cases}$

34) $y(t) = \begin{cases} x(1), \text{ если } t = 1, \\ \overline{x}(t-1), \text{ если } t \geqslant 3 \text{ и нечетное}, \\ y(t-1) \text{ в ином случае}; \end{cases}$

35) $y(t) = \begin{cases} 0, \text{ если } t = 3s-2 \text{ и } s \geqslant 1, \\ 1, \text{ если } t = 3s-1 \text{ и } s \geqslant 1, \\ x(t) \text{ в ином случае}; \end{cases}$

36) $y(t) = \begin{cases} 1, \text{ если } t = 3s-2 \text{ и } s \geqslant 1, \\ \overline{x}(t-1), \text{ если } t = 3s-1 \text{ и } s \geqslant 1, \\ \overline{y}(t-1) \to x(t) \text{ в ином случае}; \end{cases}$

37) $y(t) = \begin{cases} 0, \text{ если } t = 1, \\ x(t), \text{ если } t = 3s-2 \text{ и } s \geqslant 2, \\ x(t-1) \cdot \overline{y}(t-1) \text{ в ином случае}; \end{cases}$

38) $y(t) = \begin{cases} 1, \text{ если } t = 4s+1 \text{ и } s \geqslant 0, \\ x(t), \text{ если } t = 4s+2 \text{ и } s \geqslant 0, \\ \overline{x}(t), \text{ если } t = 4s+3 \text{ и } s \geqslant 0, \\ 0 \text{ в ином случае}; \end{cases}$

39) $y(t) = \begin{cases} x(t), \text{ если } t = 4s+1 \text{ и } s \geqslant 0, \\ x(t-1), \text{ если } t = 4s+2 \text{ и } s \geqslant 0, \\ \overline{y}(t-1), \text{ если } t = 4s+3 \text{ и } s \geqslant 0, \\ y(t-1) \cdot x(t) \text{ в ином случае}; \end{cases}$

40) $y(t) = \begin{cases} 0, \text{ если } t = 4s+1 \text{ и } s \geqslant 0, \\ x(t-1) \oplus x(t), \text{ если } t = 4s+2 \text{ и } s \geqslant 0, \\ y(t-1) \oplus \overline{x}(t), \text{ если } t = 4s+3 \text{ и } s \geqslant 0, \\ x(t-1) \oplus y(t-1) \text{ в ином случае}. \end{cases}$

2.2. Для каждой из диаграмм построить приведенную диаграмму: 1) рис. 4.31, *а*; 2) рис. 4.31, *б*; 3) рис. 4.31, *в*; 4) рис. 4.31, *г*;

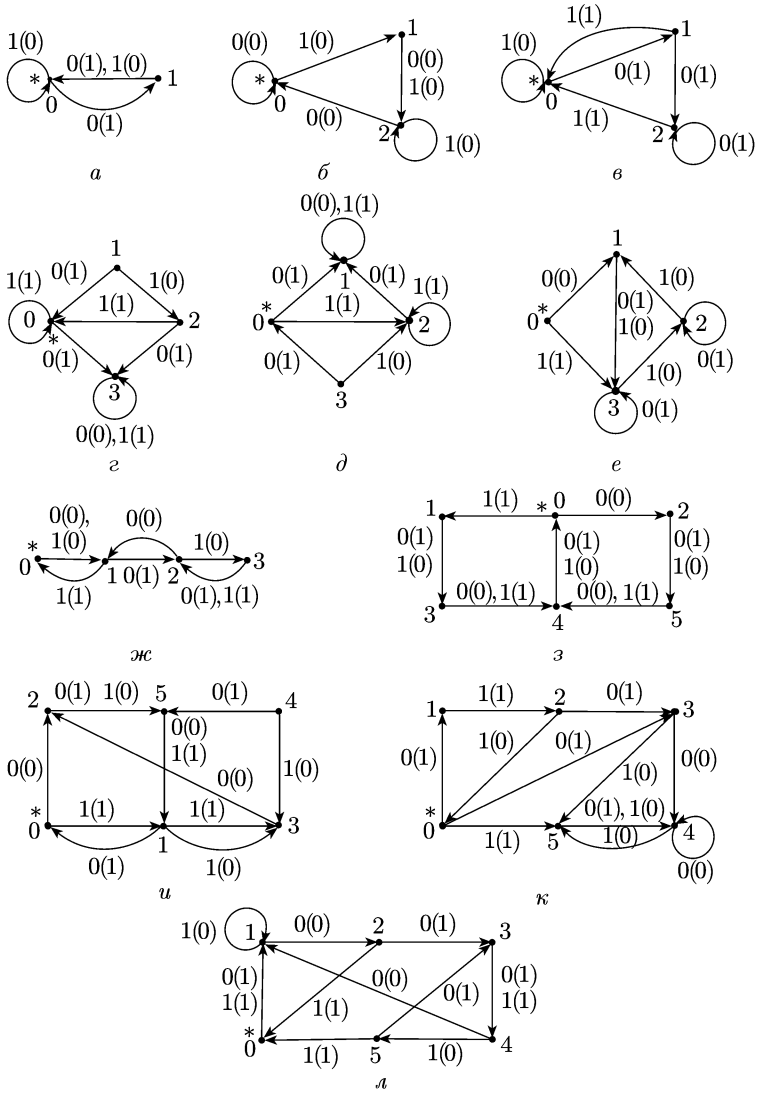


Рис. 4.31

5) рис. 4.31, *д*; 6) рис. 4.31, *е*; 7) рис. 4.31, *ж*; 8) рис. 4.31, *з*; 9) рис. 4.31, *и*; 10) рис. 4.31, *к*; 11) рис. 4.31, *л*.

2.3. Доопределить частичную диаграмму таким образом, чтобы новой диаграмме соответствовала о.-д. функция указанного веса r:

1) рис. 4.32, *а*; $r = 2$; 2) рис. 4.32, *б*; $r = 2$; 3) рис. 4.32, *в*; $r = 2$;

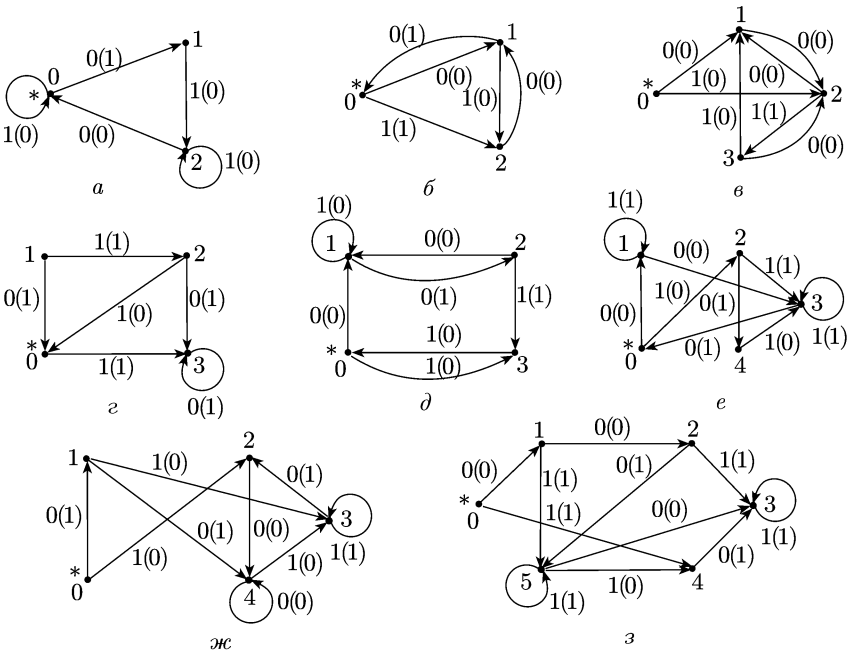


Рис. 4.32

4) рис. 4.32, *г*; $r = 2$; 5) рис. 4.32, *д*; $r = 3$; 6) рис. 4.32, *е*; $r = 3$; 7) рис. 4.32, *ж*; $r = 4$; 8) рис. 4.32, *з*; $r = 4$.

2.4. Найти вес о.-д. функции f из $P^{1,1}_{2,\text{од}}$, заданной каноническими уравнениями:

1) f: $\begin{cases} y(t) = \overline{x}(t) \to q_1(t-1)\cdot q_2(t-1), \\ q_1(t) = \overline{q}_1(t-1) \to q_2(t-1), \\ q_2(t) = \overline{q}_2(t-1) \to q_1(t-1), \\ q_1(0) = q_2(0) = 1; \end{cases}$

2) f: $\begin{cases} y(t) = x(t) \oplus q_1(t-1), \\ q_1(t) = x(t)\cdot q_2(t-1), \\ q_2(t) = \overline{q}_1(t-1), \\ q_1(0) = 1, \quad q_2(0) = 0; \end{cases}$

3) f: $\begin{cases} y(t) = q_1(t-1), \\ q_1(t) = \overline{q}_2(t-1) \to q_1(t-1), \\ q_2(t) = x(t), \\ q_1(0) = 0, \quad q_2(0) = 1; \end{cases}$

4) f: $\begin{cases} y(t) = x(t) \vee q_1(t-1), \\ q_1(t) = x(t) \oplus q_2(t-1), \\ q_2(t) = x(t)\cdot q_1(t-1)\cdot \overline{q}_2(t-1), \\ q_1(0) = q_2(0) = 0; \end{cases}$

5) f: $\begin{cases} y(t) = q_1(t-1) \to q_2(t-1), \\ q_1(t) = \overline{q}_2(t-1), \\ q_2(t) = x(t) \to q_1(t-1), \\ q_1(0) = 1, \quad q_2(0) = 0; \end{cases}$

6) f: $\begin{cases} y(t) = x(t) \oplus q_1(t-1) \oplus q_2(t-1), \\ q_1(t) = q_2(t-1) \to q_1(t-1), \\ q_2(t) = q_1(t-1) \to x(t), \\ q_1(0) = q_2(0) = 0; \end{cases}$

7) f: $\begin{cases} y(t) = \overline{x}(t) \cdot q_1(t-1) \cdot \overline{q}_2(t-1) \oplus \overline{q}_1(t-1) \cdot q_2(t-1), \\ q_1(t) = x(t) \vee \overline{q}_1(t-1) \cdot q_2(t-1), \\ q_2(t) = \overline{x}(t) \cdot \overline{q}_2(t-1), \\ q_1(0) = 0, \quad q_2(0) = 1; \end{cases}$

8) f: $\begin{cases} y(t) = x(t) \cdot \overline{q}_1(t-1) \vee q_2(t-1), \\ q_1(t) = q_1(t-1) \to x(t), \\ q_2(t) = x(t) \to \overline{q}_2(t-1), \\ q_1(0) = q_2(0) = 1; \end{cases}$

9) f: $\begin{cases} y(t) = \overline{x}(t) \cdot q_1(t-1) \vee x(t) \cdot \overline{q}_2(t-1), \\ q_1(t) = x(t) \cdot \overline{q}_1(t-1) \vee \overline{x}(t) \cdot \overline{q}_2(t-1), \\ q_2(t) = \overline{x}(t) \cdot (\overline{q}_1(t-1) \vee \overline{q}_2(t-1)), \\ q_1(0) = 1, \quad q_2(0) = 0; \end{cases}$

10) f: $\begin{cases} y(t) = q_1(t-1) \cdot q_2(t-1) \to x(t), \\ q_1(t) = x(t), \\ q_2(t) = q_2(t-1) \oplus q_1(t-1), \\ q_1(0) = q_2(0) = 1. \end{cases}$

2.5. Для частично определенной д. функции $f(\widetilde{x}^{\omega})$: $\{0,1\}^{\omega} \to \{0,1\}^{\omega}$, отображающей заданные последовательности в заданные, построить диаграмму Мура с возможно меньшим числом вершин; затем полученную диаграмму доопределить до диаграммы Мура всюду определенной о.-д. функции из $P^{1,1}_{2,\text{од}}$, и для этой новой функции построить каноническую таблицу и канонические уравнения:

1) $f(\widetilde{0}^{\omega}) = [01]^{\omega}$ и $f([10]^{\omega}) = \widetilde{1}^{\omega}$;

2) $f([01]^{\omega}) = \widetilde{0}^{\omega}$ и $f(1\,[10]^{\omega}) = [001]^{\omega}$;

3) $f([101]^{\omega}) = [110]^{\omega}$ и $f([010]^{\omega}) = [1011]^{\omega}$;

4) $f(1\,[110]^{\omega}) = 10\,[001]^{\omega}$ и $f(01\,[100]^{\omega}) = [101]^{\omega}$;

5) $f(01\,[10]^{\omega}) = [100]^{\omega}$ и $f(011\,[110]^{\omega}) = 100\,[01]^{\omega}$;

6) $f([1101]^{\omega}) = [011]^{\omega}$ и $f(1100\,[1]^{\omega}) = [0111]^{\omega}$;

7) $f(111\,[100]^{\omega}) = 00\,[001]^{\omega}$ и $f(1\,[1100]^{\omega}) = 000\,[1]^{\omega}$;

8) $f([11000]^{\omega}) = [010]^{\omega}$ и $f(1100\,[1]^{\omega}) = 01\,[0]^{\omega}$.

2.6. Подсчитать число различных о.-д. функций из $P^{1,1}_{2,\text{од}}$, у которых приведенная диаграмма Мура получается из указанного ориентированного графа путем приписывания его дугам подходящих меток вида $a(b)$, где a и b принадлежат множеству $\{0, 1\}$ (звездочкой обозначается начальное состояние):

1) рис. 4.33, *а*; 2) рис. 4.33, *б*; 3) рис. 4.33, *в*; 4) рис. 4.33, *г*; 5) рис. 4.33, *д*; 6) рис. 4.33, *е*; 7) рис. 4.33, *ж*; 8) рис. 4.33, *з*; 9) рис. 4.33, *и*; 10) рис. 4.33, *к*; 11) рис. 4.33, *л*; 12) рис. 4.33, *м*.

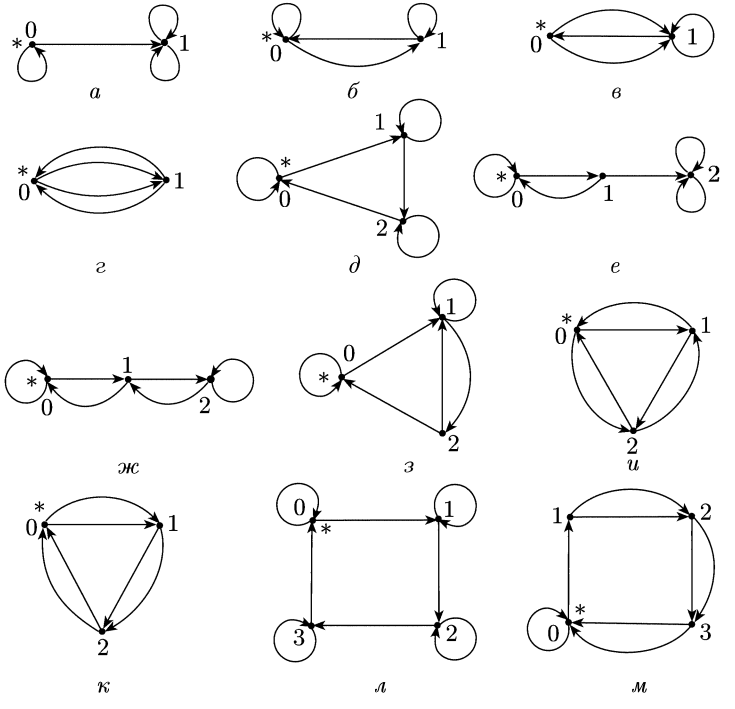


Рис. 4.33

2.7. 1) Доказать, что приведенные диаграммы Мура различных о.-д. функций веса 2 из $P^{1,1}_{2,0}$ исчерпываются диаграммами, получающимися из ориентированных графов, изображенных на рис. 4.34,

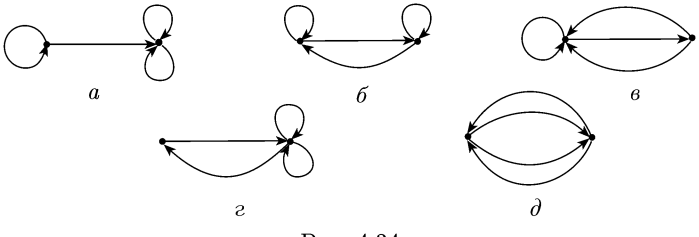


Рис. 4.34

путем приписывания их вершинам меток 0 и 1, приписывания их ребрам меток вида $a(b)$, где a и b принадлежат множеству $\{0, 1\}$, и выделения подходящих вершин в качестве «начальных» (т.е. в качестве вершин, соответствующих начальным состояниям).

2) Подсчитать число различных о.-д. функций из $P^{1,1}_{2,\text{од}}$, имеющих вес 2.

2. Операции над детерминированными функциями. Пусть д. функция f задана системой (2) (см. п. 1) и каждая из функций F_i и G_l — всюду определенная функция k-значной логики P_k $(k \geqslant 2)$. Будем рассматривать функцию f как элемент множества $P^{n,m}_{k,\text{д}}$.

Схема Σ_f, *реализующая функцию* f, определяется следующим образом: Σ_f представляет собой сеть (определение сети см. в гл. VI), полюсам которой приписаны символы входных и выходных переменных, а некоторым вершинам, отличным от полюсов, приписаны символы каких-то (вполне определенных и связанных с f) д. функций $\left(\text{из множества } \bigcup\limits_{\substack{s\geqslant 1\\ t\geqslant 1}} P^{s,t}_{k,\text{д}}\right)$. Схему функции f из $P^{n,m}_{k,\text{д}}$ будем изображать

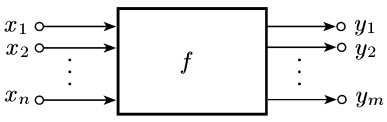


Рис. 4.35

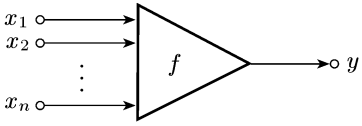


Рис. 4.36

в виде прямоугольника (рис. 4.35) с n *входами* (*входными каналами*) *и* m *выходами* (*выходными каналами*). Входы изображаются в виде стрелок, исходящих из *входных полюсов*, а выходы — в виде стрелок, заходящих в *выходные полюса*. Полюса изображаются в виде кружочков. Если $m = 1$, то схему Σ_f, реализующую функцию f, иногда изображают в виде треугольника (рис. 4.36) с n входными и одним выходным полюсами.

Считаем, что в каждый момент времени $t = 1, 2, \ldots$ на i-й вход x_i *поступает* входной символ $x_i(t) \in E_k$, а на j-м выходе y_j *выдается* значение

$$y_j(t) = F_j(x_1(t), \ldots, x_n(t), q_1(t-1), \ldots, q_r(t-1)).$$

Говорят, что *выход* y_j *зависит с запаздыванием от входа* x_i, если функция $F_j(\mathbf{x}^{(n)}(t),\ \mathbf{q}^{(r)}(t-1))$ не зависит существенно от переменной $x_i(t)$.

Понятие *зависимости с запаздыванием* можно ввести иначе. Рассмотрим, например, случай д. функции вида $f(\widetilde{x}_1^{\omega}, \widetilde{x}_2^{\omega}, \ldots, \widetilde{x}_n^{\omega})$: $A_1^{\omega} \times A_2^{\omega} \times \ldots \times A_n^{\omega} \to B^{\omega}$ и определим зависимость с запаздыванием от переменной $\widetilde{x}_1^{\omega}$. Функция f *зависит с запаздыванием от* $\widetilde{x}_1^{\omega}$, если при любых входных словах $\widetilde{a}_1^{\omega}, \widetilde{a}_2^{\omega}, \ldots, \widetilde{a}_n^{\omega}$ $(\widetilde{a}_j^{\omega} \in A_j^{\omega},\ j = 1, 2, \ldots, n)$ s-я буква выходного слова $\widetilde{b}^{\omega} = f(\widetilde{a}_1^{\omega}, \widetilde{a}_2^{\omega}, \ldots, \widetilde{a}_n^{\omega})$ однозначно определяется s первыми символами слов $\widetilde{a}_2^{\omega}, \ldots, \widetilde{a}_n^{\omega}$ и $s-1$ первыми символами слова $\widetilde{a}_1^{\omega}$ $(s = 1, 2, \ldots)$.

Пусть д. функция f задана системой (2) и Σ_f — схема, реализующая эту функцию. Определим три операции над функцией f и схемой Σ_f.

1) *Операция* O_1 — отождествление двух или большего числа входных переменных в функции f и отождествление в схеме Σ_f соответствующих этим переменным входных полюсов. Отождествленные полюса рассматриваются как один полюс новой схемы. На рис. 4.37 показана схема $\Sigma_{f'}$, которая получена из Σ_f отождествлением полюсов x_1 и x_2.

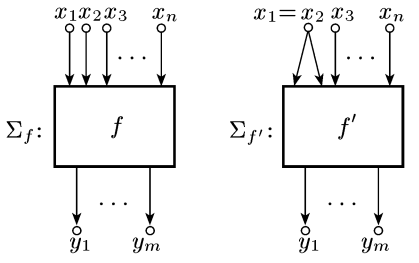


Рис. 4.37

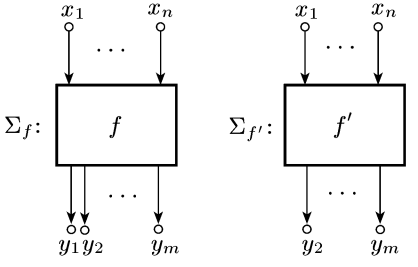


Рис. 4.38

2) *Операция* O_2 — удаление некоторой выходной переменной y_j у функции f (что эквивалентно выбрасыванию из системы (2) уравнения $y_j(t) = F_j(\mathbf{x}^{(n)}(t), \mathbf{q}^{(r)}(t-1))$), и удаление из схемы Σ_f выходного канала и полюса, соответствующих выходной переменной y_j (на рис. 4.38 изображена схема $\Sigma_{f'}$, полученная из схемы Σ_f после удаления выходного канала и полюса y_1).

Замечание. Если $m = 1$, то, удаляя переменную y_1 (единственную выходную переменную), получаем *автомат без выхода* (его вес считается неопределенным).

3) *Операция* O_3 — введение обратной связи по одной входной и одной выходной переменным. Пусть в качестве входной переменной взята переменная x_i, а в качестве выходной — переменная y_j. Операцию O_3 можно применить к функции f и схеме Σ_f только в том случае, когда выход y_j зависит с запаздыванием от входа x_i. Канонические уравнения для новой функции f' получаются исключением из системы (2) уравнения $y_j(t) = F_j(\mathbf{x}^{(n)}(t), \mathbf{q}^{(r)}(t-1))$ и заменой переменной $x_i(t)$ в каждой функции F_q $(q \neq j)$ и G_l на функцию $F'_j(x_1(t), \ldots, x_{i-1}(t), x_{i+1}(t), \ldots, x_n(t), q_1(t-1), \ldots, q_r(t-1))$, получающуюся из функции $F_j(\mathbf{x}^{(n)}(t), \mathbf{q}^{(r)}(t-1))$ отбрасыванием несущественной переменной $x_i(t)$. Начальные условия остаются прежними. Схема $\Sigma_{f'}$ получается из схемы Σ_f путем отождествления выхода y_j с входом x_i; при этом отождествленные полюса объявляются внутренней вершиной схемы $\Sigma_{f'}$.

На рис. 4.39 показана схема $\Sigma_{f'}$, полученная из схемы Σ_f введением обратной связи по переменным x_1, y_1.

Замечание 1. Если $n = 1$, то, вводя обратную связь по переменной x_1 (и любой выходной переменной), получаем *автомат без входа.*

Замечание 2. Применяя перечисленные выше операции, удобно указывать в скобках (за обозначениями этих операций) те каналы (полюса и переменные), к которым операции применяются. Например, $O_1(x_1, x_3)$, $O_2(y_5)$, $O_3(x_{10}, y_2)$.

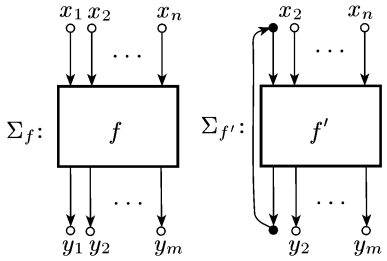


Рис. 4.39

Опишем еще три операции над д. функциями.

4) *Операция* O_4 — операция объединения двух (или большего числа) функций. Пусть $f_1 \in P_{k,\text{д}}^{n_1,m_1}$ и $f_2 \in P_{k,\text{д}}^{n_2,m_2}$. Предполагаем, что эти функции имеют в качестве входных переменные $x'_1, x'_2, \ldots, x'_{n_1}$ и $x''_1, x''_2, \ldots, x''_{n_2}$ соответственно, а в качестве выходных — переменные $y'_1, y'_2, \ldots, y'_{m_1}$ и $y''_1, y''_2, \ldots, y''_{m_2}$. Считаем, что все эти переменные попарно различны. Пусть Σ_{f_1} и Σ_{f_2} — схемы функций f_1 и f_2 соответственно. Тогда схема Σ_f функции f, равной объединению функций f_1 и f_2, будет выглядеть так, как показано на рис. 4.40;

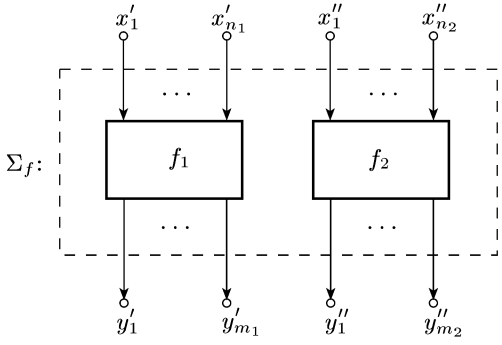


Рис. 4.40

при этом входными и выходными полюсами схемы Σ_f являются соответственно все входные и все выходные полюса схем Σ_{f_1} и Σ_{f_2}. Канонические уравнения и начальные условия для функции f получаются путем объединения канонических уравнений и начальных условий, задающих функции f_1 и f_2. При этом предполагается, что множества $Q^{(1)}$ и $Q^{(2)}$ состояний функций f_1 и f_2 не пересекаются.

5) *Операция* S — операция суперпозиции. Пусть $f_1 \in P_{A,B,\text{д}}$ и $f_2 \in P_{B,C,\text{д}}$. *Суперпозицией* $f_2(f_1)$ функций f_1 и f_2 называется такая функция $f \in P_{A,C,\text{д}}$, что $f(\widetilde{x}^\omega) = f_2(f_1(\widetilde{x}^\omega))$ при любом входном слове $\widetilde{x}^\omega$ из A^ω. Пусть $f_i \in P_{k,\text{д}}^{n_i,m_i}$ $(i = 1, 2)$, и им отвечают схемы Σ_{f_1} и Σ_{f_2}. (Считаем, что входные и выходные переменные и состояния

функций f_1 и f_2 такие же, как в предыдущем пункте.) Можно ввести такую суперпозицию этих функций: отождествим, например, входной полюс x''_1 схемы Σ_{f_2} с выходным полюсом y'_{l+1} схемы Σ_{f_1}, полюс x''_2

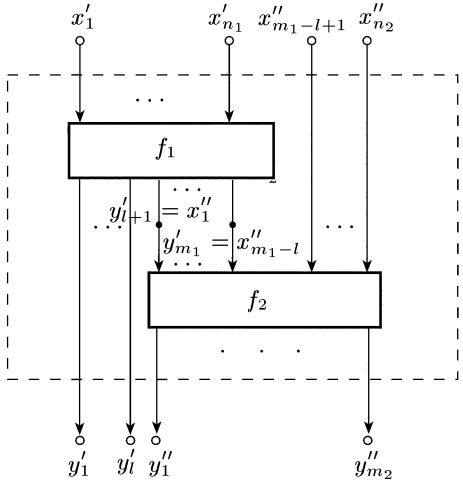


Рис. 4.41

с полюсом y'_{l+2} и т. д., наконец, полюс x''_{m_1-l} с полюсом y'_{m_1}; получим схему Σ_f (рис. 4.41), у которой:

а) входными полюсами будут все входные полюса схемы Σ_{f_1} и входные полюса схемы Σ_{f_2}, не участвовавшие в указанной выше процедуре отождествления;

б) выходными полюсами являются все выходные полюса схемы Σ_{f_2} и те выходные полюса схемы $\Sigma_{f'_1}$, которые не были отождествлены ни с одним входным полюсом схемы Σ_{f_2}.

Отождествленные полюса объявляются внутренними вершинами схемы Σ_f. Схема Σ_f называется *суперпозицией схем* Σ_{f_1} *и* Σ_{f_2} (по переменным $y'_{l+1} - x''_1$, $y'_{l+2} - x''_2$, …, $y'_{m_1} - x''_{m_1-l}$). Если функция f_1 задается системой

$$
\begin{aligned}
y'_1(t) &= F'_1(x'_1(t), \ldots, x'_{n_1}(t), q'_1(t-1), \ldots, q'_{r_1}(t-1)),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
y'_{m_1}(t) &= F'_{m_1}(x'_1(t), \ldots, x'_{n_1}(t), q'_1(t-1), \ldots, q'_{r_1}(t-1)),\\
q'_1(t) &= G'_1(x'_1(t), \ldots, x'_{n_1}(t), q'_1(t-1), \ldots, q'_{r_1}(t-1)),\qquad (4')\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
q'_{r_1}(t) &= G'_{r_1}(x'_1(t), \ldots, x'_{n_1}(t), q'_1(t-1), \ldots, q'_{r_1}(t-1)),\\
q'_1(0) &= q'_{01}, \ldots, q'_{r_1}(0) = q'_{0r_1}.
\end{aligned}
$$

а функция f_2 — системой

$$\begin{gathered}
y_1''(t) = F_1''(x_1''(t), \ldots, x_{n_2}''(t), q_1''(t-1), \ldots, q_{r_2}''(t-1)),\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
y_{m_2}''(t) = F_{m_2}''(x_1''(t), \ldots, x_{n_2}''(t), q_1''(t-1), \ldots, q_{r_2}''(t-1)),\\
q_1''(t) = G_1''(x_1''(t), \ldots, x_{n_2}''(t), q_1''(t-1), \ldots, q_{r_2}''(t-1)),\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
q_{r_2}''(t) = G_{r_2}''(x_1''(t), \ldots, x_{n_2}''(t), q_1''(t-1), \ldots, q_{r_2}''(t-1)),\\
q_1''(0) = q_{01}'', \ldots, q_{r_2}''(0) = q_{0r_2}'',
\end{gathered} \tag{4''}$$

то функции f, реализуемой схемой Σ_f, соответствует такая система:

$$\begin{gathered}
y_1'(t) = F_1'(x_1'(t), \ldots, x_{n_1}'(t), q_1'(t-1), \ldots, q_{r_1}'(t-1)),\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
y_l'(t) = F_l'(x_1'(t), \ldots, x_{n_1}'(t), q_1'(t-1), \ldots, q_{r_1}'(t-1)),\\
y_1''(t) = F_1''(F_{l+1}', \ldots, F_{m_1}', x_{m_1-l+1}'(t), \ldots\\
\qquad\qquad \ldots, x_{n_2}''(t), q_1(t-1), \ldots, q_{r_2}(t-1)),\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
y_{m_2}''(t) = F_{m_2}''(F_{l+1}', \ldots, F_{m_1}', x_{m_1-l+1}''(t), \ldots\\
\qquad\qquad \ldots, x_{n_2}''(t), q_1(t-1), \ldots, q_{r_2}(t-1)),\\
q_1'(t) = G_1'(x_1'(t), \ldots, x_{n_1}'(t), q_1'(t-1), \ldots, q_{r_1}'(t-1)),\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
q_{r_1}'(t) = G_{r_1}'(x_1'(t), \ldots, x_{n_1}'(t), q_1'(t-1), \ldots, q_{r_1}'(t-1)),\\
q_1(t) = G_1''(F_{l+1}', \ldots, F_{m_1}', x_{m_1-l+1}''(t), \ldots\\
\qquad\qquad \ldots, x_{n_2}''(t), q_1(t-1), \ldots, q_{r_2}(t-1)),\\
q_{r_2}(t) = G_{r_2}''(F_{l+1}', \ldots, F_{m_1}', x_{m_1-l+1}''(t), \ldots\\
\qquad\qquad \ldots, x_{n_2}''(t), q_1(t-1), \ldots, q_{r_2}(t-1)),\\
q_1'(0) = q_{01}', \ldots, q_{r_1}'(0) = q_{0r_1}', \quad q_1(0) = q_{01}'', \ldots, q_{r_2}(0) = q_{0r_2}'',
\end{gathered} \tag{5}$$

где $F_j' = F_j'(x_1'(t), \ldots, x_{n_1}'(t), q_1'(t-1), \ldots, q_{r_1}'(t-1))$, $j = l+1, \ldots, m_1$.

б) *Операция* O_5 — операция разветвления (некоторого выхода о.-д. функции). Пусть f — функция из $P_{k,\text{од}}^{n,m}$ и Σ_f — реализующая ее схема. Результатом применения операции O_5 к выходу y_j функции f и схемы Σ_f являются функция f' и схема $\Sigma_{f'}$ такие, что:

а) канонические уравнения, задающие функцию f', получаются из канонических уравнений, описывающих функцию f, заменой уравнения $y_j(t) = F_j(\mathbf{x}^{(n)}(t), \mathbf{q}^{(r)}(t-1))$ совокупностью уравнений $y_{js}'(t) = F_j(\mathbf{x}^{(n)}(t), \mathbf{q}^{(r)}(t-1))$ $(s = 1, \ldots, v)$ (если выход y_j разветвился на v выходов $y_{j1}', \ldots, y_{jv}'$);

б) схема $\Sigma_{f'}$ получается из схемы Σ_f разветвлением канала (и полюса) y_j на соответствующее число «одинаково работающих»

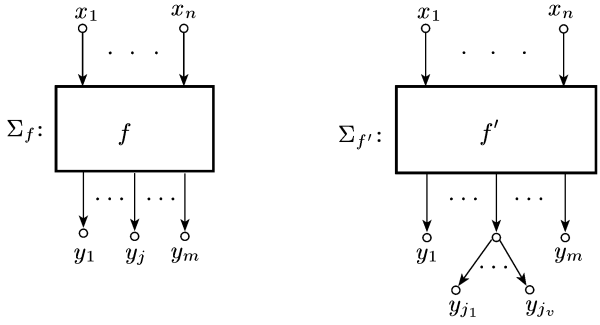


Рис. 4.42

каналов $y'_{j1}, \ldots, y'_{jv}$, каждый из которых реализует ту же функцию, что и канал y_j в схеме Σ_f (рис. 4.42).

Из определения операций O_1, O_2, O_3, O_4, O_5 и S немедленно вытекают следующие утверждения:

а) если $i = 1, 2, 3$, то вес функции f', полученной из функции f с помощью операции O_i, не превосходит веса функции f (здесь, естественно, предполагается, что у функции f' имеется хотя бы одна выходная переменная; иначе ее вес был бы неопределенным);

б) вес функции f, полученной из функции f_1 и f_2 с помощью операции O_4 (операция объединения), равен произведению весов функций f_1 и f_2;

в) вес функции f', полученной из функции f с помощью операции O_5 (операция разветвления), равен весу функции f;

г) вес функции f, полученной из функций f_1 и f_2 с помощью операции S (операция суперпозиции), не превосходит произведения весов функций f_1 и f_2.

Справедливы и такие предложения:

1) если целые числа r_1 и r_2 удовлетворяют неравенствам $1 \leqslant r_1 \leqslant r_2$, то существуют о.-д. функции f_1 и f_2, веса которых равны соответственно r_1 и r_2, и при этом функция f_1 получается из функции f_2 с помощью операции O_i $(i = 1, 2, 3)$;

2) если целые числа r_0, r_1 и r_2 удовлетворяют неравенствам $1 \leqslant r_0 \leqslant r_1 \cdot r_2$, то существуют о.-д. функции f_0, f_1 и f_2, веса которых равны соответственно r_0, r_1 и r_2, и при этом функция f_0 есть суперпозиция функций f_1 и f_2.

Нетрудно показать, что операция O_5 *порождается* операциями O_1, O_2 и O_4, а именно, если о.-д. функция f' получена из о.-д. функции f с помощью операции O_5, то функцию f' можно реализовать над множеством $\{f\}$ (т. е. используя, вообще говоря, несколько экземпляров функции f) с помощью операций O_1, O_2 и O_4.

Элементом единичной задержки (или, короче, *единичной задержкой*) в множестве $\widehat{P}_{k,\text{д}}$ называется о.-д. функция $\varphi_3(x)$, задаваемая системой

$$\begin{cases} y(t) = q(t-1), \\ q(t) = x(t), \\ q(0) = 0. \end{cases} \tag{6}$$

На «языке последовательностей» единичная задержка описывается следующим соотношением:

$$\varphi_3(\widetilde{x}^{\,\omega}) = 0\widetilde{x}^{\,\omega}.$$

Диаграммы Мура единичных задержек для $k = 2, 3, 4$ изображены на рис. 4.43. Вес единичной задержки из множества $\widehat{P}_{k,\text{д}}$ равен k. Схему, реализующую единичную задержку, будем изображать так:

Справедливо следующее утверждение: всякая о.-д. функция из $\widehat{P}_{k,\text{од}}$ может быть реализована схемой над таким множеством, которое содержит:

1) схемы, реализующие элемент единичной задержки;

2) схемы, реализующие функции, порожденные функциями из некоторой полной в P_k системы.

Иными словами, любое множество о.-д. функций из $\widehat{P}_{k,\text{од}}$, состоящее из элемента единичной задержки и функций, порожденных функциями из некоторой полной в P_k системы, образует полную в $\widehat{P}_{k,\text{од}}$ систему относительно совокупности операций $\{O_1, O_2, O_3, O_4, S\}$.

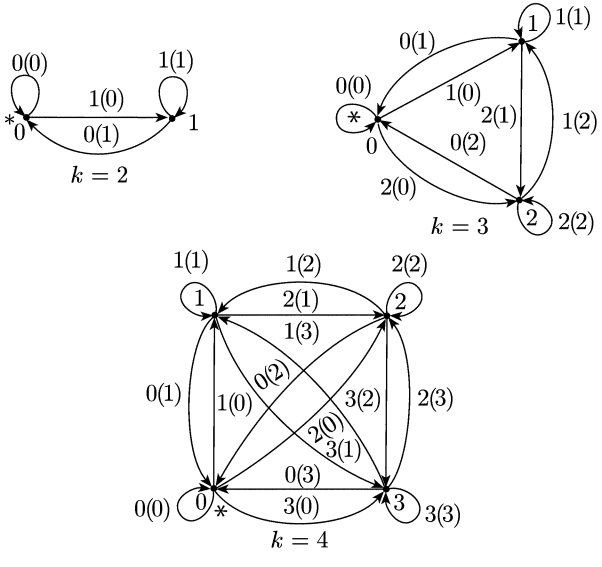


Рис. 4.43

Пример 5. Найти веса о.-д. функций, получающихся из о.-д. функции f с помощью операции отождествления, примененной к всевозможным парам входных переменных x_1, x_2 и x_3:

$$f\colon \begin{cases} y(t) = q(t-1) \to (x_1(t) \vee x_2(t) \vee \overline{x}_3(t)), \\ q(t) = x(t)\cdot \overline{x}_2(t)\cdot x_3(t) \to \overline{q}(t-1), \\ q(0) = 0. \end{cases}$$

Решение. Полагая $x_1 = x_2$, получаем функцию

$$f_{12}\colon \begin{cases} y(t) = q(t-1) \to (x_1(t) \vee \overline{x}_3(t)), \\ q(t) = 1, \\ q(0) = 0. \end{cases}$$

Диаграмма Мура этой функции изображена на рис. 4.44. Вес функции f_{12} равен 2.

Полагаем $x_1 = x_3$. Приходим к функции

$$f_{13}\colon \begin{cases} y(t) = 1, \\ q(t) = x_1(t)\cdot \overline{x}_2(t) \to \overline{q}(t-1), \\ q(0) = 0. \end{cases}$$

Вес этой функции равен 1. Диаграмма Мура функции f_{13} и ее приведенная диаграмма представлены на рис. 4.45.

Положим теперь $x_2 = x_3$. Получаем функцию

$$f_{23}\colon \begin{cases} y(t) = 1, \\ q(t) = 1, \\ q(0) = 0. \end{cases}$$

Вес функции f_{23} равен 1. Диаграмма Мура и приведенная диаграмма изображены на рис. 4.46.

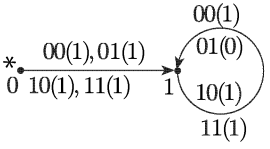


Рис. 4.44

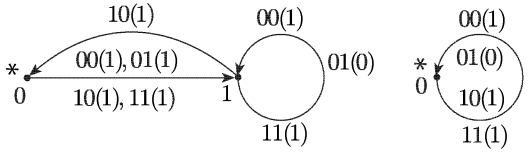


Рис. 4.45

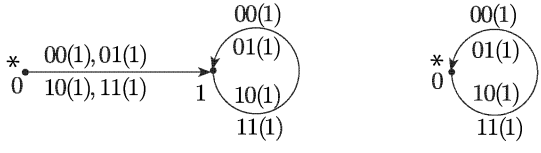


Рис. 4.46

Пример 6. Построить канонические уравнения и диаграммы Мура для о.-д. функций, получающихся из функции

$$f\colon \begin{cases} y_1(t) = \overline{q}(t-1), \\ y_2(t) = x_1(t)\cdot q(t-1), \\ q(t) = x_1(t)\cdot q(t-1) \vee x_2(t), \\ q(0) = 0 \end{cases}$$

введением обратной связи по парам переменных (x_1, y_1), (x_2, y_1) и (x_2, y_2). Найти веса полученных функций.

Р е ш е н и е. Вводим обратную связь по переменным x_1 и y_1. Для получения канонических уравнений результирующей функции надо

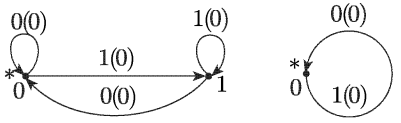


Рис. 4.47

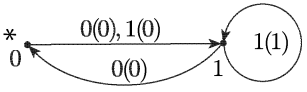


Рис. 4.48

вместо $x_1(t)$ в уравнениях $y_2(t) = x_1(t)\cdot q(t-1)$ и $q(t) = x_1(t)\cdot q(t-1) \vee x_2(t)$ подставить правую часть соотношения $y_1(t) = \overline{q}(t-1)$. Получаем

$$f_{11}\colon \begin{cases} y_2(t) = 0, \\ q(t) = x_2(t), \\ q(0) = 0. \end{cases}$$

Диаграмма Мура и приведенная диаграмма этой функции изображены на рис. 4.47. Вес функции f_{11} равен 1.

Вводя обратную связь по переменным x_2 и y_1, получаем функцию

$$f_{21}\colon \begin{cases} y_2(t) = x_1(t)\cdot q(t-1), \\ q(t) = x_1(t)\cdot q(t-1) \vee \overline{q}(t-1) = x_1(t) \vee \overline{q}(t-1), \\ q(0) = 0. \end{cases}$$

Ее диаграмма Мура представлена на рис. 4.48. Вес функции f_{21} равен 2.

Вводя обратную связь по переменным x_2 и y_2, имеем

$$f_{22}\colon \begin{cases} y_1(t) = \overline{q}(t-1), \\ q(t) = x_1(t)\cdot q(t-1), \\ q(0) = 0. \end{cases}$$

Диаграмма Мура и приведенная диаграмма функции f_{22} изображены

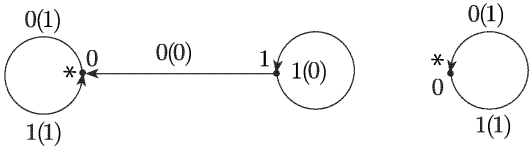


Рис. 4.49

на рис. 4.49. Вес функции равен 1. Эта функция автономная (порожденная константой 1).

Пример 7. Для суперпозиции $f_1(f_2)$ по переменным $y_2 - x_1$ о.-д. функций

$$f_1\colon \begin{cases} y_1(t) = \overline{x}_0(t)\cdot q_1(t-1) \vee x_1(t), \\ q_1(t) = x_0(t) \vee \overline{x}_1(t) \vee \overline{q}_1(t-1), \\ q(0) = 1, \end{cases}$$

$$f_2\colon \begin{cases} y_2(t) = x_2(t) \oplus q_2(t-1), \\ q_2(t) = \overline{x}_2(t) \vee \overline{q}_2(t-1), \\ q_2(0) = 0 \end{cases}$$

построить канонические уравнения и диаграмму Мура. Найти вес этой суперпозиции.

Решение. Канонические уравнения для суперпозиции $f = f_1(f_2)$ по указанным переменным получаются подстановкой правой части соотношения $y_2(t) = x_2(t) \oplus q_2(t-1)$ вместо переменной $x_1(t)$ в канонических уравнениях для функции f_1 и добавлением к получившимся выражениям уравнения $q_2(t) = \overline{x}_2(t) \vee \overline{q}_2(t-1)$ и начального условия $q_2(0) = 0$. Имеем

$$f\colon \begin{cases} y_1(t) = \overline{x}_0(t)\cdot \overline{q_1(t-1) \vee (x_2(t) \oplus q_2(t-1))}, \\ q_1(t) = x_0(t) \vee \overline{x_2(t) \oplus q_2(t-1)} \vee \overline{q}_1(t-1), \\ q_2(t) = \overline{x}_2(t) \vee \overline{q}_2(t-1), \\ q_1(0) = 1, \quad q_2(0) = 0. \end{cases}$$

Отсюда следует, что вес функции f не больше 4 (так как каждая переменная q_1, q_2 принимает два значения, а именно 0 и 1). Исходя из этих уравнений и начальных условий строим диаграмму Мура (рис. 4.50). Приведенная диаграмма, соответствующая полученной диаграмме Мура, содержит вершины 01, 10 и 11. Следовательно, вес суперпозиции f равен 3.

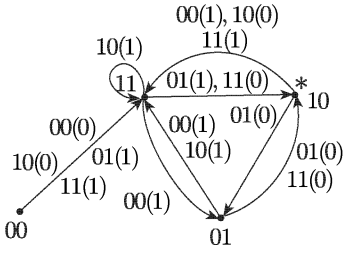


Рис. 4.50

2.8. Для суперпозиции $f = f_1(f_2)$ о.-д. функций f_1 и f_2 из $\widehat{P}_{2,\text{од}}$ построить канонические уравнения и приведенную диаграмму Мура:

1) $f_1\colon \begin{cases} y_1(t) = x_1(t) \to q_1(t-1), \\ q_1(t) = \overline{x}_1(t), \\ q_1(0) = 1, \end{cases}$ $f_2\colon \begin{cases} y_2(t) = x_2(t) \vee q_2(t-1), \\ q_2(t) = x_2(t) \downarrow \overline{q}_2(t-1), \\ q_2(0) = 0; \end{cases}$

2) $f_1\colon \begin{cases} y_1(t) = \overline{q}_1(t-1), \\ q_1(t) = q_1(t-1) \to x_1(t), \\ q_1(0) = 0, \end{cases}$ $f_2\colon \begin{cases} y_2(t) = q_2(t-1), \\ q_2(t) = \overline{x}_2(t), \\ q_2(0) = 1; \end{cases}$

3) $f_1\colon \begin{cases} y_1(t) = \overline{x}_1(t), \\ q_1(t) = \overline{q}_1(t-1), \\ q_1(0) = 1, \end{cases}$ $f_2\colon \begin{cases} y_2(t) = \overline{q}_2(t-1), \\ q_2(t) = \overline{x}_2(t)\cdot q_2(t-1), \\ q_2(0) = 0; \end{cases}$

4) f_1: $\begin{cases} y_1(t) = x_1(t)\cdot q_1(t-1), \\ q_1(t) = \overline{q}_1(t-1), \\ q_1(0) = 0, \end{cases}$

f_2: $\begin{cases} y_2(1) = 1, \\ y_2(t) = x_2(t) \oplus y_2(t-1), \ \ t \geqslant 2; \end{cases}$

5) f_1: $\begin{cases} y_1(1) = 0, \\ y_1(t) = x_1(t-1) \to y_1(t-1), \ \ t \geqslant 2, \end{cases}$

f_2: $\begin{cases} y_2(t) = q_2(t-1) \to x_2(t), \\ q_2(t) = x_2(t), \\ q_2(0) = 1; \end{cases}$

6) функция f_1 задается диаграммой Мура, изображенной на рис. 4.51,

$$f_2\colon \begin{cases} y_2(t) = x_2(t) \mid q_2(t-1), \\ q_2(t) = x_2(t) \to \overline{q}_2(t-1), \\ q_2(0) = 1; \end{cases}$$

7) функции f_1 и f_2 задаются диаграммами Мура, изображенными

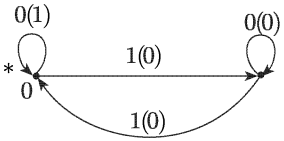
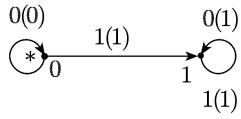
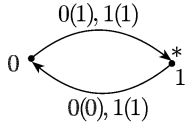


Рис. 4.51



а



б

Рис. 4.52

на рис. 4.52, *а*, *б* соответственно;

8) f_1: $\begin{cases} y_1(1) = y_1(2) = 0, \\ y_1(t) = y_1(t-1) \to y_1(t-2), \ \ t \geqslant 3, \end{cases}$

f_2: $\begin{cases} y_2(1) = 0, \quad y_2(2) = 1, \\ y_2(t) = x_2(t) \to y_2(t-2), \ \ t \geqslant 3. \end{cases}$

2.9. Построить канонические уравнения и приведенную диаграмму Мура о.-д. функции, получающейся из функции f введением обратной связи по переменным x_i, y_j:

1) f: $\begin{cases} y_1(t) = x_1(t) \to q(t-1), \\ y_2(t) = x_1(t)\cdot x_2(t) \oplus q(t-1), \\ q(t) = x_1(t) \vee x_2(t)\cdot \overline{q}(t-1), \\ q(0) = 0, \end{cases}$ $\quad i = 2, \ \ j = 1;$

2) f: $\begin{cases} y_1(t) = \overline{x}_1(t) \vee x_2(t)\cdot q(t-1), \\ y_2(t) = x_1(t) \oplus q(t-1), \\ q(t) = x_1(t)\cdot \overline{x}_2(t) \vee q(t-1), \\ q(0) = 0, \end{cases}$ $\quad i = j = 2;$

3) f: $\begin{cases} y_1(t) = x_1(t) \to \overline{q}(t-1), \\ y_2(t) = \overline{x}_1(t)\cdot \overline{q}(t-1) \oplus x_2(t), \\ q(t) = x_2(t) \to \overline{q}(t-1), \\ q(0) = 1, \end{cases}$ $i = 2,\ j = 1;$

4) f: $\begin{cases} y_1(t) = x_1(t)\cdot q(t-1) \vee x_2(t), \\ y_2(t) = x_2(t), \\ q(t) = (x_1(t) \to x_2(t)) \vee q(t-1), \\ q(0) = 0, \end{cases}$ $i = 1,\ j = 2;$

5) f: $\begin{cases} y_1(t) = q(t-1), \\ y_2(t) = x_1(t) \oplus (x_2(t) \vee q(t-1)), \\ q(t) = q(t-1) \to x_1(t)\cdot x_2(t), \\ q(0) = 0, \end{cases}$

а) $i = j = 1$; б) $i = 2,\ j = 1$;

6) f: $\begin{cases} y_1(t) = (x_2(t) \to x_1(t)) \to q(t-1), \\ y_2(t) = x_2(t)\cdot q(t-1), \\ y_3(t) = \overline{x}_1(t)\cdot (x_2(t) \to q(t-1)), \\ q(t) = x_1(t)\cdot q(t-1), \\ q(0) = 1, \end{cases}$ $i = 1,\ j = 2;$

7) f: $\begin{cases} y_1(t) = x_1(t), \\ y_2(t) = x_2(t) \oplus q(t-1), \\ y_3(t) = x_2(t) \vee q(t-1), \\ q(t) = x_1(t) \vee x_2(t), \\ q(0) = 0, \end{cases}$

а) $i = 2,\ j = 1$; б) $i = 1,\ j = 2$; в) $i = 1,\ j = 3$;

8) f: $\begin{cases} y_1(t) = x_1(t) \oplus q_1(t-1)\cdot q_2(t-1), \\ y_2(t) = x_2(t) \to q_2(t-1), \\ q_1(t) = q_1(t-1) \oplus q_2(t-1), \\ q_2(t) = x_1(t) \oplus q_1(t-1), \\ q_1(0) = q_2(0) = 0, \end{cases}$

а) $i = 1,\ j = 2$; б) $i = 2,\ j = 1$.

2.10. Найти вес о.-д. функции, получающейся из о.-д. функции f введением обратной связи по переменным x_i, y_j:

1) f: $\begin{cases} y_1(t) = x_1(t)\cdot x_2(t) \to q(t-1), \\ y_2(t) = x_2(t) \vee \overline{q}(t-1), \\ q(t) = x_1(t) \to x_2(t), \\ q(0) = 1, \end{cases}$ $i = 1,\ j = 2;$

2) f: $\begin{cases} y_1(t) = x_1(t) \downarrow q(t-1), \\ y_2(t) = x_2(t) \vee q(t-1), \\ q(t) = x_1(t) \cdot x_2(t), \\ q(0) = 0, \end{cases}$

а) $i = 1,\ j = 2$; б) $i = 2,\ j = 1$;

3) f: $\begin{cases} y_1(t) = \overline{q}(t-1), \\ y_2(t) = x_1(t) \vee q(t-1), \\ q(t) = x_1(t) \oplus x_2(t), \\ q(0) = 0, \end{cases}$

а) $i = j = 1$; б) $i = 2,\ j = 1$; в) $i = j = 2$;

4) f: $\begin{cases} y_1(t) = x_2(t) \to q_1(t-1), \\ y_2(t) = q_2(t-1) \to x_1(t), \\ q_1(t) = \overline{q}_2(t-1), \\ q_2(t) = q_1(t-1), \\ q_1(0) = q_2(0) = 0, \end{cases}$

а) $i = j = 1$; б) $i = j = 2$;

5) f: $\begin{cases} y_1(t) = x_1(t) \vee x_2(t) \vee \overline{q}(t-1), \\ y_2(t) = \overline{x}_2(t) \oplus x_3(t) \cdot q(t-1), \\ q(t) = x_1(t) \to (x_2(t) \to x_3(t)), \\ q(0) = 0, \end{cases}$

а) $i = 3,\ j = 1$; б) $i = 1,\ j = 2$;

6) f: $\begin{cases} y_1(t) = (x_1(t) \oplus x_2(t)) \cdot q(t-1), \\ y_2(t) = x_3(t) \to q(t-1), \\ q(t) = x_1(t) \cdot x_3(t) \cdot \overline{q}(t-1), \\ q(0) = 0, \end{cases}$

а) $i = 1,\ j = 2$; б) $i = j = 2$; в) $i = 3,\ j = 1$;

7) f: $\begin{cases} y_1(t) = x_1(t) \mid q_1(t-1), \\ y_2(t) = \overline{q}_2(t-1), \\ q_1(t) = x_1(t) \cdot \overline{x}_2(t), \\ q_2(t) = q_1(t-1) \cdot x_3(t), \\ q_1(0) = 0, \quad q_2(0) = 1, \end{cases}$

а) $i = 1,\ j = 2$; б) $i = 2,\ j = 1$; в) $i = j = 2$; г) $i = 3,\ j = 1$;
д) $i = 3,\ j = 2$.

2.11. Найти вес о.-д. функции, получающейся из о.-д. функции f с помощью операции отождествления входных переменных x_i и x_j (операция O_1):

1) f: $\begin{cases} y(t) = x_1(t) \to x_2(t) \cdot q_1(t-1), \\ q_1(t) = x_2(t) \to \overline{x}_3(t) \cdot \overline{q}_2(t-1), \\ q_2(t) = x_1(t) \cdot \overline{x}_2(t) \vee \overline{q}_1(t-1), \\ q_1(0) = q_2(0) = 0, \end{cases}$

а) $i = 1,\ j = 2$; б) $i = 2,\ j = 3$;

2) f: $\begin{cases} y(t) = x_1(t) \vee \overline{x}_2(t) \cdot q_1(t-1), \\ q_1(t) = q_2(t-1) \to \overline{q}_1(t-1), \\ q_2(t) = x_2(t) \vee \overline{x}_3(t) \vee q_1(t-1), \\ q_1(0) = q_2(0) = 0, \end{cases}$

а) $i = 1,\ j = 2$; б) $i = 2,\ j = 3$;

3) f: $\begin{cases} y_1(t) = x_1(t) \cdot \overline{x}_2(t) \to q(t-1), \\ y_2(t) = x_1(t) \cdot x_3(t) \to x_2(t), \\ q(t) = x_3(t) \vee \overline{q}(t-1), \\ q(0) = 1, \end{cases}$

а) $i = 1,\ j = 2$; б) $i = 1,\ j = 3$; в) $i = 2,\ j = 3$;

4) f: $\begin{cases} y_1(t) = x_1(t) \to (x_2(t) \vee \overline{x}_3(t)) \cdot \overline{q}(t-1), \\ y_2(t) = q(t-1) \to \overline{x}_1(t) \cdot x_2(t), \\ q(t) = \overline{q}(t-1) \vee x_2(t) \cdot \overline{x}_3(t), \\ q(0) = 0, \end{cases}$

а) $i = 1,\ j = 2$; б) $i = 1,\ j = 3$; в) $i = 2,\ j = 3$;

2.12. Найти все суперпозиции $f_1(f_2)$, если:

1) f_1: $\begin{cases} y_1(t) = \overline{x}_1(t) \vee q_1(t-1), \\ q_1(t) = x_1(t) \vee \overline{q}_1(t-1), \\ q_1(0) = 0, \end{cases}$ f_2: $\begin{cases} y_2(t) = x_2(t) \cdot \overline{q}_2(t-1), \\ q_2(t) = \overline{x}_2(t) \cdot q_2(t-1), \\ q_2(0) = 1; \end{cases}$

2) f_1: $\begin{cases} y_1(t) = \overline{q}_1(t-1), \\ q_1(t) = x_1(t) \cdot q_1(t-1), \\ q_1(0) = 1, \end{cases}$ f_2: $\begin{cases} y_2(t) = q_2(t-1), \\ q_2(t) = x_2(t) \vee \overline{q}_2(t-1), \\ q_2(0) = 0; \end{cases}$

3) f_1: $\begin{cases} y_1(t) = x_1(t) \to q_1(t-1), \\ q_1(t) = \overline{q}_1(t-1), \\ q_1(0) = 0, \end{cases}$

функция f_2 задается диаграммой Мура, изображенной на рис. 4.53;

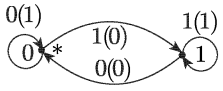


Рис. 4.53

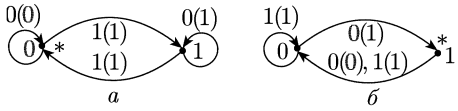


Рис. 4.54

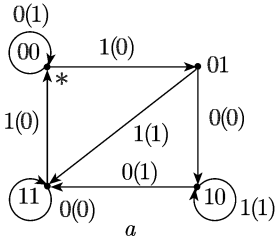


Рис. 4.55

4) функции f_1 и f_2 задаются диаграммами Мура, изображенными на рис. 4.54, *а*, *б* соответственно;

5) функции f_1 и f_2 задаются диаграммами Мура, изображенными на рис. 4.55, *а*, *б* соответственно.

3. Реализация ограниченно-детерминированных функций схемами. Понятие схемы, реализующей о.-д. функцию, и определение соответствующих операций над схемами даны в п. 2. В настоящем пункте представлены некоторые задачи, относящиеся к схемам, реализующим о.-д. функции из множества $\widehat{P}_{2,\text{од}}$.

Пример 8. Построить схему, реализующую о.-д. функцию f из $\widehat{P}_{2,\text{од}}$, над множеством, состоящим из элемента единичной задержки и функций, порожденных дизъюнкцией, конъюнкцией и отрицанием:

$$f\colon \begin{cases} y_1(t) = x_1(t)\cdot \overline{q}_1(t-1) \vee x_2(t)\cdot \overline{x}_3(t), \\ y_2(t) = q_2(t-1) \to \overline{x_1(t) \vee x_3(t)}, \\ q_1(t) = q_1(t-1) \oplus q_2(t-1), \\ q_2(t) = x_1(t)\cdot x_2(t)\cdot \overline{q}_1(t-1), \\ q_1(0) = q_2(0) = 0. \end{cases}$$

Решение. Сначала строим схему из функциональных элементов над множеством, состоящим из дизъюнкции, конъюнкции и отрицания, для следующей совокупности булевых функций:

$$\begin{aligned} y_1 &= x_1 \cdot \overline{q}_1 \vee x_2 \cdot \overline{x}_3, \\ y_2 &= \overline{q}_2 \vee \overline{x_1 \vee x_3}, \\ q_1' &= q_1 \cdot \overline{q}_2 \vee \overline{q}_1 \cdot q_2, \\ q_2' &= x_1 \cdot x_2 \cdot \overline{q}_1. \end{aligned} \qquad (*)$$

(При выписывании этих функций мы воспользовались эквивалентными соотношениями для функций алгебры логики: $x \to y = \overline{x} \vee y$ и $x \oplus y = x\overline{y} \vee \overline{x}y$.)

Схема из функциональных элементов, реализующая систему функций $(*)$, имеет пять входных каналов (по переменным x_1, x_2, x_3, q_1

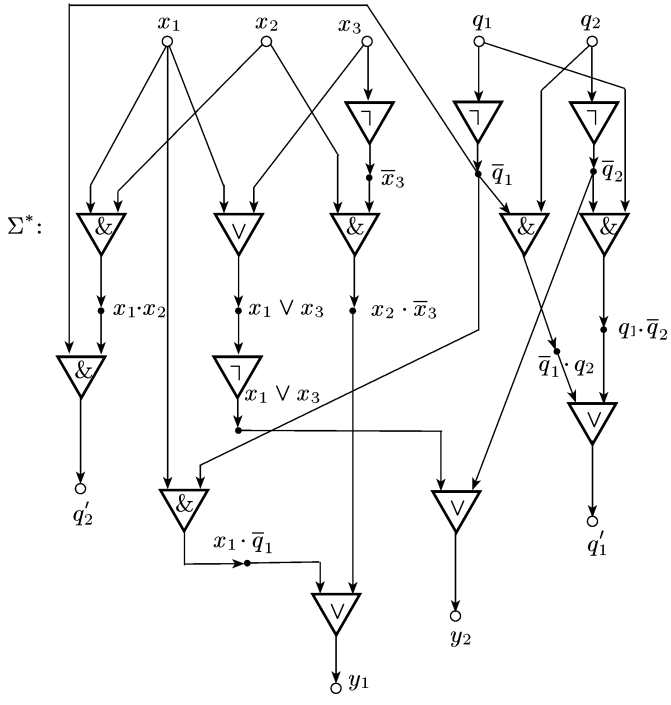


Рис. 4.56

и q_2) и четыре выходных (по переменным y_1, y_2, q_1' и q_2'). Обозначим эту схему через Σ^*. Она представлена на рис. 4.56.

Светлыми кружочками на ней обозначены входные и выходные полюса, а темными кружочками — внутренние полюса. Функциональные (логические) элементы, реализующие дизъюнкцию, конъюнкцию и отрицание, изображены в виде треугольников с двумя (для дизъюнкции и конъюнкции) или одним (для отрицания) входными каналами. У каждого функционального элемента один выходной канал. Около выходных полюсов элементов указаны булевы функции, реализуемые такими подсхемами схемы Σ^*, у которых входы совпадают с входами схемы Σ^*, а выходами являются данные выходы элементов. В треугольниках, соответствующих элементам, реализующим конъюнкцию, изображен знак $\&$; элементы, реализующие отрицание, помечены знаком $\neg$.

Для получения схемы Σ_f, реализующей о.-д. функцию f, достаточно к выходам q_1' и q_2' схемы Σ^* присоединить последовательно

элементы единичной задержки (операция суперпозиции) и затем ввести обратную связь по парам каналов $q_1'' - q_1$ и $q_2'' - q_2$, где q_i'' — выходной канал элемента единичной задержки, подсоединенного к выходу q_i' схемы Σ^*.

Схема Σ_f приведена на рис. 4.57. (Нули около элементов единичной задержки, поставлены нами для того, чтобы лишний раз напом-

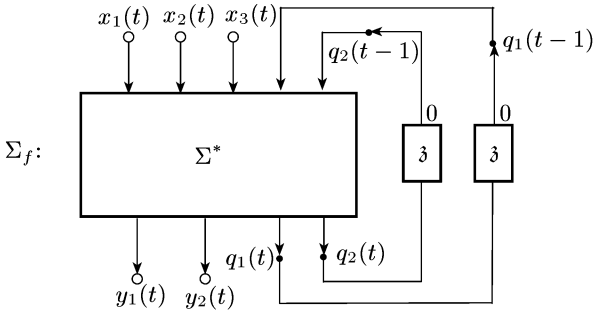


Рис. 4.57

нить, что в момент времени $t = 1$ выходные символы этих элементов равны 0.)

Пример 9. По схеме Σ_f, реализующей функцию f (рис. 4.58), построить канонические уравнения, задающие эту функцию.

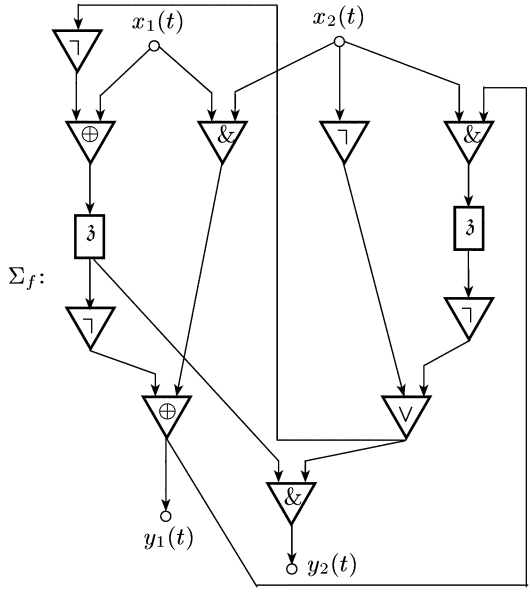


Рис. 4.58

Р е ш е н и е. Удаляя из схемы Σ_f задержки, получаем $\Sigma_{f'}$ — схему из функциональных элементов, изображенную на рис. 4.59, с дополнительными выходными (q_1' и q_2') и входными (q_1 и q_2) полюсами.

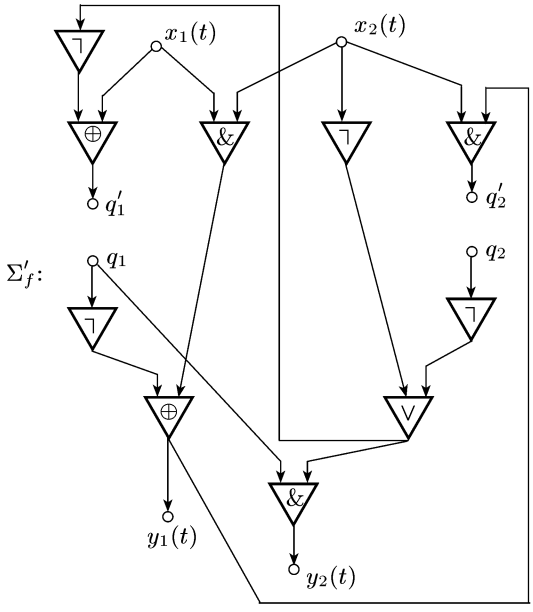


Рис. 4.59

Выписывая функции проводимости для каждого выходного полюса, имеем

$$y_1 = x_1 \cdot x_2 \oplus \overline{q}_1,$$
$$y_2 = q_1 \cdot (\overline{x}_2 \vee \overline{q}_2),$$
$$q_1' = x_1 \oplus \overline{\overline{x}_2 \vee \overline{q}_2} = x_1 \oplus x_2 \cdot q_2,$$
$$q_2' = (x_1 \cdot x_2 \oplus \overline{q}_1) \cdot x_2 = (x_1 \sim q_1) \cdot x_2.$$

Теперь для получения канонических уравнений, описывающих работу схемы Σ_f, нужно учесть время и начальные условия:

$$\begin{cases} y_1(t) = x_1(t) \cdot x_2(t) \oplus \overline{q}_1(t-1), \\ y_2(t) = q_1(t-1) \cdot (\overline{x}_2(t) \vee \overline{q}_2(t-1)), \\ q_1(t) = x_1(t) \oplus x_2(t) \cdot q_2(t-1), \\ q_2(t) = (x_1(t) \sim q_1(t-1)) \cdot x_2(t), \\ q_1(0) = q_2(0) = 0. \end{cases}$$

П р и м е р 10. Выписать канонические уравнения для функций, реализуемых схемами, изображенными на рис. 4.60. (Схемы, изображенные на рис. 4.60, *а*–*к*, соответствуют пп. а)–к) решения.)

Р е ш е н и е. а) Схема реализует функцию $f_1(x) = f_{\overline{x}}(\varphi_j(x))$, где $f_{\overline{x}}(z)$ — о.-д. функция, порожденная функцией $\overline{x}$ из P_2. На «языке

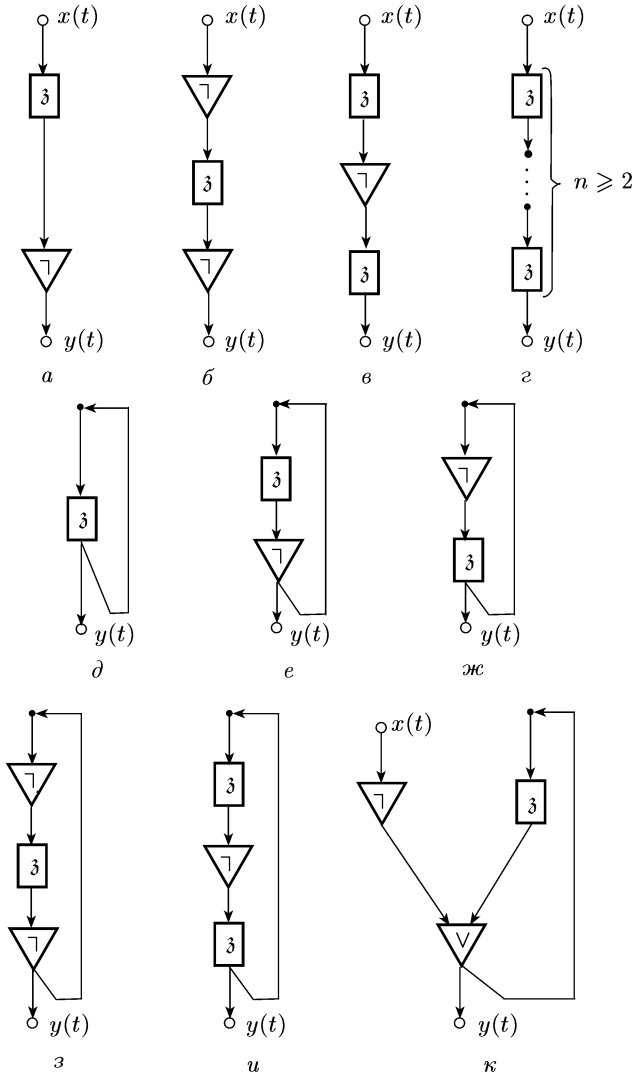


Рис. 4.60

последовательностей» функция $f_1(x)$ описывается следующим соотношением: $f_1(\widetilde{x}^{\omega}) = 1\overline{x}(1)\,\overline{x}(2)\ldots\overline{x}(t)\ldots$ Исходя из него можем сразу написать канонические уравнения:

$$y(t) = \overline{q}(t-1),$$
$$q(t) = x(t),$$
$$q(0) = 0.$$

Приведем еще одно решение этой задачи. Ясно, что данная схема является суперпозицией двух схем, одна из которых реализует единичную задержку $\varphi_з(x)$, а другая — функцию $f_{\overline{x}}(z)$. Канонические уравнения этих функций можно записать в следующей форме:

$$\varphi_з(x)\colon \begin{cases} y_1(t) = q_1(t-1), \\ q_1(t) = x(t), \\ q_1(0) = 0. \end{cases} \qquad f_{\overline{x}}(z)\colon \begin{cases} y_2(t) = \overline{z}(t), \\ q_2(t) = 0, \\ q_2(0) = 0. \end{cases}$$

Значит, канонические уравнения суперпозиции $f_1(x) = f_{\overline{x}}(\varphi_з(x))$ имеют вид

$$f_1(x)\colon \begin{cases} y(t) = \overline{q}_1(t-1), \\ q_1(t) = x(t), \\ q_2(t) = 0, \\ q_2(0) = q_2(0) = 0. \end{cases}$$

Вес функции $f_1(x)$ равен 2 (переменная q_2 является «фиктивной»), и поэтому «приведенные» канонические уравнения для нее выглядят так:

$$f_1(x)\colon \begin{cases} y(t) = \overline{q}_1(t-1), \\ q_1(t) = x(t), \\ q_1(0) = 0. \end{cases}$$

(Эти уравнения с точностью до обозначения переменных такие же, как и выписанные выше.)

б) Очевидно, что данная схема реализует функцию $f_2(x) = f_1(f_{\overline{x}}(x))$, где $f_1(x)$ — о.-д. функция из примера а). Следовательно, $f_2(\widetilde{x}^{\omega}) = 1\widetilde{x}^{\omega}$ — «единичная задержка с начальным выходом, равным 1», и

$$f_2(x)\colon \begin{cases} y(t) = \overline{q}(t-1), \\ q(t) = \overline{x}(t), \\ q(0) = 0. \end{cases}$$

в) Схема реализует функцию $f_3(x) = \varphi_з(f_1(x))$. Значит, $f_2(\widetilde{x}^{\omega}) = 01\,\overline{x}(1)\,\overline{x}(2)\ldots\,\overline{x}(t)\ldots$ Далее, так как функции $\varphi_з$ и f_1 задаются следующими каноническими уравнениями:

$$\varphi_з(x_1)\colon \begin{cases} y_1(t) = q_1(t-1), \\ q_1(t) = x_1(t), \\ q_1(0) = 0, \end{cases} \qquad f_1(x_2)\colon \begin{cases} y_2(t) = \overline{q}_2(t-1), \\ q_2(t) = x_2(t), \\ q_2(0) = 0, \end{cases}$$

то имеем

$$\varphi_з(f_1(x))\colon \begin{cases} y(t) = q_1(t-1), \\ q_1(t) = \overline{q}_2(t-1), \\ q_2(t) = x(t), \\ q_1(0) = q_2(0) = 0. \end{cases}$$

г) Данная схема реализует о.-д. функцию

$$\varphi_з^{(n)}(x) = \underbrace{\varphi_з(\varphi_з\ \ldots\ \varphi_з}_{n\text{ раз}}(x)\ldots)$$

— задержку на n тактов. Очевидно, что $\varphi_з^{(n)}(\widetilde{x}^\omega) = \underbrace{00\ldots0}_{n\text{ раз}}\widetilde{x}^\omega$. Канонические уравнения этой функции выглядят так:

$$\varphi_з^{(n)}(x)\colon \begin{cases} y(t) = q_1(t-1), \\ q_1(t) = q_2(t-1), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ q_{n-1}(t) = q_n(t-1), \\ q_n(t) = x(t), \\ q_1(0) = q_2(0) = \ldots = q_n(0) = 0. \end{cases}$$

д) Обозначим функцию, реализуемую этой схемой, через $f_4(x)$. От переменной x она зависит несущественным образом. Для получения ее канонических уравнений возьмем единичную задержку с двумя выходами, y и y_1, и введем обратную связь по переменным x и y_1. Канонические уравнения единичной задержки с двумя выходами y и y_1 выглядят так:

$$\begin{gathered} y(t) = q(t-1), \\ y_1(t) = q(t-1), \\ q(t) = x(t), \\ q(0) = 0. \end{gathered}$$

Вводя обратную связь по каналам x и y_1, имеем

$$f_4(x)\colon \begin{cases} y(t) = q(t-1), \\ q(t) = q(t-1), \\ q(0) = 0. \end{cases}$$

Таким образом, $f_4(x) = f_{\equiv 0}(x)$ (здесь $f_{\equiv 0}(x)$ — о.-д. функция, порожденная тождественным нулем), т. е. $f_4(\widetilde{x}^\omega) = \widetilde{0}^\omega$.

е) Функцию, реализуемую этой схемой, обозначим через $f_5(x)$ (переменная x фиктивная). Для получения канонических уравнений функции $f_5(x)$ достаточно взять схему из примера а), разветвить ее выход на два (y и y_1) и ввести обратную связь по переменным x и y_1. Имеем

$$\begin{gathered} y(t) = \overline{q}(t-1), \\ y_1(t) = \overline{q}(t-1), \\ q(t) = x(t), \\ q(0) = 0, \end{gathered}$$

$$f_5(x)\colon \begin{cases} y(t) = \overline{q}(t-1), \\ q(t) = \overline{q}(t-1), \\ q(0) = 0. \end{cases}$$

На «языке последовательностей» функция $f_5(x)$ описывается соотношением $f_5(\widetilde{x}^\omega) = [10]^\omega$.

ж) Функцию, реализуемую данной схемой, обозначим через $f_6(x)$ (переменная x фиктивная). Для нахождения ее канонических уравнений можно взять канонические уравнения для функции $\varphi_з(f_{\overline{x}}(x))$,

разветвить ее выход на два (y и y_1) и ввести обратную связь по переменным x и y_1. Выполним эти шаги:

$$\varphi_3(f_{\overline{x}}(x))\colon \begin{cases} y(t) = q(t-1), \\ q(t) = \overline{x}(t), \\ q(0) = 0, \end{cases}$$

$$\begin{gathered} y(t) = q(t-1), \\ y_1(t) = q(t-1), \\ q(t) = \overline{x}(t), \\ q(0) = 0, \end{gathered}$$

$$f_6(x)\colon \begin{cases} y(t) = q(t-1), \\ q(t) = \overline{q}(t-1), \\ q(0) = 0. \end{cases}$$

На «языке последовательностей» имеем $f_6(\widetilde{x}^{\omega}) = [01]^{\omega}$.

з) Канонические уравнения функции $f_7(x)$, реализуемой этой схемой, получаем из канонических уравнений функции $f_2(x)$ (см. пример б)), применяя операции разветвления и обратной связи (как в примере ж)). Имеем

$$\begin{gathered} y(t) = \overline{q}(t-1), \\ y_1(t) = \overline{q}(t-1), \\ q(t) = \overline{x}(t), \\ q(0) = 0, \end{gathered}$$

$$f_7(x)\colon \begin{cases} y(t) = \overline{q}(t-1), \\ q(t) = q(t-1), \\ q(0) = 0, \end{cases}$$

т. е. $f_7(x) = f_{\equiv 1}(x)$ или $f_7(\widetilde{x}^{\omega}) = \widetilde{1}^{\omega}$ (переменная x фиктивная).

и) Обозначим о.-д. функцию, реализуемую данной схемой, через $f_8(x)$ (x фиктивная переменная). Действуя так же, как в примере з), но используя при этом функцию $f_3(x)$ (из примера в)), получаем

$$\begin{gathered} y(t) = q_1(t-1), \\ y_1(t) = q_1(t-1), \\ q_1(t) = \overline{q}_2(t-1), \\ q_2(t) = x(t), \\ q_1(0) = q_2(0) = 0, \end{gathered}$$

$$f_8(x)\colon \begin{cases} y(t) = q_1(t-1), \\ q_1(t) = \overline{q}_2(t-1), \\ q_2(t) = q_1(t-1), \\ q_1(0) = q_2(0) = 0, \end{cases}$$

т. е. $f_8(\widetilde{x}^{\omega}) = [0110]^{\omega}$.

к) Для построения канонических уравнений функции $f_9(x)$, реализуемой данной схемой, можно поступить так: напишем канонические уравнения для суперпозиции $f_{x\vee y}(f_{\overline{x}}(x),\, \varphi_з(x_1))$, где $f_{x\vee y}(x,\, y)$ — о.-д. функция, порожденная дизъюнкцией; затем разветвим выход на два (y и y_1), а потом применим операцию обратной связи по переменным x_1 и y_1. Выполним эти шаги:

$$f_{\vee}(f_{\overline{x}}(x),\, \varphi_з(x_1))\colon \begin{cases} y(t) = \overline{x}(t) \vee q(t-1), \\ q(t) = x_1(t), \\ q(0) = 0, \end{cases}$$

$$y(t) = \overline{x}(t) \vee q(t-1),$$
$$y_1(t) = \overline{x}(t) \vee q(t-1),$$
$$q(t) = x_1(t),$$
$$q(0) = 0,$$

$$f_9(x)\colon \begin{cases} y(t) = \overline{x}(t) \vee q(t-1), \\ q(t) = \overline{x}(t) \vee q(t-1), \\ q(0) = 0, \end{cases}$$

т. е.

$$y(1) = \overline{x}(1), \quad y(2) = \overline{x}(1) \vee \overline{x}(2), \ldots, y(t) = \overline{x}(1) \vee \overline{x}(2) \vee \ldots \vee \overline{x}(t) \ldots$$

2.13. Для функции f из $P_{2,\text{од}}$ построить схему над множеством, состоящим из элемента единичной задержки и функций, порожденных дизъюнкцией, конъюнкцией и отрицанием:

1) $f\colon \begin{cases} y(t) = x(t) \vee q(t-1), \\ q(t) = x(t) \cdot \overline{q}(t-1), \\ q(0) = 1; \end{cases}$ 2) $f\colon \begin{cases} y(t) = x(t) \oplus q(t-1), \\ q(t) = x(t) \downarrow q(t-1), \\ q(0) = 0; \end{cases}$

3) функция f задается канонической таблицей (табл. 4.7) и начальным условием $q(0) = 1$;

Таблица 4.7

$x(t)$	$q(t-1)$	$y(t)$	$q(t)$
0	0	0	1
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	0

Таблица 4.8

$x(t)$	$q(t-1)$	$y(t)$	$q(t)$
0	0	1	1
0	1	0	1
1	0	0	0
1	1	1	0

4) функция f задается канонической таблицей (табл. 4.8) и $q(0) = 0$;

5) функция f задается диаграммой Мура, изображенной на рис. 4.61, *а*;

6) функция f задается диаграммой Мура, изображенной на рис. 4.61, *б*;

7) функция f задается диаграммой Мура, изображенной на рис. 4.61, *в*;

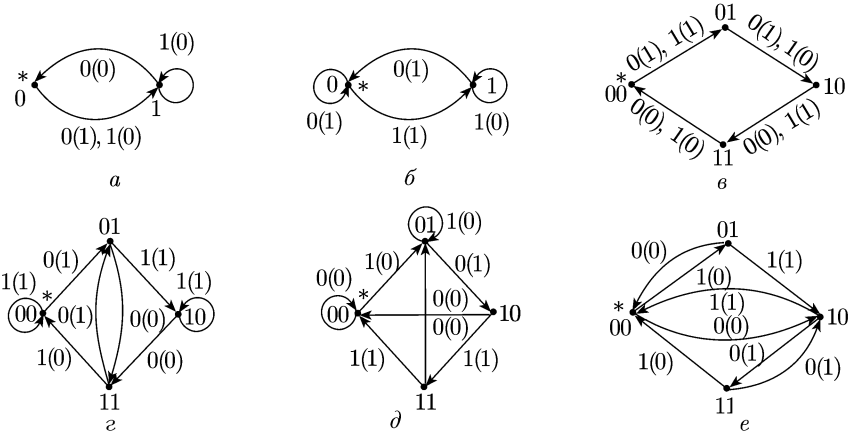


Рис. 4.61

8) функция f задается диаграммой Мура, изображенной на рис. 4.61, *г*;

9) функция f задается диаграммой Мура, изображенной на рис. 4.61, *д*;

10) функция f задается диаграммой Мура, изображенной на рис. 4.61, *е*;

11) f: $\begin{cases} y(1) = 0, \\ y(t) = x(t-1) \vee y(t-1), \ \ t \geqslant 2; \end{cases}$

12) f: $\begin{cases} y(1) = y(2) = 1, \\ y(t) = y(t-1) \to x(t-2), \ \ t \geqslant 3; \end{cases}$

13) f: $\begin{cases} y(1) = 0, \\ y(2) = 1, \\ y(t) = x(t-2) \oplus y(t-1), \ \ t \geqslant 3; \end{cases}$

14) f: $\begin{cases} y(2t) = x(2t-1), \ \ t \geqslant 1, \\ 0 \ \text{ в остальных случаях}; \end{cases}$

15) f: $\begin{cases} y(2t-1) = \overline{x}(2t-1), \ \ t \geqslant 1, \\ y(2t) = x(2t-1) \oplus x(2t), \ \ t \geqslant 1; \end{cases}$

16) f: $\begin{cases} y_1(1) = \overline{x}_1(1), \\ y_2(1) = \overline{x}_2(1), \\ y_1(t) = x_1(t) \to x_2(t-1), \ \ t \geqslant 2, \\ y_2(t) = x_2(t) \to x_1(t-1), \ \ t \geqslant 2. \end{cases}$

2.14. По схеме, реализующей функцию f из $\widehat{P}_{2,\text{од}}$, построить канонические уравнения, каноническую таблицу и диаграмму Мура:

1) рис. 4.62, *а*; 2) рис. 4.62, *б*; 3) рис. 4.62, *в*; 4) рис. 4.62, *г*; 5) рис. 4.63, *а*; 6) рис. 4.63, *б*; 7) рис. 4.63, *в*; 8) рис. 4.63, *г*.

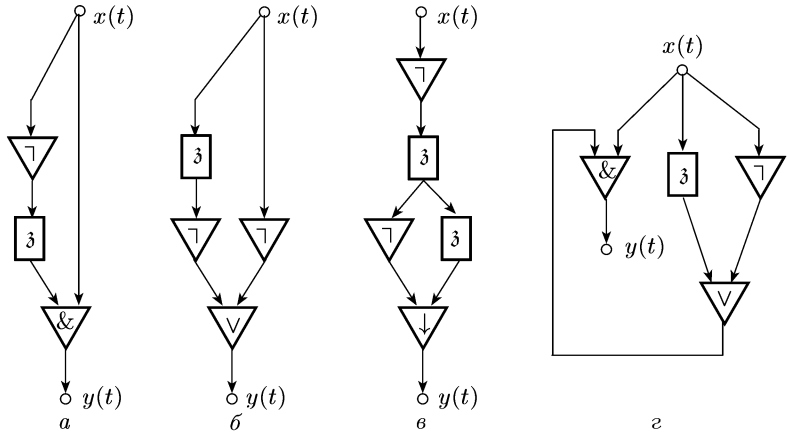


Рис. 4.62

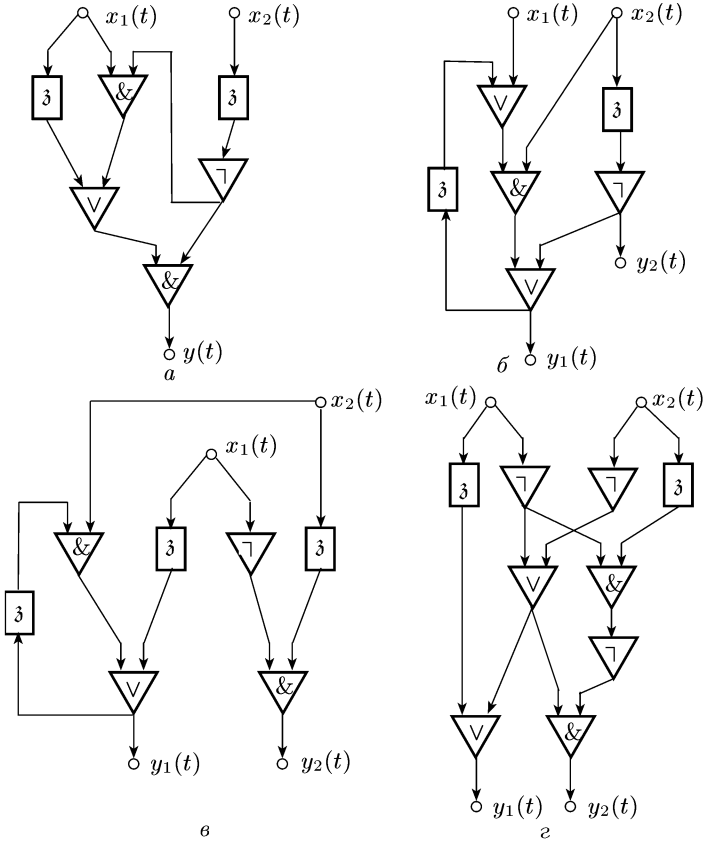
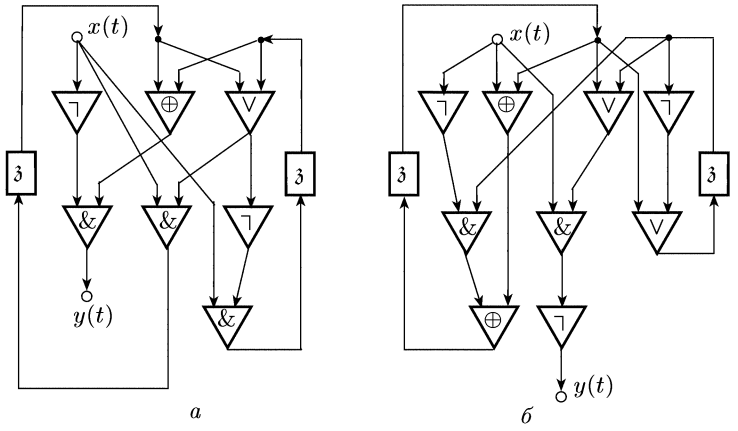
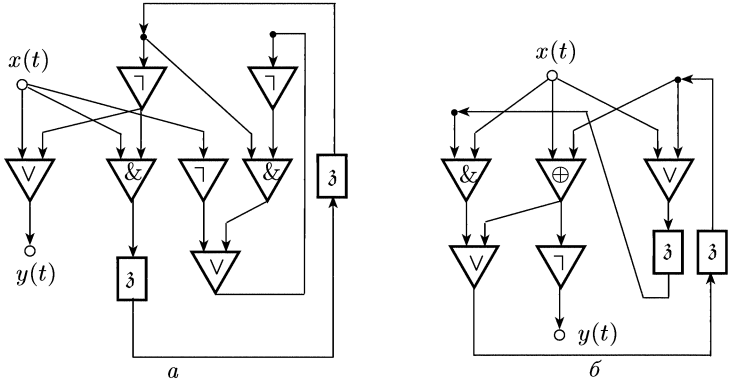


Рис. 4.63



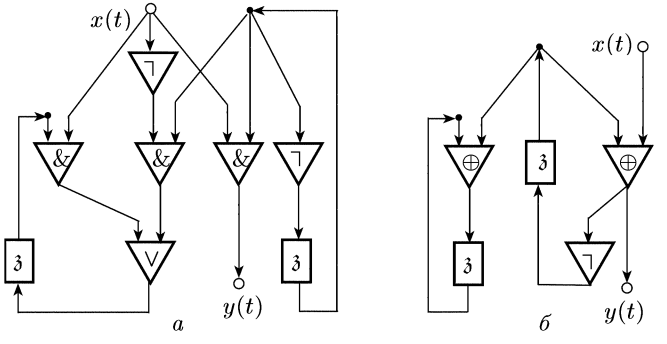
а *б*

Рис. 4.64



а *б*

Рис. 4.65



а *б*

Рис. 4.66

2.15. Построить схему, реализующую ту же о.-д. функцию, что и заданная схема, но содержащую меньше элементов единичной задержки. Схема должна строиться над множеством, состоящим из элемента единичной задержки и функций, порожденных дизъюнкцией, конъюнкцией и отрицанием:

1) рис. 4.64, *а*; 2) рис. 4.64, *б*; 3) рис. 4.65, *а*; 4) рис. 4.65, *б*; 5) рис. 4.66, *а*; 6) рис. 4.66, *б*.

2.16. В схеме, реализующей функцию f из множества $P_{2,\text{од}}^{n,1}$ $(n \geqslant \geqslant 1)$, содержится p $(p \geqslant 0)$ единичных задержек φ_3.

1) Показать, что вес функции f не больше 2^p.

2) Привести примеры схем с p единичными задержками, реализующих функции веса r, где:

а) $r = 1$, $p \geqslant 1$; б) $r = 2^p$, $p \geqslant 1$; в) $r = 1, 2, 3, 4$ и $p = 2$.

4. Замкнутые классы и полнота в множествах детерминированных и ограниченно-детерминированных функций. Пусть M — некоторое множество д. (или о.-д.) функций и $\mathfrak{G}$ — какая-либо совокупность операций, не выводящих за пределы множества всех д. (или о.-д.) функций. Иными словами, если $o \in \mathfrak{G}$, то, применяя o к произвольным (или допустимым) д. (или о.-д.) функциям, мы получаем снова д. (или о.-д.) функции.

Замыканием $[M]_{\mathfrak{G}}$ множества M относительно совокупности операций $\mathfrak{G}$ называется множество, состоящее из множества M и таких д. (или о.-д.) функций, которые могут быть получены из функций множества M с помощью операций из $\mathfrak{G}$, причем операции можно применять любое конечное число раз. Операция получения множества $[M]_{\mathfrak{G}}$ из M называется *операцией замыкания*. Множество M называется *функционально замкнутым* (или, короче, *замкнутым*) классом относительно совокупности операций $\mathfrak{G}$, если $[M]_{\mathfrak{G}} = M$. Пусть M — замкнутый относительно совокупности операций $\mathfrak{G}$ класс д. (или о.-д.) функций. Подмножество A из M называется *функционально полной* (или, короче, *полной*) системой в M относительно совокупности операций $\mathfrak{G}$, если $[A]_{\mathfrak{G}} = M$. Множество A д. (или о.-д.) функций называется *неприводимой* системой относительно совокупности операций $\mathfrak{G}$, если, каково бы ни было собственное подмножество B из A, выполняется строгое включение $[B]_{\mathfrak{G}} \subset [A]_{\mathfrak{G}}$. *Базисом* замкнутого класса M относительно совокупности операций $\mathfrak{G}$ называется всякая полная и неприводимая система из M. Множество A, содержащееся в замкнутом классе M, называется *предполным классом в* M, если оно не является полной системой в M, но для всякой функции f из $M \backslash A$ выполняется равенство $[A \cup \{f\}]_{\mathfrak{G}} = M$.

Как уже указывалось в п. 2 (перед примером 5) всякое множество о.-д. функций из $\widehat{P}_{k,\text{од}}$, состоящее из элемента единичной задержки и функций, порожденных функциями из некоторой полной в P_k системы, образует полную в $\widehat{P}_{k,\text{од}}$ систему относительно со-

вокупности операций $\{O_1, O_2, O_3, O_4, S\}$. В частности, в $\widehat{P}_{2,\text{од}}$ полна система $\{f_{\overline{x}}(x), f_{x\vee y}(x, y), f_{x\,\&\,y}(x, y), \varphi_j(x)\}$, где $f_{\overline{x}}(x)$, $f_{x\vee y}(x, y)$ и $f_{x\,\&\,y}(x, y)$ — о.-д. функции, порожденные соответственно отрицанием, дизъюнкцией и конъюнкцией.

В множестве $\widehat{P}_{k,\text{од}}$ существуют базисы относительно совокупности операции $\{O_1, O_2, O_3, O_4, S\}$, состоящие из одной функции. Пример такого базиса дает множество $\{f_0(x_1, x_2, x_3, \varphi_j(x_4))\}$, где φ_j — элемент единичной задержки из $\widehat{P}_{k,\text{од}}$, а функция f_0 есть о.-д. функция, порожденная функцией $\max(x_1 \cdot x_4 + x_2(1 - x_4), x_3) + 1$ (здесь сумма, разность и произведение берутся по $\bmod k$).

Полнота конкретных систем в $\widehat{P}_{k,\text{од}}$ доказывается обычно методом сведения к заведомо полным системам (в частности, строятся элемент единичной задержки и функции, порожденные функциями из некоторой полной в P_k системы).

Пример 11. Доказать полноту системы функций $\{f_1, f_2\}$ в $\widehat{P}_{2,\text{од}}$ относительно совокупности операций $\{O_1, O_2, O_3, O_4, S\}$, если

$$f_1\colon y(t) = \overline{x}_1(t) \cdot x_2(t), \quad t \geqslant 1;$$

$$f_2\colon \begin{cases} y_1(t) = x_1(t) \vee \overline{q}(t-1), \\ y_2(1) = x_1(t) \cdot q(t-1) \vee x_2(t), \\ q(t) = x_1(t) \cdot \overline{x}_2(t), \\ q(0) = 0. \end{cases}$$

Решение. Попытаемся построить единичную задержку и функцию $f_{\equiv 1}(x)$ — функцию, порожденную тождественной единицей. Этого для обоснования полноты системы $\{f_1, f_2\}$ будет достаточно, так как система $\{\overline{x} \cdot y, 1\}$ полна в P_2.

Отождествляя переменные в функции f_1 (операция $\mathbb{O}_1$), получаем о.-д. функцию, порожденную тождественным нулем: $f_1(x, x) = f_{\equiv 0}(x)$. Затем, удаляя выходную переменную y_2 у функции f_2 (операция O_2) и беря суперпозицию $f_3(x) = f_2(f_{\equiv 0}(x), f_{\equiv 0}(x))$, имеем

$$f_3(x)\colon \begin{cases} y_1(t) = \overline{q}(t-1), \\ q(t) = 0, \\ q(0) = 0, \end{cases}$$

т. е. $f_3(x) = f_{\equiv 1}(x)$. Далее строим функцию, порожденную отрицанием: $f_4(x) = f_1(x, f_{\equiv 1}(x)) = f_{\overline{x}}(x)$ (использована операция S); потом подставляем в функцию f_2 вместо переменной x_2 функцию $f_{\overline{x}}(x_2)$ (операция S) и применяем операцию обратной связи к функции $f_2(x_1, f_{\overline{x}}(x_2))$ по переменным x_2 и y_1. Получаем функцию

$$f_5(x_1)\colon \begin{cases} y_2(t) = x_1(t) \cdot q(t-1) \vee \overline{x_1(t) \vee \overline{q}(t-1)} = \\ \qquad\qquad = x_1(t) \cdot q(t-1) \vee \overline{x}_1(t) \cdot q(t-1) = q(t-1), \\ q(t) = x_1(t) \cdot (x_1(t) \vee \overline{q}(t-1)) = x_1(t), \\ q(0) = 0, \end{cases}$$

т. е. $f_5(x_1) = \varphi_j(x_1)$.

Таким образом, система функций $\{f_1, f_2\}$ порождает полную в $\widehat{P}_{2,\text{од}}$ систему $\{f_1, f_{\equiv 1}(x), \varphi_j(x)\}$. Следовательно, система $\{f_1, f_2\}$ полная.

Пример 12. Доказать, что система $\{f_1, f_2\}$ не полна в $\widehat{P}_{2,\text{од}}$ относительно совокупности операций $\mathfrak{O} = \{O_1, O_2, O_3, O_4, S\}$, если

$$f_1\colon\ y(t) = x_1(t)\cdot \overline{x}_2(t),\ \ t \geqslant 1;$$

$$f_2\colon \begin{cases} y(t) = x_1(t) \vee q(t-1), \\ q(t) = x_1(t)\cdot x_2(t), \\ q(0) = 0. \end{cases}$$

Решение. Покажем, что в замыкании системы $\{f_1, f_2\}$ относительно совокупности $\mathfrak{O}$ содержатся только такие функции, которые в момент времени $t = 1$ при подаче на входы нулей выдают на любом выходе 0. Очевидно, что это так для исходных функций f_1 и f_2.

Предположим, что сформулированное утверждение верно для всех тех функций из замыкания (назовем их *допустимыми*), которые могут быть получены из функций f_1 и f_2 с использованием операций из $\mathfrak{O}$ в суммарном количестве, не превосходящем числа l $(l \geqslant 0)$, и докажем его справедливость для функций, требующих для своего построения (из функций f_1 и f_2 с помощью совокупности операций $\mathfrak{O}$) самое малое $l+1$ (суммарного) числа операций. Рассмотрим пять случаев.

1) Функция f получается из некоторой допустимой функции f' с помощью операции O_1. Пусть y_j — произвольный выход функции f' и $f' = f'(x_1, \ldots, x_n)$ $(n \geqslant 2)$. Предположим, что функция f строится из функции f' посредством отождествления переменных $x_{i_1} = \ldots = x_{i_p} = x$ $(p \geqslant 2)$, т. е.

$$f(x, x_1, \ldots, x_{i_1-1}, x_{i_1+1}, \ldots, x_{i_p-1}, x_{i_p+1}, \ldots, x_n) = \\ = f'(x_1, \ldots, x_{i_1-1}, x, x_{i_1+1}, \ldots, x_{i_p-1}, x, x_{i_p+1}, \ldots, x_n).$$

Так как $f'(0\widetilde{a}_1^{\omega}, \ldots, 0\widetilde{a}_n^{\omega}) = 0\widetilde{b}_j^{\omega}$ (для всякого j), то

$$f(0\widetilde{a}^{\omega}, 0\widetilde{a}_1^{\omega}, \ldots, 0\widetilde{a}_{i_1-1}^{\omega}, 0\widetilde{a}_{i_1+1}^{\omega}, \ldots, 0\widetilde{a}_{i_p-1}^{\omega}, 0\widetilde{a}_{i_p+1}^{\omega}, \ldots, 0\widetilde{a}_n^{\omega}) = \\ = f'(0\widetilde{a}_1^{\omega}, \ldots, 0\widetilde{a}_{i_1-1}^{\omega}, 0\widetilde{a}^{\omega}, 0\widetilde{a}_{i_1+1}^{\omega}, \ldots, 0\widetilde{a}_{i_p-1}^{\omega}, 0\widetilde{a}^{\omega}, 0\widetilde{a}_{i_p+1}^{\omega}, \ldots \\ \ldots, 0\widetilde{a}_n^{\omega}) = 0\widetilde{b}_j^{\omega}.$$

Значит, утверждение справедливо и для функции f.

2) Функция f получена из некоторой допустимой функции f' с помощью операции O_2. В этом случае утверждение очевидно, так как «функционирование» любого невыброшенного выхода осталось неизменным.

3) Функция f получена из допустимой функции f' с помощью операции обратной связи (операция O_3). Предположим, что обратная связь была введена по входной переменной x_{i_0} и выходной переменной y_{j_0}, и рассмотрим произвольный выход y_j $(j \neq j_0)$ у функции f. Если в канонических уравнениях, задающих функцию f',

$$y_{j_0}(t) = F_{j_0}(x_1(t), \ldots, x_{i_0-1}(t), x_{i_0+1}(t), \ldots, x_n(t), \mathbf{q}(t-1))$$

и $y_j(t) = F_j(\mathbf{x}(t), \mathbf{q}(t-1))$, $j \neq j_0$, то функционирование выхода y_j описывается соотношением

$$y_j(1) = F_j\big(x_1(t), \ldots, x_{i_0-1}(t), F_{j_0}(x_1(t), \ldots, x_{i_0-1}(t), x_{i_0+1}(t), \ldots \\ \ldots, x_n(t), \mathbf{q}(t-1)), x_{i_0+1}(t), \ldots, x_n(t), \mathbf{q}(t-1)\big).$$

Поэтому

$$y_j(t) = F_j\big(0, \ldots, 0, F_{j_0}(0, \ldots, 0, 0, \ldots, 0, \mathbf{q}(0)), 0, \ldots 0, \mathbf{q}(0)\big) = \\ = F_j\big(0, \ldots, 0, 0, 0, \ldots, 0, \mathbf{q}(0)\big) = 0.$$

Следовательно, утверждение справедливо и для функции f.

4) Функция f получена из допустимых функций f' и f'' с помощью операции объединения (операция O_4). Утверждение в этом случае очевидно, так как функционирование каждого выхода (у любой из функций f' и f'') остается неизменным.

5) Функция f есть суперпозиция $f'(f'')$ допустимых функций f' и f'' по переменным $x'_1 - y''_1, \ldots, x'_p - y''_p$, где x'_i — входные переменные функции f', а y''_j — выходные переменные функции f''. Очевидно, что функционирование каждого выхода y''_j функции f, являющегося выходом функции f'' (т.е. для $j \neq 1, \ldots, p$), остается неизменным.

Рассмотрим произвольный выход y'_j функции f. Если в канонических уравнениях для функции f' выход y'_j описывался соотношением $y'_j(t) = F'_j(x'_1(t), \ldots, x'_p(t), x'_{p+1}(t), \ldots, x'_{n_1}(t), \mathbf{q}'(t-1))$, то в канонических уравнениях суперпозиции $f'(f'')$ ему отвечает соотношение

$$y'_j(t) = F'_j\big(F''_1(\mathbf{x}''(t), \mathbf{q}''(t-1)), \ldots, F''_p(\mathbf{x}''(t), \mathbf{q}''(t-1)), \\ x'_{p+1}(t), \ldots, x'_{n_1}(t), \mathbf{q}'(t-1)\big).$$

Поэтому при $\mathbf{x}''(1) = \mathbf{0}$ и $x'_{p+1}(1) = \ldots = x'_{n_1}(1) = 0$ имеем

$$y'_j(1) = F'_j\big(F''_1(\mathbf{x}''(1), \mathbf{q}''(0)), \ldots \\ \ldots, F''_p(\mathbf{x}''(1), \mathbf{q}''(0)), x'_{p+1}(1), \ldots, x'_{n_1}(1), \mathbf{q}'(0)\big) = \\ = F'_j\big(F''_1(\mathbf{0}, \mathbf{q}''(0)), \ldots, F''_p(\mathbf{0}, \mathbf{q}''(0)), 0, \ldots, 0, \mathbf{q}'(0)) = \\ = F'_j(0, \ldots, 0, 0, \ldots, 0, \mathbf{q}'(0)\big) = 0.$$

Значит, утверждение справедливо и для функции f.

Итак, неполнота системы $\{f_1, f_2\}$ (относительно совокупности операции ⑥) установлена.

2.17. Доказать полноту системы $\{f_1, f_2\}$ в $\widehat{P}_{2,\text{од}}$ относительно совокупности операций $\{O_1, O_2, O_3, O_4, S\}$, если:

1) f: $y(t) = \overline{x}_1(t) \cdot \overline{x}_2(t)$, $t \geqslant 1$,

$$f_2\colon \begin{cases} y(t) = x_1(t) \cdot \overline{x}_2(t) \vee q(t-1), \\ q(t) = x_1(t) \vee x_2(t), \\ q(0) = 0; \end{cases}$$

2) f_1: $y(t) = x_1(t) \to \overline{x}_2(t),\ t \geqslant 1,$

$$f_2\colon \begin{cases} y(t) = (x_1(t) \to x_2(t))\cdot q(t-1), \\ q(t) = x_1(t))\cdot x_2(t), \\ q(0) = 0; \end{cases}$$

3) f_1: $y(t) = \overline{x}_1(t) \vee \overline{x}_2(t),\ t \geqslant 1,$

$$f_2\colon \begin{cases} y(t) = x_1(t) \vee q(t-1), \\ q(t) = x_1(t) \oplus x_2(t), \\ q(0) = 0; \end{cases}$$

4) f_1: $y(t) = \overline{x}(t),\ t \geqslant 1,$

$$f_2\colon \begin{cases} y(t) = x_1(t)\cdot x_2(t) \vee x_3(t)\cdot q(t-1), \\ q(t) = x_2(t)\cdot x_2(t), \\ q(0) = 0; \end{cases}$$

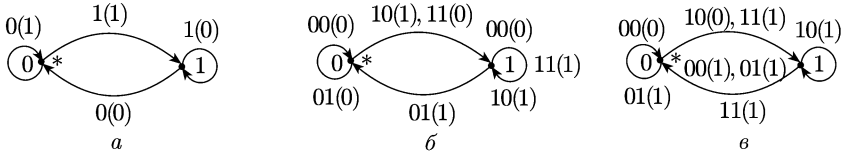
5) f_1: $y(t) = \overline{x}_1(t)\cdot\overline{x}_2(t)\cdot\overline{x}_1(t) \vee \overline{x}_3(t) \vee \overline{x}_2(t)\cdot\overline{x}_3(t),\ t \geqslant 1,$

$$f_2\colon \begin{cases} y(t) = q(t-1), \\ q(t) = x_1(t) \oplus x_2(t), \\ q(0) = 0; \end{cases}$$

6) f_1: $y(t) = \overline{x}_1(t)\cdot x_2(t),\ t \geqslant 1,$

$$f_2\colon \begin{cases} y(t) = (x_1(t) \to x_2(t)) \vee q(t-1), \\ q(t) = x_1(t) \to x_3(t), \\ q(0) = 1; \end{cases}$$

7) f_1: $y(t) = x_1(t) \to \overline{x}_2(t),\ t \geqslant 1,$ f_2 задается диаграммой Мура, изображенной на рис. 4.67, *а*;



а *б* *в*

Рис. 4.67

8) f_1: $y(t) = \overline{x}_1(t)\cdot\overline{x}_2(t),\ t \geqslant 1,$ f_2 задается диаграммой Мура, изображенной на рис. 4.67, *б*;

9) f_1: $y(t) = \overline{x}_1(t) \vee \overline{x}_2(t),\ t \geqslant 1,$ f_2 задается диаграммой Мура, изображенной на рис. 4.67, *в*;

10) f_1: $y(t) = x_1(t) \to x_2(t),\ t \geqslant 1,$

$$f_2\colon \begin{cases} y_1(t) = x_1(t)\cdot x_2(t) \vee q(t-1), \\ y_2(t) = \overline{x}_2(t)\cdot q(t-1), \\ q(t) = x_2(t), \\ q(0) = 0; \end{cases}$$

11) f_1: $y(t) = \overline{x}(t),\ t \geqslant 1,$
f_2: $\begin{cases} y_1(t) = x_1(t)\cdot \overline{x}_2(t) \oplus x_3(t) \oplus q(t-1), \\ y_2(t) = x_1(t) \oplus q(t-1), \\ q(t) = \overline{x}_1(t), \\ q(0) = 0; \end{cases}$

12) f_1: $y(t) = \overline{x}_1(t)\cdot x_2(t),\ t \geqslant 1,$
f_2: $\begin{cases} y_1(t) = x_1(t)\cdot \overline{x}_2(t) \vee q(t-1), \\ y_2(t) = \overline{x}_1(t) \vee \overline{q}(t-1), \\ q(t) = x_1(t), \\ q(0) = 0; \end{cases}$

13) f_1: $y(t) = \overline{x}_1(t)\cdot \overline{x}_2(t),\ t \geqslant 1,$
f_2: $\begin{cases} y(t) = \overline{x}_1(t)\cdot q_1(t-1) \vee x_2(t)\cdot q_2(t-1), \\ q_1(t) = x_1(t)\cdot q_1(t-1) \vee x_2(t), \\ q_2(t) = x_1(t)\cdot \overline{q}_1(t-1) \vee q_2(t-1), \\ q_1(0) = q_2(0) = 0; \end{cases}$

14) f_1: $\begin{cases} y(t) = q(t-1), \\ q(t) = \overline{x}(t), \\ q(0) = 0, \end{cases}$ f_2: $\begin{cases} y(t) = \overline{x}_1(t) \vee \overline{x}_2(t) \vee \overline{x}_3(t)\cdot q(t-1), \\ q(t) = \overline{x}_1(t) \vee x_3(t), \\ q(0) = 0; \end{cases}$

15) f_1: $\begin{cases} y(t) = q(t-1), \\ q(t) = x_1(t) \oplus x_2(t), \\ q(0) = 0, \end{cases}$ f_2: $\begin{cases} y(t) = \overline{x}_1(t) \vee \overline{x}_2(t)\cdot q(t-1), \\ q(t) = q(t-1), \\ q(0) = 1. \end{cases}$

2.18. Доказать, что функция f является шефферовой в $\widehat{P}_{2,\text{од}}$ относительно множества операций $\mathcal{O} = \{O_1, O_2, O_3, O_4, S\}$:

1) f: $\begin{cases} y(t) = \overline{x}_1(t) \vee \overline{x}_2(t) \vee \overline{x}_3(t)\cdot q(t-1), \\ q(t) = \overline{x}_3(t)\cdot \overline{x}_4(t), \\ q(0) = 0; \end{cases}$

2) f: $\begin{cases} y(t) = \overline{x}_1(t)\cdot x_2(t) \vee \overline{x}_3(t)\cdot q(t-1), \\ q(t) = x_1(t) \to (x_2(t) \to x_3(t)), \\ q(0) = 1; \end{cases}$

3) f: $\begin{cases} y(t) = \overline{x}_1(t)\cdot \overline{x}_2(t)\cdot \overline{x}_3(t) \vee q(t-1), \\ q(t) = x_1(t)\cdot \overline{x}_2(t), \\ q(0) = 0; \end{cases}$

4) f: $\begin{cases} y(t) = \overline{x}_1(t)\cdot \overline{x}_2(t) \vee q_1(t-1)\cdot q_2(t-1), \\ q_1(t) = x_2(t)\cdot \overline{x}_3(t), \\ q_2(t) = x_1(t)\cdot \overline{x}_3(t) \vee q_1(t-1), \\ q(0) = 0, \quad q_2(0) = 1; \end{cases}$

5) f: $\begin{cases} y_1(t) = \overline{x}_1(t)\cdot \overline{q}_1(t-1), \\ y_2(t) = x_1(t)\cdot \overline{q}_1(t-1) \vee \overline{x}_2(t)\cdot \overline{q}_2(t-1), \\ q_1(t) = x_1(t)\cdot \overline{x}_3(t), \\ q_2(t) = q_1(t-1), \\ q_1(0) = q_2(0) = 0. \end{cases}$

2.19. Из системы A, полной в $\widehat{P}_{2,\text{од}}$ относительно множества операций $\{O_1, O_2, O_3, O_4, S\}$, выделить собственную подсистему, полную в $\widehat{P}_{2,\text{од}}$ относительно тех же операций (и состоящую из возможно меньшего числа функций):

1) $A = \{f_{\equiv 0}(x),\ f_{\equiv 1}(x),\ f_{x\cdot y}(x, y),\ f_{x\oplus y\oplus z}(x, y, z),\ \varphi_з(x)\}$;
2) $A = \{f_{\equiv 0}(x),\ f_{x\sim y}(x, y),\ f_{x\to y}(x, y),\ \varphi_з(f_{\overline{x}}(x))\}$;
3) $A = \{f_{\equiv 1}(x),\ f_{x\oplus y}(x, y),\ f_{x\vee y}(x, y),\ \varphi_з(f_{x\cdot y}(x, y))\}$;
4) $A = \{f_{\equiv 0}(x),\ f_{\overline{x}}(x),\ f_{x\cdot y}(x, y),\ f_{x\vee y}(\varphi_з(x),\ f_{\overline{y}}(y))\}$;
5) $A = \{f_{\equiv 1}(x),\ f_{x\cdot\overline{y}}(x, y),\ f_{x\to y}(x, \varphi_з(y)),\ f_{\overline{x}}(\varphi_з(f_{\overline{y}}(y)))\}$.

2.20. Выяснить, содержится ли функция f (из $P^{1,1}_{2,\text{од}}$) в замкнутом классе A (здесь $\mathcal{O} = \{O_1, O_2, O_3, O_4, S\}$, $\mathcal{O}_1 = \{O_1, O_2, O_4, S\}$):

1) $f = f_{\equiv 0}(x)$, $A = \big[f_{\overline{x}}(x),\ \varphi_з(f_{\overline{y}}(y))\big]_{\mathcal{O}}$;
2) $f = f_{\equiv 1}(x)$, $A = \big[f_{\overline{x}}(x),\ \varphi_з(x)\big]_{\mathcal{O}}$;
3) $f = f_{\overline{x}}(x)$, $A = \big[f_{x\to y}(x, y),\ \varphi_з(x)\big]_{\mathcal{O}}$;
4) $f = f_{\equiv 1}(x)$, $A = \big[f_{x\vee y}(x, y),\ \varphi_з(f_{\overline{x}}(x)),\ f_{\overline{x}}(\varphi_з(y))\big]_{\mathcal{O}}$;
5) f: $\begin{cases} y(t) = 0, & \text{если } t = 4s+1 \text{ или } t = 4s+2,\ s \geqslant 0, \\ y(t) = 1 & \text{в ином случае,} \end{cases}$

а) $A = \big[f_{x|y}(x, y),\ \varphi_з(x)\big]_{\mathcal{O}_1}$; б) $A = \big[\varphi_з(x),\ \varphi_з(f_{\overline{x}}(y))\big]_{\mathcal{O}}$.

2.21. Выяснить, можно ли расширить множество A до полной системы в $\widehat{P}_{2,\text{од}}$ относительно множества операций $\{O_1, O_2, O_3, O_4, S\}$, добавляя только одну функцию из множества B:

1) $A = \{f_{\overline{x}}(x),\ f_{x\oplus y\oplus z}(x, y, z),\ \varphi_з(x)\}$,
$B = \{f_{\equiv 1}(x),\ f_{x\oplus y}(x, y),\ f_{m(x,y,z)}(x, y, z)\}$;
2) $A = \{f_{\equiv 1}(x),\ f_{x\sim y}(x, y),\ \varphi_з(f_{\overline{x}}(x))\}$,
$B = \{f_{\equiv 0}(x),\ f_{x\cdot y}(x, y),\ \varphi_з(x)\}$;
3) $A = \{f_{x\cdot y}(x, y),\ f_{x\vee y}(x, \varphi_з(y))\}$,
$B = \{f_{\equiv 0}(x),\ f_{\equiv 1}(x),\ f_{x\to y}(x, \varphi_з(y))\}$;
4) $A = \{f_{x\cdot\overline{y}}(x, y),\ f_{x\oplus y}(x, y),\ f_{x\cdot y}(x, \varphi_з(y))\}$,
$B = \{f_{\equiv 1}(x),\ f_{x\sim y}(x, \varphi_з(y)),\ \varphi_з(x)\}$;
5) $A = \{f_{x\vee y}(x, y),\ f_{x\cdot\overline{y}}(x, y),\ f_{m(x,y,z)}(x, y, \varphi_з(z))\}$,
$B = \{f_{x\oplus y}(x, y),\ f_{\overline{x}}(\varphi_з(y)),\ \varphi_з(x)\}$.

Глава V

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ АЛГОРИТМОВ

§ 1. Машины Тьюринга и операции над ними. Функции, вычислимые на машинах Тьюринга

1. Простейшие свойства машин Тьюринга. *Машина Тьюринга* представляет собой абстрактное устройство, состоящее из ленты, считывающей (и печатающей) головки и управляющего устройства.

Лента разбита на *ячейки* (*клетки*). Во всякой ячейке в каждый дискретный момент времени находится в точности один символ из внешнего алфавита $A = \{a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}\}$ $(n \geqslant 2)$. Алфавит A содержит символ, называемый *пустым*, а любая ячейка, содержащая в данный момент пустой символ, называется *пустой ячейкой* (в этот момент). В качестве пустого символа обычно используют 0 (нуль). Лента предполагается потенциально неограниченной в обе стороны. Это следует понимать так: в каждый момент времени лента конечна (т. е. содержит конечное число ячеек), но «размеры» ленты (число ячеек на ней) при необходимости можно увеличивать.

Управляющее устройство в каждый момент времени находится в некотором состоянии q_j, принадлежащем множеству $Q = \{q_0, q_1, \ldots$ $\ldots, q_{r-1}\}$ $(r \geqslant 1)$. Множество Q называется *внутренним алфавитом* (или *множеством внутренних состояний*). Иногда из Q выделяются непересекающиеся подмножества Q_1 и Q_0 начальных и заключительных состояний соответственно.

Замечание. В дальнейшем, если не оговаривается противное, считаем, что $|Q| \geqslant 2$, и в качестве начального берем только одно состояние q_1. Заключительным, как правило, будет состояние q_0.

Считывающая (и печатающая) головка перемещается вдоль ленты так, что в каждый момент времени она обозревает ровно одну ячейку ленты. Головка считывает содержимое обозреваемой ячейки и записывает в нее (печатает в ней) вместо обозреваемого символа некоторый символ из внешнего алфавита. «Засылаемый» в ячейку символ может, в частности, совпадать с тем, который обозревался (в данный момент).

В процессе работы управляющее устройство в зависимости от состояния, в котором оно находится, и символа, обозреваемого головкой, изменяет свое внутреннее состояние или остается в прежнем состоянии, выдает головке приказ напечатать в обозреваемой ячейке определенный символ из внешнего алфавита и «приказывает» головке либо остаться на месте, либо сдвинуться на одну ячейку влево, либо сдвинуться на одну ячейку вправо.

Работа управляющего устройства характеризуется тремя функциями:

$$G\colon\ Q \times A \to Q,$$
$$F\colon\ Q \times A \to A,$$
$$D\colon\ Q \times A \to \{S, L, R\}.$$

Функция G называется *функцией переходов*, функция F — *функцией выходов* и D — *функцией движения* (*головки*). Символы S, L и R обозначают соответственно отсутствие движения головки, сдвиг головки на одну ячейку влево и сдвиг на ячейку вправо.

Функции G, F и D можно задать списком пятерок вида

$$q_i a_j\, G(q_i, a_j)\, F(q_i, a_j)\, D(q_i, a_j), \tag{1}$$

или, короче, $q_i a_j q_{ij} a_{ij} d_{ij}$. Эти пятерки называются *командами*. Функции G, F и D являются, вообще говоря, частичными (не всюду определенными). Это значит, что не для всякой пары (q_i, a_j) определена соответствующая пятерка вида (1). Список всех пятерок, определяющих работу машины Тьюринга, называется *программой* этой машины. Программу машины можно задавать в виде таблицы (табл. 5.1).

Таблица 5.1

	$q_0 \dots q_i \dots q_{r-1}$
a_0	
$\vdots$	$\vdots$
a_j	$\dots$ $q_{ij}\ \ a_{ij}\ \ d_{ij}$ $\dots$
$\vdots$	$\vdots$
a_{n-1}	

Если в программе машины для пары (q_i, a_j) пятерка вида (1) отсутствует, то в таблице на пересечении строки a_j и столбца q_j ставится прочерк.

Работу машины Тьюринга описывают также на «языке конфигураций».

Пусть в момент времени t самая левая непустая ячейка C_1 ленты содержит символ a_{j_1}, а самая правая непустая ячейка C_s $(s \geqslant 2)$ — символ a_{j_s} (между ячейками C_1 и C_s находится $s-2$ ячеек). В этом случае говорят, что *в момент* t на ленте *записано слово* $P = a_{j_1} a_{j_2} \dots a_{j_p} \dots a_{j_s}$, где a_{j_p} — символ, содержащийся в момент t в ячейке C_p $(1 \leqslant p \leqslant s)$. При $s = 1$, т. е. когда на ленте только один непустой символ, $P = a_{j_1}$. Пусть в этот момент времени управляющее устройство находится в состоянии q_i, и головка обозревает символ a_{j_l} слова P $(l \geqslant 2)$. Тогда слово

$$a_{j_1} \dots a_{j_{l-1}} q_i a_{j_l} \dots a_{j_s} \tag{2}$$

называется *конфигурацией машины* (в данный момент t). При $l = 1$ конфигурация имеет вид $q i a_{j_1} \dots a_{j_s}$. Если в момент t головка обо-

зревает пустую ячейку, находящуюся слева (справа) от слова P, и между этой ячейкой и первой (соответственно последней) ячейкой слова P расположено $v \geqslant 0$ пустых ячеек, то *конфигурацией машины в момент* t называется слово

$$q_i \underbrace{\Lambda \ldots \Lambda}_{v+1 \text{ раз}} a_{j_1} \ldots a_{j_s} \tag{3}$$

(соответственно слово $a_{j_1} \ldots a_{j_s} \underbrace{\Lambda \ldots \Lambda}_{v \text{ раз}} q_i \Lambda$), где через Λ обозначен пустой символ алфавита A. Если в момент t лента пуста, т.е. на ней записано *пустое слово*, состоящее только из пустых символов внешнего алфавита, то конфигурацией машины в момент t будет слово $q_i\Lambda$.

Пусть в момент t конфигурация машины имеет вид (2) и в программе машины содержится команда

$$q_i a_{j_l} q_{ij_l} a_{ij_l} d_{ij_l}.$$

Тогда при $d_{ij_l} = L$ в следующий момент времени конфигурацией машины будет слово:

а) $q_{ij_1} \Lambda a_{ij_1} a_{j_2} \ldots a_{j_s}$, если $l = 1$;

б) $q_{ij_2} a_{j_1} a_{ij_2} a_{j_3} \ldots a_{j_s}$, если $l = 2$;

в) $a_{j_1} \ldots a_{j_{l-2}} q_{ij_l} a_{j_{l-1}} a_{ij_l} a_{j_{l+1}} \ldots a_{j_s}$, если $l > 2$.

Случаи, когда $d_{ij_l} = R$ или $d_{ij_l} = S$, или когда либо конфигурация машины соответствует головке, находящейся вне слова P (как в словах (3) и (3′)), либо слово P пустое, описываются аналогично.

Если в программе машины нет пятерки вида (1) для пары (q_i, a_j) или «новое» состояние q_{ij_l} является *заключительным*, то машина прекращает работу, а «результирующая» конфигурация называется *заключительной*. Конфигурация, соответствующая началу работы машины, называется *начальной*.

Пусть в некоторый момент времени конфигурация машины была K, а в следующий момент она есть K'. Тогда конфигурация K' называется *непосредственно выводимой из* K (обозначение $K \models K'$). Если K_1 — начальная конфигурация, то последовательность K_1, $K_2, \ldots, K_m$, где $K_i \models K_{i+1}$ при $1 \leqslant i \leqslant m-1$, называется *тьюринговым вычислением*. При этом говорят, что конфигурация K_m *выводима из* конфигурации K_1, и пишут $K_1 \vdash K_m$. Если K_m является к тому же заключительной конфигурацией, то говорят, что K_m *заключительно выводима из* K_1, и пишут $K_1 \vdash\!\!\cdot\ K_m$.

Пусть машина Тьюринга T начинает работать в некоторый (начальный) момент времени. Слово, записанное в этот момент на ленте, называется *исходным* или *начальным*. Чтобы машина T действительно начала работать, необходимо поместить считывающую головку против какой-либо ячейки на ленте и указать, в каком состоянии машина T находится в начальный момент,

Если P_1 — исходное слово, то машина T, начав работу «на слове» P_1, либо остановится через определенное число шагов, либо ни-

когда не остановится. В первом случае говорят, что машина T *применима к слову* P_1 и результатом применения машины T к слову P_1 является слово P, соответствующее заключительной конфигурации (обозначение $P = T(P_1)$). Во втором случае говорят, что машина T *не применима к слову* P_1.

В дальнейшем мы будем предполагать, если не оговаривается противное, что: 1) исходное слово непустое, 2) в начальный момент головка находится против самой левой непустой ячейки на ленте и 3) машина начинает работу, находясь в состоянии q_1.

Зоной работы машины T (на слове P_1) называется множество всех ячеек, которые за время работы машины хотя бы один раз обозреваются головкой.

Часто будет использоваться обозначение $[P]^m$ для слов вида $PP\ldots P$ (m раз), где $m \geqslant 0$; при $m = 0$ считаем, что $[P]^m$ — пустое слово; если $P = a$ — слово длины 1, то вместо $aa\ldots a$ (m раз) и $[a]^m$ будем писать a^m.

Через W будем обозначать произвольное конечное слово во внешнем алфавите машины Тьюринга (в частности, пустое, т. е. состоящее из пустых символов внешнего алфавита).

При описании работы машины Тьюринга «на языке конфигураций» будут использоваться выражения, аналогичные такому:

$$q_1 1^x 0 1^y 0 W \vdash 1^y 0 q_0 W,$$

$x \geqslant 1$ и $y \geqslant 1$. Приведенное выражение надо понимать так: машина «стирает» слово 1^x и останавливается на первой букве слова W; если же W — пустое слово, то «останов» происходит на втором 0 (нуле) после слова 1^y.

Машины Тьюринга T_1 и T_2 называются *эквивалентными* (в алфавите A), если для всякого входного слова P (в алфавите A) выполняется соотношение $T_1(P) \simeq T_2(P)$, означающее следующее: результаты $T_1(P)$ и $T_2(P)$ определены или не определены одновременно (т. е. машины T_1 и T_2 либо обе применимы, либо обе не применимы к слову P) и, если эти результаты определены, $T_1(P) = T_2(P)$. Символ $\simeq$ называется *знаком условного равенства.*

Пример 1. Выяснить, применима ли машина Тьюринга T, задаваемая программой П, к слову P. Если применима, то выписать результат применения машины T к слову P (считается, что q_1 — начальное состояние и в начальный момент головка машины обозревает самую левую единицу на ленте):

$$\text{П:} \begin{cases} q_1 0 q_2 1 R \\ q_1 1 q_1 0 L \\ q_2 0 q_3 1 R \\ q_2 1 q_3 0 L \\ q_3 0 q_1 0 R \end{cases}$$

а) $P = 10^3 1$; б) $P = [10]^2 1$.

Р е ш е н и е. а) Исходя из конфигурации $q_1 10^3 1$ получаем последовательно такие конфигурации: $q_1 0^5 1$, $1q_2 0^4 1$, $1^2 q_3 0^3 1$, $1^2 0 q_1 0^2 1$, $1^2 01 q_2 01$, $1^2 01^2 q_3 1$. Так как команды вида $q_3 1 q_i \alpha D$ в программе П нет, то последняя конфигурация (т. е. $1^2 01^2 q_3 1$) заключительная. Следовательно, машина T к слову $P = 10^3 1$ применима, и $T(P) = 1^2 01^3$.

б) Выписывая конфигурации, имеем $q_1[10]^2 1$, $q_1 0^3 101$, $1q_2 0^2 101$, $1^2 q_3[01]^2$, $1^2 0 q_1 101$, $1^2 q_1 0^3 1$, $1^3 q_2 0^2 1$, $1^4 q_3 01$, $1^4 0 q_1 1$, $1^4 a_1 0$, $1^5 q_2 0$, $1^6 q_3 0$, $1^6 0 q_1 0$, $1^6 01 q_2 0$, $1^6 01^2 q_3 0$, $1^6 01^2 0 q_1 0$, $1^6 01^2 01 q_2 0$, $1^6 01^2 01^2 q_3 0$ и т. д. Ясно, что этот процесс продолжается неограниченно. Значит, машина T к слову $P = [10]^2 1$ не применима.

П р и м е р 2. Построить в алфавите $\{0, 1\}$ машину Тьюринга, которая применима к словам вида $1^{2m+1} 01^{2n+1}$ ($m \geqslant 0$ и $n \geqslant 0$) и $1^{2m} 01^{2n}$ ($m \geqslant 1$ и $n \geqslant 1$) но не применима к словам вида $1^{2m} 01^{2n-1}$ и $1^{2n-1} 01^{2m}$ ($m \geqslant 1$ и $n \geqslant 1$). (К словам иного вида машина может быть как применима, так и не применима.)

Р е ш е н и е. Предполагаем, что q_1 — начальное состояние, q_0 — заключительное состояние и в начальный момент головка машины обозревает самую левую единицу на ленте. Попытаемся реализовать в «конструируемой» машине следующую идею: машина «запоминает», четным или нечетным является число единиц в первом единичном массиве слова, и затем «сравнивает» эту характеристику с такой же характеристикой второго единичного массива.

Пара команд $q_1 1 q_2 1 R$ и $q_2 1 q_1 1 R$ позволяет «выяснить» четность-нечетность числа единиц в первом единичном массиве: если на «промежуточном» нуле головка оказывается в состоянии q_1, то число единиц в первом единичном массиве четное, а если она оказывается в состоянии q_2, то число единиц в этом массиве нечетное. Проходя промежуточный нуль, нужно «запомнить», четное или нечетное число единиц было в первом массиве, чтобы после прохождения второго единичного массива в случае совпадения «четностей» числа единиц в двух массивах машина остановилась, а в ином случае не остановилась.

Поэтому оба состояния q_1 и q_2 «сменим»: рассмотрим команды $q_1 0 q_3 0 R$ и $q_2 0 q_4 0 R$.

Второй единичный массив будем «просматривать» с помощью состояний q_3 и q_4: $q_3 1 q_4 1 R$, $q_4 1 q_3 1 R$. Если первый единичный массив «четный», то просмотр второго единичного массива будет начат в состоянии q_3. В случае, когда второй массив тоже четный, на первый нуль за этим массивом головка «выйдет» в состоянии q_3, и машина должна остановиться.

Значит, можно взять команду вида $q_3 0 q_0 \alpha D$ ($\alpha \in \{0, 1\}$ и $D \in \{S, L, R\}$) либо не включать в программу ни одной команды, начинающейся с символов q_3 и 0.

Если же первый единичный массив четный, а второй нечетный, то на первый нуль после второго массива головка выйдет в состоянии q_4, и машина не должна остановиться. Поэтому берем команду $q_4 0 q_4 0 S$. Аналогично рассматривается случай с нечетным первым единичным массивом.

Подходящая машина задается программой

$$\begin{array}{ll} q_1 1 q_2 1 R & q_3 1 q_4 1 R \\ q_2 1 q_1 1 R & q_4 1 q_3 1 R \\ q_1 0 q_3 0 R & q_4 0 q_4 0 S \\ q_2 0 q_4 0 R & \end{array}$$

1.1. Выяснить, применима ли машина Тьюринга T, задаваемая программой П, к слову P. Если применима, то выписать результат применения машины T к слову P. Предполагается, что q_1 — начальное состояние, q_0 — заключительное состояние и в начальный момент головка машины обозревает самую левую единицу на ленте:

1) П: $\begin{cases} q_1 0 q_1 0 R \\ q_1 1 q_2 0 R \\ q_2 1 q_1 0 R \\ q_2 0 q_0 1 S \end{cases}$ а) $P = 1^3 01$; б) $P = 1^2 0^2 1$; в) $P = 1^6$;

2) П: $\begin{cases} q_1 0 q_2 1 L \\ q_1 1 q_2 1 R \\ q_2 1 q_1 1 R \end{cases}$ а) $P = 1^2 0^2 1$; б) $P = 1^6$; в) $P = 1^2 01^3$;

3) П: $\begin{cases} q_1 0 q_2 1 R \\ q_1 1 q_2 1 L \\ q_2 0 q_3 1 R \\ q_2 1 q_3 0 R \\ q_3 1 q_1 1 R \end{cases}$ а) $P = 1^3 01^2$; б) $P = 1^5$; в) $P = 1^2 [01]^2$;

4) П: $\begin{cases} q_1 0 q_1 1 R \\ q_1 1 q_2 0 R \\ q_2 0 q_1 1 R \\ q_2 1 q_3 1 L \\ q_3 0 q_1 1 L \end{cases}$ а) $P = [10]^2 1$; б) $P = 10^2 1^2$; в) $P = 10^3 1$;

5) П: $\begin{cases} q_1 0 q_2 1 R \\ q_1 1 q_2 1 R \\ q_2 0 q_3 0 R \\ q_2 1 q_1 0 L \\ q_3 0 q_2 1 S \\ q_3 1 q_0 0 L \end{cases}$ а) $P = 1^2$; б) $P = 1^2 0^2 1$; в) $P = 10^4 1$.

1.2. Построить в алфавите $\{0, 1\}$ машину Тьюринга, обладающую следующими свойствами (предполагается, что в начальный момент головка обозревает самый левый символ слова, и в качестве пустого символа берется 0):

1) машина имеет одно состояние, одну команду и применима к любому слову в алфавите $\{0, 1\}$;

2) машина имеет две команды, не применима ни к какому слову в алфавите $\{0, 1\}$ и зона работы на каждом слове бесконечная;

3) машина имеет две команды, не применима ни к какому слову в алфавите $\{0, 1\}$ и зона работы на любом слове ограничена одним и тем же числом ячеек, не зависящим от выбранного слова;

4) машина имеет три команды, применима к словам $10^{2n}1$ $(n \geqslant 1)$ и не применима к словам $10^{2n+1}1$ $(n \geqslant 0)$;

5) машина имеет пять команд, применима к словам 1^{3n} $(n \geqslant 1)$ и не применима к словам $1^{3n+\alpha}$ $(\alpha = 1, 2$ и $n \geqslant 0)$;

6) машина применима к словам 1^n01^n, где $n \geqslant 1$, и не применима к словам 1^m01^n, где $m \neq n$, $m \geqslant 1$ и $n \geqslant 1$.

1.3. По заданной машине Тьюринга T и начальной конфигурации K_1 найти заключительную конфигурацию (q_0 — заключительное состояние):

1) T: $\begin{cases} q_1 0 q_2 1 R \\ q_1 1 q_2 0 L \\ q_2 0 q_0 1 S \\ q_2 1 q_1 1 L \end{cases}$ а) $K_1 = 1^2 01 q_1 1^2$; б) $K_1 = 101 q_1 01^2$;

2) T: $\begin{cases} q_1 0 q_1 1 L \\ q_1 1 q_2 1 R \\ q_2 1 q_1 0 R \\ q_2 0 q_0 0 L \end{cases}$ а) $K_1 = 1 q_1 01^3$; б) $K_1 = 1 q_1 1^4$;

3) T: $\begin{cases} q_1 0 q_2 0 L \\ q_1 1 q_1 0 R \\ q_2 0 q_2 1 L \\ q_2 1 q_0 0 R \end{cases}$ а) $K_1 = 10^3 q_1 01$; б) $K_1 = 1^2 q_1 1^3 01$;

4) T: $\begin{cases} q_1 0 q_0 1 S \\ q_1 1 q_2 0 R \\ q_2 0 q_1 0 R \\ q_2 1 q_2 1 L \end{cases}$ а) $K_1 = 1^2 q_1 1^3 01$; б) $K_1 = 1 q_1 1^4$;

5) T: $\begin{cases} q_1 0 q_0 0 S \\ q_1 1 q_2 1 R \\ q_2 0 q_0 1 L \\ q_2 1 q_3 0 R \\ q_3 0 q_1 1 L \\ q_3 1 q_1 0 R \end{cases}$ а) $K_1 = 1 q_1 1^5$; б) $K_1 = q_1 1^3 01$; в) $K_1 = 10 q_1 1^4$.

1.4. Построить в алфавите $\{0, 1\}$ машину Тьюринга, переводящую конфигурации K_1 в конфигурации K_0:

1) $K_1 = q_1 1^n$, $K_0 = q_0 1^n 01^n$ $(n \geqslant 1)$;

2) $K_1 = q_1 0^n 1^n$, $K_0 = q_0 [01]^n$ $(n \geqslant 1)$;

3) $K_1 = 1^n q_1 0, \quad K_0 = q_0 1^{2n} \quad (n \geqslant 1)$;

4) $K_1 = 1^n q_1 0 1^m, \quad K_0 = 1^m q_0 0 1^n \quad (m \geqslant 1,\ n \geqslant 1)$.

1.5. 1) Показать, что для всякой машины Тьюринга существует эквивалентная ей машина, в программе которой отсутствует символ S.

2) Показать, что по всякой машине Тьюринга можно построить эквивалентную ей машину, в программе которой не содержится заключительных состояний.

1.6. Показать, что для всякой машины Тьюринга T в алфавите A существует счетно-бесконечное множество эквивалентных ей машин $T_1, T_2, \ldots, T_m, \ldots$ в том же алфавите A, отличающихся друг от друга своими программами.

1.7. Сколько существует неэквивалентных машин Тьюринга в алфавите $\{0, 1\}$, программы которых содержат только по одной команде?

1.8. По словесному описанию машины Тьюринга построить ее программу (в алфавите $\{0, 1\}$).

1) Начав работу с последней единицы массива из единиц, машина «сдвигает» его на одну ячейку влево, не изменяя «остального содержимого» ленты. Головка останавливается на первой единице «перенесенного» массива.

2) Начав двигаться вправо от какой-то «начальной» ячейки, головка «находит» первую при таком перемещении ячейку с единицей (если такая ячейка «встретится на пути») и, сделав «один шаг» вправо, останавливается на соседней ячейке. Если в «начальной» ячейке записана единица, то головка останавливается на соседней справа ячейке. Содержимое ленты не меняется.

3) Машина начинает работу с самой левой непустой ячейки и отыскивает единицу, примыкающую с левой стороны к первому слева массиву из трех нулей («окаймленному» единицами). Головка останавливается на найденной единице (если такая есть). Содержимое ленты не меняется.

4) При заданном $l \geqslant 1$ головка машины, начав работу с произвольной ячейки, содержащей единицу, двигается вправо до тех пор, пока не пройдет подряд $l + 1$ нулей. Головка останавливается на первой ячейке за этими $l + 1$ нулями, напечатав в ней 1. Остальное содержимое ленты не меняется.

5) При заданном $l \geqslant 1$ головка машины, начав работу с какой-то ячейки и двигаясь вправо, ставит подряд $2l$ единиц и останавливается на последней из них.

6) При заданном $l \geqslant 1$ головка машины, двигаясь вправо от какой-либо пустой ячейки, находит первый при таком перемещении массив, содержащий не менее l единиц, стирает в нем первые l единиц и останавливается на самой правой из ячеек, в которых были стертые единицы. Остальное содержимое ленты не меняется.

2. Операции над машинами Тьюринга. Пусть машины T_1 и T_2 имеют соответственно программы Π_1 и Π_2. Предположим, что внутренние алфавиты этих машин не пересекаются и что q_0' — некоторое заключительное состояние машины T_1, а q_1'' — какое-либо начальное состояние машины T_2. Заменим всюду в программе Π_1 состояние q_0' на состояние q_1'' и полученную программу объединим с программой Π_2. Новая программа Π определяет машину T, называемую *композицией машин* T_1 *и* T_2 (по паре состояний (q_0', q_1'')) и обозначаемую через $T_1 \circ T_2$ или T_1T_2 (более подробно: $T = T(T_1, T_2, (q_0', q_1''))$). Внешний алфавит композиции T_1T_2 является объединением внешних алфавитов машин T_1 и T_2.

Пусть q' — некоторое заключительное состояние машины T, а q'' — какое-либо состояние машины T, не являющееся заключительным. Заменим всюду в программе Π машины T символ q' на q''. Получим программу Π', определяющую машину $T'(q', q'')$. Машина T' называется *итерацией машины* T (по паре состояний (q', q'')).

Пусть машины Тьюринга T_1, T_2 и T_3 задаются программами Π_1, Π_2 и Π_3 соответственно. Считаем, что внутренние алфавиты этих машин попарно не пересекаются. Пусть q_0' и q_0'' — какие-либо различные заключительные состояния машины T_1. Заменим всюду в программе Π_1 состояние q_0' некоторым начальным состоянием q_1' машины T_2, а состояние q_0'' некоторым начальным состоянием q_1'' машины T_3. Затем новую программу объединим с программами Π_2 и Π_3. Получим программу Π, задающую машину Тьюринга $T = T(T_1, (q_0', q_1'), T_2, (q_0'', q_1''), T_3)$. Эта машина называется *разветвлением машин* T_2 *и* T_3, *управляемым машиной* T_1.

При задании сложных машин Тьюринга часто применяют так называемую *операторную запись алгоритма*, которая представляет собой строку, состоящую из символов, обозначающих машины, символов перехода $\left(\text{вида } \underset{k}{|q'} \text{ и } \underset{k}{q''|}\right)$, а также символов α и ω, служащих для обозначения соответственно начала и окончания работы алгоритма. В операторной записи (некоторого алгоритма) выражение $T_i \underset{k}{|q_{i0}} T_j \ldots T_m \underset{k}{q_{n1}|} T_n$ обозначает разветвление машин T_j и T_n, управляемое машиной T_i, причем заключительное состояние q_{i0} машины T_i заменяется начальным состоянием q_{n1} машины T_n, а всякое другое заключительное состояние машины T_i заменяется начальным состоянием машины T_j (одним и тем же). Если машина T_i имеет одно заключительное состояние, то символы $\underline{|q_{i0}}$ и $\underline{q_{n1}|}$ служат для обозначения безусловного перехода. Там, где не могут возникнуть недоразумения, символы q_{i0} и q_{n1} опускаются.

Пример 3. Операторная схема

$$\underset{2}{|}\,\underset{1}{|}\, T_1 \alpha T_2 \underset{1}{|q_{20}}\, T_3 \underset{2}{|q_{30}}\, T_4 \omega$$

описывает следующий «процесс вычисления». Начинает работу машина T_2. Если она заканчивает работу в состоянии q_{20}, то начинает

работать машина T_1, а по окончании работы машины T_1 вновь «выполняет работу» машина T_2. Если же машина T_2 останавливается в некотором заключительном состоянии, отличном от q_{20}, то «работу продолжает» машина T_3. Если T_3 приходит в заключительное состояние q_{30}, то начинает работу машина T_1; если же T_3 заканчивает работу в некотором заключительном состоянии, отличном от q_{30}, то «работу продолжает» машина T_4. Если машина T_4 когда-либо остановится, то процесс вычисления на этом заканчивается.

1.9. Построить композицию T_1T_2 машин Тьюринга T_1 и T_2 по паре состояний (q_{10}, q_{21}) и найти результат применения композиции T_1T_2 к слову P (q_{20} — заключительное состояние машины T_2):

1) T_1:

	q_{11}	q_{12}
0	$q_{12}0R$	$q_{10}1L$
1	$q_{12}1R$	$q_{11}0R$

, T_2:

	q_{21}	q_{22}
0	$q_{22}1R$	$q_{21}1R$
1	$q_{21}0L$	$q_{20}1S$

:

а) $P = 1^3 0^2 1^2$; б) $P = 1^4 01$;

2) T_1:

	q_{11}	q_{12}	q_{13}
0	$q_{10}0L$	$q_{13}0R$	$q_{11}0R$
1	$q_{12}1R$	$q_{13}1R$	$q_{11}0R$

, T_2:

	q_{21}	q_{22}
0	$q_{22}1L$	$q_{20}0R$
1	$q_{22}1L$	$q_{21}0L$

:

а) $P = 1^4 0^2 1^3 01^2$; б) $P = 1^2[01]^2 1^2$.

1.10. Найти результат применения итерации машины T по паре состояний (q_0, q_i) к слову P (заключительными состояниями являются q_0 и q_0'):

1) $i = 1$, T:

	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5
0	$q_0 0S$	$q_4 0S$	$q_5 0S$	$q_4 1R$	$q_0' 1L$
1	$q_2 0R$	$q_3 0R$	$q_1 0R$	—	—

:

а) $P = 1^{3k}$; б) $P = 1^{3k+1}$; в) $P = 1^{3k+2}$ $(k \geqslant 1)$;

2) $i = 1$, T:

	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6
0	$q_0' 0R$	$q_0' 0R$	$q_4 0R$	$q_5 1L$	$q_6 0L$	$q_0 0R$
1	$q_2 0R$	$q_3 0R$	$q_3 1R$	$q_4 1R$	$q_5 1L$	$q_6 1L$

:

а) $P = 1^{2x}$; б) $P = 1^{2x+1}$ $(x \geqslant 1)$;

3) $i = 3$, T:

	q_1	q_2	q_3	q_4	q_5	q_6
0	$q_2 0L$	$q'_0 1S$	$q_4 0R$	$q_5 1L$	$q_6 0L$	$q_2 0R$
1	$q_1 2R$	$q_2 1R$	$q_3 1R$	$q_4 1R$	$q_5 1L$	$q_6 1L$
2	—	$q_3 1R$	—	—	—	$q_0 1R$

:

$P = 1^x 01^y$ $(x \geqslant 1,\ y \geqslant 1)$.

1.11. Найти результат применения машины $T = T(T_1, (q'_{10}, q_{21}), T_2, (q''_{10}, q_{31}), T_3)$ к слову P (q_{20} — заключительное состояние машины T_2, а q_{30} — заключительное состояние машины T_3):

1) T_1:

	q_{11}	q_{12}
0	$q_{12}0R$	$q'_{10}0R$
1	$q_{12}1R$	$q''_{10}1L$

, T_2:

	q_{21}
0	$q_{20}1S$
1	$q_{21}0R$

, T_3:

	q_{31}	q_{32}
0	$q_{32}1L$	$q_{30}1S$
1	$q_{31}1R$	$q_{32}0L$

:

а) $P = 101^3$; б) $P = 1^3 01$;

2) T_1:

	q_{11}	q_{12}	q_{13}
0	$q_{12}0R$	$q'_{10}0L$	$q''_{10}0R$
1	$q_{11}1R$	$q_{13}1R$	$q_{13}1R$

,

T_2:

	q_{21}	q_{22}
0	$q_{22}0L$	$q_{20}1R$
1	$q_{21}1L$	$q_{22}0L$

, T_3:

	q_{31}	q_{32}
0	$q_{32}0$	$q_{30}1S$
1	$q_{31}1R$	$q_{31}1R$

:

а) $P = 1^x 0^2 1$ $(x \geqslant 1)$; б) $P = 1^x 0101^y 01^z$ $(x \geqslant 1,\ y \geqslant 1,\ z \geqslant 1)$.

1.12. Используя машины T_1, T_2, T_3, T_4 и T_5, построить операторную схему алгоритма $\mathfrak{A}$ (здесь q_{10}, q'_{10}, q_{20}, q_{30}, q_{40}, q_{50} и q'_{50} — заключительные состояния соответствующих машин):

T_1:

	q_{11}	q_{12}
0	$q_{12}0R$	$q_{10}0R$
1	$q'_{10}0R$	$q_{11}1S$

, T_2:

	q_{21}	q_{22}	q_{23}
0	$q_{22}0R$	$q_{23}1R$	$q_{20}1S$
1	$q_{21}1R$	$q_{22}1R$	—

,

T_3:

	q_{31}	q_{32}	q_{33}
0	$q_{32}0L$	$q_{33}0L$	$q_{33}0R$
1	$q_{31}1L$	$q_{32}1L$	$q_{33}1L$

, T_4:

	q_{41}
0	$q_{40}1S$
1	$q_{41}1R$

, T_5:

	q_{51}	q_{52}
0	—	$q'_{50}1S$
1	$q_{52}1R$	$q_{50}1S$

:

1) $\mathfrak{A}$: $q_1 1^x \vdash q_0 1^{2x}$ $(x \geqslant 0)$; 2) $\mathfrak{A}$: $q_1 1^{x+1} \vdash q_0 1^{3x}$ $(x \geqslant 1)$;

3) $\mathfrak{A}$: $W0q_1 1^{x+1} \vdash W0q_0 1^{2x+1}$ $(x \geqslant 0)$.

1.13. По операторной схеме алгоритма $\mathfrak{A}$ и описанию машин, входящих в нее, построить программу машины T, задаваемой этой схемой, и найти результат применения машины T к слову P:

1) $\mathfrak{A} = \alpha T_1 \underset{1}{|} T_2 T_3 \underset{1}{|q_{30}} \omega$,

T_1:

	q_{11}
0	$q_{10}0L$
1	$q_{11}2R$
2	—

, T_2:

	q_{21}	q_{22}	q_{23}
0	$q_{23}0R$	$q_{23}0R$	$q_{20}1L$
1	$q_{21}1R$	—	$q_{23}1R$
2	$q_{22}1R$	—	—

, T_3:

	q_{31}	q_{32}
0	$q_{32}0L$	$q'_{30}0R$
1	$q_{31}1L$	$q_{32}1L$
2	—	$q_{30}1R$

$$P = 1^x 01^y \quad (x \geqslant 1,\ y \geqslant 1).$$

(начальные состояния машин q_{11}, q_{21} и q_{31}, а заключительные — q_{10}, q_{20}, q_{30} и q'_{30});

2) $\mathfrak{A} = \alpha \underset{2}{|} T_1 T_2 \underset{1}{|q_{20}} T_3 \underset{2}{|q_{30}} \underset{1}{|} \omega$,

T_1:

	q_{11}	q_{12}	q_{13}	q_{14}
0	—	$q_{13}0R$	$q_{14}0L$	—
1	$q_{12}0R$	$q_{12}1R$	$q_{13}1R$	$q_{10}0L$

, T_2:

	q_{21}	q_{22}
0	$q_{22}0L$	$q_{20}1S$
1	$q'_{20}1S$	$q_{22}1L$

,

T_3:

	q_{31}	q_{32}	q_{33}	q_{34}
0	$q_{32}0L$	$q_{33}0R$	$q'_{30}1S$	$q_{30}1R$
1	$q_{31}1L$	$q_{34}1L$	—	$q_{34}1L$

$$P = 1^x 01^y \quad (x \geqslant 1,\ y \geqslant 1)$$

(начальные состояния машин — q_{11}, q_{21} и q_{31}, а заключительные — q_{10}, q_{20}, q'_{20}, q_{30} и q'_{30}).

3. Вычислимые функции. Пусть $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ $(n \geqslant 1)$ — произвольный набор целых неотрицательных чисел. Слово $1^{\alpha_1+1}01^{\alpha_2+1}0 \ldots 01^{\alpha_n+1}$ называется *основным машинным кодом* (или просто *кодом*) набора $\widetilde{\alpha}$ (в алфавите $\{0, 1\}$) и обозначается $k(\widetilde{\alpha})$. В частности, слово $1^{\alpha+1}$ является основным машинным кодом числа α.

В дальнейшем рассматриваются частичные числовые функции. Функция $f(\widetilde{x}^n)$ $(n \geqslant 1)$ называется частичной числовой функцией, если переменные x_i принимают значения из натурального ряда с нулем: $N = \{0, 1, 2, \ldots, m, \ldots\}$, и в том случае, когда на наборе $\widetilde{\alpha}^n = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ функция f определена, $f(\widetilde{\alpha}^n) \in N$.

Частичная числовая функция $f(\widetilde{x}^n)$ называется *вычислимой* (*по Тьюрингу*), если существует машина Тьюринга T_f, обладающая следующими свойствами:

а) если $f(\widetilde{\alpha}^n)$ определено, то $T_f(k(\widetilde{\alpha}^n)) = k(f(\widetilde{\alpha}^n))$;

б) если $f(\widetilde{\alpha}^n)$ не определено, то либо $T_f(k(\widetilde{\alpha}^n))$ не является кодом никакого числа из N, либо машина T_f не применима к слову $k(\widetilde{\alpha}^n)$.

Замечание. В дальнейшем предполагаем, что в начальный момент головка машины обозревает самую левую единицу слова $k(\widetilde{\alpha}^n)$. Известно, что это ограничение не сужает класса вычислимых функций.

Если функция f вычислима по Тьюрингу с помощью машины T_f, то будем говорить, что *машина T_f вычисляет функцию f*.

Говорят, что машина Тьюринга T *правильно вычисляет функцию* $f(\widetilde{x}^n)$, если:

а) в случае, когда $f(\widetilde{\alpha}^n)$ определено, машина T, начав работу с левой единицы кода $k(\widetilde{\alpha}^n)$, останавливается, $T(k(\widetilde{\alpha}^n)) = k(f(\widetilde{\alpha}^n))$ и головка машины в заключительной конфигурации обозревает левую единицу кода $k(f(\widetilde{\alpha}^n))$;

б) в случае, когда $f(\widetilde{\alpha}^n)$ не определено, машина T, начав работу с левой единицы кода $k(\widetilde{\alpha}^n)$, не останавливается.

Справедливо следующее утверждение: *для всякой вычислимой функции существует машина Тьюринга, правильно вычисляющая эту функцию.*

Расстояние между двумя ячейками C и C' ленты равно увеличенному на единицу числу ячеек, расположенных между C и C'. В частности, соседние ячейки ленты находятся друг от друга на расстоянии 1. Пусть l — целое положительное число. Подмножество всех таких ячеек ленты, каждые две из которых расположены друг от друга на расстоянии, кратном l, называется *решеткой с шагом l*. Ленту можно рассматривать как объединение l решеток с шагом l. Пусть $R_{(l)}$ — решетка с шагом l. Две ячейки этой решетки называются *соседними*, если расстояние между ними, рассматриваемое относительно всей ленты, равно l.

Говорят, что слово $P = a_1a_2 \ldots a_m$ *записано на решетке* $R_{(l)}$, если:

символ a_1 записан в некоторой ячейке C_1 этой решетки;

символ a_2 записан в ячейке C_2, которая является соседней к C_1 на решетке $R_{(l)}$ и расположена справа от нее и т. д.;

символ a_m записан в ячейке C_m, отстоящей от ячейки C_1 на расстояние $(m-1)\cdot l$ и расположенной справа от C_1.

Будем говорить, что *машина Тьюринга T_1 моделирует машину Тьюринга T на решетке $R_{(l)}$* (с шагом l), если, каково бы ни было слово P (в алфавите A), выполняется следующее условие: пусть на решетке $R_{(l)}$ записано слово P и в начальный момент головка машины T_1 обозревает самую левую букву слова P; машина T_1 останавливается тогда и только тогда, когда машина T применима к слову P; при этом, если $T(P)$ определено, то после окончания работы машины T_1 на решетке $R_{(l)}$ будет записано слово $T(P)$.

Справедливо следующее утверждение: *для каждой машины Тьюринга T и каждой решетки $R_{(l)}$ с шагом l можно построить машину Тьюринга T_1, моделирующую машину Тьюринга T на решетке $R_{(l)}$.*

Пусть $\widetilde{\alpha}^n = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ $(n \geqslant 1)$ — произвольный набор целых неотрицательных чисел; *l-кратным кодом этого набора* называется слово в алфавите $\{0, 1\}$, имеющее вид $1^{l(\alpha_1+1)}0^l1^{l(\alpha_2+1)}0^l\ldots$ $\ldots0^l1^{l(\alpha_n+1)}$ $(l \geqslant 2)$.

Справедливо утверждение: *для каждого фиксированного целого числа n $(n \geqslant 1)$ существует машина Тьюринга, преобразующая основной код любого набора $\widetilde{\alpha}^n$ в его l-кратный код, а также существует машина Тьюринга, преобразующая l-кратный код всякого набора $\widetilde{\alpha}^n$ в его основной код.*

Решетчатым кодом набора $\widetilde{\alpha}^n = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ $(n \geqslant 1)$ называется слово в алфавите $\{0, 1\}$, записанное на n решетках с шагом n, причем так, что на первой решетке записано слово 1^{α_1+1}, на второй — слово 1^{α_2+1} и т. д., на n-й — слово 1^{α_n+1}; начала слов на решетках должны быть *согласованы*, т. е. самая левая единица на первой решетке непосредственно предшествует (на всей ленте) самой левой единице на второй решетке, а эта единица непосредственно предшествует самой левой единице на третьей решетке и т. д.

Справедливо утверждение: *для всякого фиксированного целого числа n $(n \geqslant 1)$ можно построить машину Тьюринга, преобразующую основной код любого набора $\widetilde{\alpha}^n$ в его решетчатый код, а также можно построить машину Тьюринга, преобразующую решетчатый код всякого набора $\widetilde{\alpha}^n$ в его основной код.*

Пример 4. Для функции $f(x) = 2x - 1$ построить машину Тьюринга, вычисляющую ее, а также машину Тьюринга, правильно вычисляющую эту функцию.

Замечание. Здесь и в дальнейшем при «аналитическом» задании числовых функций используются известные (из математического анализа) «элементарные» функции. При этом «аналитически» заданная функция считается определенной только на таких целочисленных наборах значений переменных (принадлежащих множеству N — натуральному ряду с нулем), на которых определены и принимают

целые неотрицательные значения все «элементарные» функции, входящие в рассматриваемое «формульное задание» определяемой функции. Например, функция $\dfrac{x^2}{3-y/2}$ определена лишь тогда, когда $\dfrac{y}{2}$ — целое неотрицательное число, $3-\dfrac{y}{2}$ — целое положительное число и $\dfrac{x^2}{3-y/2}$ — целое неотрицательное число.

Решение примера 4. Имеем

$$f(x)=\begin{cases}2x-1 & \text{при } x\geqslant 1,\\ \text{не определено} & \text{при } x=0.\end{cases}$$

Нужно построить такую машину Тьюринга T, которая «перерабатывает» любое слово $1^{\alpha+1}$ (при $\alpha\geqslant 1$) в слово $1^{2\alpha}$ и удовлетворяет условию: либо $T(1)$ не определено, либо $T(1)$ не является основным машинным кодом никакого числа из N.

Попытаемся реализовать следующую идею: стирая самую левую единицу в слове $1^{\alpha+1}$ $(\alpha\geqslant 0)$ и проходя оставшееся подслово 1^{α} слева направо, головка пропускает еще одну (пустую) ячейку («разделительный нуль») и печатает две единицы подряд; получается слово $1^{\alpha}01^2$; затем головка возвращается к левой единице подслова 1^{α} (если такая единица есть), вычеркивает ее, проходит новое подслово $1^{\alpha-1}$ слева направо, потом проходит «разделительный нуль» и две ранее напечатанные единицы (справа от него), печатает еще две единицы и опять возвращается к началу «остатка» исходного слова $1^{\alpha+1}$ и т. д.; когда в исходном слове все единицы будут вычеркнуты, а во «вновь формируемом» массиве все единицы будут напечатаны, то на ленте «останется» массив из $2\alpha+2$ единиц; вычеркнем в нем две первые единицы и «процесс вычисления» закончим.

Программа машины Тьюринга T, реализующей описанную идею, выглядит так:

$$\begin{array}{ll}q_1 0 q_4 0R & q_4 1 q_7 0R\\ q_1 1 q_2 0R & q_5 0 q_6 0L\\ q_2 0 q_3 0R & q_5 1 q_5 1L\\ q_2 1 q_2 1R & q_6 0 q_1 0R\\ q_3 0 q_4 1R & q_6 1 q_6 1L\\ q_3 1 q_3 1R & q_7 1 q_0 0R\\ q_4 0 q_5 1L & \end{array}$$

Имеем $T(1^{\alpha+1})=1^{2\alpha}$ при $\alpha\geqslant 1$ и $T(1)=\Lambda$ (пустое слово). Значит, машина T действительно вычисляет заданную функцию $f(x)$, но не является машиной Тьюринга, правильно вычисляющей эту функцию (так как она применима к слову 1, соответствующему значению $x=0$, а на этом значении аргумента функция $f(x)$ не определена). Чтобы из машины T построить машину T', правильно вычисляющую функцию $f(x)$, достаточно удалить из программы машины T команду $q_7 1 q_0 0R$ и добавить команды $q_7 1 q_8 0R$ и $q_8 0 q_8 0S$.

1.14. Построить машину Тьюринга, вычисляющую функцию f:

1) $f(x) = \operatorname{sg} x = \begin{cases} 0, & \text{если } x = 0, \\ 1, & \text{если } x \geqslant 1; \end{cases}$ 2) $f(x) = \overline{\operatorname{sg}}\, x = 1 - \operatorname{sg} x$;

3) $f(x) = x \dot{-} 1 = \begin{cases} 0, & \text{если } x = 0, \\ x - 1, & \text{если } x \geqslant 1; \end{cases}$

4) $f(x) = \left[\frac{1}{x}\right] = \begin{cases} 1, & \text{если } x = 1, \\ 0, & \text{если } x \geqslant 2; \\ \text{не определено}, & \text{если } x = 0; \end{cases}$

5) $f(x) = 3x$; 6) $f(x) = 2^{1-x}$;

7) $f(x) = [x/2] = m$, если $x = 2m$ или $x = 2m + 1$, $m \geqslant 0$;

8) $f(x, y) = x + 2$; 9) $f(x, y) = x \dot{-} y = \begin{cases} 0, & \text{если } x \leqslant y, \\ x - y, & \text{если } x > y; \end{cases}$

10) $f(x, y) = x - y$; 11) $f(x, y) = 2x + y$; 12) $f(x, y) = \dfrac{4 - 2x}{y^2}$.

1.15. Построить машину Тьюринга, правильно вычисляющую функцию f:

1) $f(x) = x \dot{-} 2$; 2) $f(x) = \left[\dfrac{1}{x - 3}\right]$; 3) $f(x) = \dfrac{2}{4 - x}$;

4) $f(x) = x - 5$; 5) $f(x, y) = x + y$; 6) $f(x, y) = \dfrac{x}{2} + y$;

7) $f(x, y) = \dfrac{2 + x}{2 - y}$; 8) $f(x, y) = \dfrac{2 - x}{2\,|3 - y^2|}$.

1.16. По программе машины Тьюринга T записать аналитическое выражение для функций $f(x)$ и $f(x, y)$, вычисляемых машиной T (в качестве начального состояния берется q_1, а в качестве заключительного — q_0):

1) T:

	q_1	q_3
0	$q_2 1L$	$q_0 0R$
1	$q_1 1R$	$q_2 1L$

; 2) T:

	q_1	q_2
0	$q_2 0R$	$q_1 0L$
1	$q_1 1R$	$q_0 0R$

;

3) T:

	q_1	q_2	q_3
0	$q_2 1R$	$q_2 0L$	$q_0 0R$
1	$q_1 0R$	$q_3 1L$	$q_3 1R$

; 4) T:

	q_1	q_2	q_3
0	$q_0 0S$	$q_3 1L$	$q_1 1L$
1	$q_2 1R$	$q_1 0R$	$q_3 1R$

;

5) T:

	q_1	q_2	q_3	q_4
0	q_20R	q_30R	q_01S	q_20R
1	q_20R	q_40R	q_31L	q_41R

;

6) T:

	q_1	q_2	q_3	q_4
0	q_20L	q_30L	—	q_10R
1	q_21R	q_21R	q_40L	q_41L

.

1.17. Какие одноместные функции вычисляются всеми такими машинами Тьюринга в алфавите $\{0, 1\}$, программы которых содержат только по одной команде?

1.18. На решетке с шагом l смоделировать работу машины T, вычисляющей функцию f:

1) $f(x) = x + 2$, $l = 2$; 2) $f(x) = 2 \dot{-} x$, $l = 3$;

3) $f(x) = \dfrac{3}{x+2}$, $l = 4$; 4) $f(x) = 3 - 2x$, $l = 3$;

5) $f(x, y) = 2 - y$, $l = 2$; 6) $f(x, y) = x \cdot \operatorname{sg} y$, $l = 3$;

7) $f(x, y) = x + (y - 1)$, $l = 2$.

1.19. Построить машину Тьюринга, преобразующую один машинный код в другой.

1) Заданный l-кратный код набора преобразуется в решетчатый код ($l \geqslant 2$):

а) $1^l0^l1^{2l}$ (функционирование машины не должно зависеть от значения l);

б) $1^{2l}0^l1^l0^l1^{3l}$ (функционирование машины не должно зависеть от значения l);

в) $1^l0^l1^l0^l \ldots 0^l1^l$ (n массивов единиц, $n \geqslant 1$); рассмотреть два случая:

(1) n фиксировано, l произвольное;

(2) l фиксировано, n произвольное;

г) $1^{l(\alpha+1)}0^l1^l$ (здесь l фиксированное, меняется α, $\alpha \geqslant 0$).

2) Решетчатый код с заданной совокупностью слов, расположенных на соответствующих решетках (1-й, 2-й и т. д.), преобразуется в l-кратный код с указанным значением l:

а) 1, $1^{\alpha+1}$ ($\alpha \geqslant 0$), $l = 2$; б) $1^{\alpha+1}$, 1^2, 1 ($\alpha \geqslant 0$), $l = 2$;

в) $1^{\alpha+1}$, $1^{\alpha+1}$, 1 ($\alpha \geqslant 0$), $l = 3$.

§ 2. Классы вычислимых и рекурсивных функций

1. Операции суперпозиции, примитивной рекурсии и минимизации. Функции, рассматриваемые в этом параграфе, являются частичными числовыми функциями.

Функция $F(x_1, \ldots, x_n) = f(g_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, g_m(x_1, \ldots, x_n))$ называется *суперпозицией функций* f и $g_1, \ldots, g_m$ и иногда обозначается через $S(f^{(m)}; g_1^{(n)}, \ldots, g_m^{(n)})$, причем функция F определена на наборе $\widetilde{\alpha}^n$ тогда и только тогда, когда каждая функция g_i определена на наборе $\widetilde{\alpha}^n$ и, кроме того, функция f определена на наборе $(g_1(\widetilde{\alpha}^n), \ldots, g_m(\widetilde{\alpha}^n))$; в этом случае $F(\widetilde{\alpha}^n) = f(g_1(\widetilde{\alpha}^n), \ldots$ $\ldots, g_m(\widetilde{\alpha}^n))$.

Пусть $g(x_1, \ldots, x_{n-1})$ и $h(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n, x_{n+1})$ — какие-либо две функции, причем $n \geqslant 2$. Определим третью функцию $f(x_1, \ldots$ $\ldots, x_{n-1}, x_n)$ с помощью следующей схемы:

$$\begin{aligned} f(x_1, \ldots, x_{n-1}, 0) &= g(x_1, \ldots, x_{n-1}), \\ f(x_1, \ldots, x_{n-1}, y+1) &= h(x_1, \ldots, x_{n-1}, y, f(x_1, \ldots \\ &\qquad \ldots, x_{n-1}, y)), \quad t \geqslant 0. \end{aligned} \tag{1}$$

Схема (1) называется *схемой примитивной рекурсии для функции* $f(\widetilde{x}^n)$ *по переменной* x_n и задает примитивно рекурсивное описание функции $f(\widetilde{x}^n)$ с помощью функций g и h. Говорят также, что *функция* f *получена из функций* g *и* h *с помощью операции примитивной рекурсии по переменной* x_n; используют обозначение $f = R(g, h)$ и указывают отдельно, по какой переменной ведется рекурсия.

При задании примитивно рекурсивного описания функции $f(x)$, зависящей от одной переменной, схема примитивной рекурсии имеет вид

$$\begin{aligned} f(0) &= a, \\ f(y+1) &= h(y, f(y)), \quad y \geqslant 0, \end{aligned} \tag{2}$$

где a — константа (число из множества $N = \{0, 1, 2, \ldots\}$ — натурального ряда с нулем).

Пусть $f(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n)$ $(n \geqslant 1)$ — некоторая частичная числовая функция. Определим функцию $g(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n)$ следующим образом. Пусть $\alpha^n = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, \alpha_n)$ — произвольный набор целых неотрицательных чисел; рассмотрим уравнение

$$f(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, y) = \alpha_n: \tag{3}$$

а) если уравнение (3) имеет решение $y_0 \in N$ и при всех $y \in N$ таких, что $0 \leqslant y < y_0$, функция $f(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, y)$ определена и ее значения отличны от α_n, то полагаем $g(\widetilde{\alpha}^n) = y_0$;

б) если уравнение (3) не имеет решений в целых неотрицательных числах, то считаем, что $g(\widetilde{\alpha}^n)$ не определено;

в) если y_0 — наименьшее целое неотрицательное решение уравнения (3) и при некотором $y_1 \in N$ и меньшем y_0 значение $f(\alpha_1, \ldots$ $\ldots, \alpha_{n-1}, y_1)$ не определено, то полагаем, что $g(\widetilde{\alpha}^n)$ не определено.

О функции $g(\widetilde{x}^n)$, построенной указанным способом из функции $f(\widetilde{x}^n)$, говорят, что она *получена из функции* $f(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n)$ *с помощью операции минимизации по переменной* x_n (или, короче, *с помощью минимизации по* x_n). Используются следующие обозначения: $g = Mf$ или $g(\widetilde{x}^n) = M_{x_n} f(\widetilde{x}^n)$, или $g(\widetilde{x}^n) = \mu_{x_n}(f(\widetilde{x}^n))$, или $g(\widetilde{x}^n) = \mu_y(f(x_1, \ldots, x_{n-1}, y) = x_n)$.

Замечание. Операции примитивной рекурсии и минимизации можно применять по любым переменным, входящим в функции f, g и h, но всегда нужно указывать, по каким переменным эти операции проводятся.

Простейшими будем называть в дальнейшем следующие функции:

а) $s(x) = x + 1$ (*функция следования*);

б) $o(x) \equiv 0$ (*нулевая функция*);

в) $I_m^n(x_1, \ldots, x_n) = x_m \quad (1 \leqslant m \leqslant n;\ n = 1, 2, \ldots)$ (*селекторная функция* или *функция выбора аргумента*).

Класс $K_{\text{пр}}$ *всех примитивно рекурсивных функций* представляет собой множество всех функций, которые могут быть получены из простейших функций с помощью операций суперпозиции и примитивной рекурсии.

Классом $K_{\text{чр}}$ *всех частично рекурсивных функций* называется множество всех функций, которые могут быть получены из простейших функций с помощью операций суперпозиции, примитивной рекурсии и минимизации.

Замечание. При определении классов $K_{\text{пр}}$ и $K_{\text{чр}}$ предполагается, что при построении каждой конкретной функции соответствующие операции применяются не более чем конечное число раз (некоторые или все операции могут вообще не применяться).

Класс $K_{\text{ор}}$ *всех общерекурсивных функций* представляет собой множество всех всюду определенных частично рекурсивных функций.

Нетрудно показать, что $K_{\text{ор}} \subset K_{\text{чр}}$ (включение строгое). Справедливо также и строгое включение $K_{\text{пр}} \subset K_{\text{ор}}$ (т. е. существуют общерекурсивные функции, не являющиеся примитивно рекурсивными).

Через $K_{\text{в}}$ будем обозначать класс всех частичных числовых функций, *вычислимых* на машинах Тьюринга.

Теорема (о представлении вычислимых функций в специальной форме, аналог теоремы С. К. Клини о нормальной форме частично рекурсивных функций). *Для всякой вычислимой функции* $f(x_1, \ldots, x_n)$ *существуют такие примитивно рекурсивные функции* $\Phi_f(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1})$ *и* $G_f(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1})$, *что*

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \Phi_f(x_1, \ldots, x_m, \mu_y(G_f(x_1, \ldots, x_n, y) = 0)).$$

Здесь $\mu_y(G_f(x_1, \ldots, x_n, y) = 0)$ — минимальное целое неотрицательное решение уравнения $G_f(x_1, \ldots, x_n, y) = 0$ (для каждого набора значений переменных $x_1, \ldots, x_n$); если при заданном наборе $(x_1^0, \ldots, x_n^0)$ решения нет, то $\mu_y(G_f(x_1^0, \ldots, x_n^0, y) = 0)$ не определено.

Справедливо утверждение: *классы* $K_{\text{чр}}$ *и* $K_{\text{в}}$ *совпадают.*

Пример 1. Обосновать примитивную рекурсивность функции $f(x, y) = x + (2 \dot{-} y)$, построив описывающие ее примитивно рекурсивные схемы.

Решение. Запишем схему примитивной рекурсии для функции $f(x, y)$, ведя рекурсию по переменной x:

$$f(0, y) = 2 \dot{-} y = g(y),$$
$$f(x+1, y) = x + 1 + (2 \dot{-} y) = s(f(x, y)) = I_3^3(x, y, s(f(x, y))).$$

Из этой схемы следует, что для описания функции $f(x, y)$ достаточно иметь функцию $g(y) = 2 \dot{-} y$ и функцию $h(x, y, z) = I_3^3(x, y, s(z))$. Очевидно, что функция $h(x, y, z)$ представима в виде суперпозиции простейших функций. Дадим примитивно рекурсивное описание функции $g(y)$. Имеем

$$g(0) = 2 = s(s(0)),$$
$$g(y+1) = h_1(y, g(y)) = 2 \dot{-} (y+1) = 1 \dot{-} y.$$

Значит, $h_1(y, z) = I_1^2(\varphi(y), z)$, где $\varphi(y) = 1 \dot{-} y$.

Следовательно, надо еще построить примитивно рекурсивное описание функции $\varphi(y)$, которая, как нетрудно заметить, есть $\overline{\text{sg}}\, y$. Легко видеть, что

$$\varphi(0) = 1 = s(0),$$
$$\varphi(y+1) = 0.$$

Итак, $f(x, y)$ строится из простейших функций с помощью операций суперпозиции и примитивной рекурсии. Значит, она примитивно рекурсивная функция.

Пример 2. Применить операцию минимизации к функции

$$f(x) = \begin{cases} 3x + 2, & \text{если } x \neq 2, \\ \text{не определено}, & \text{если } x = 2. \end{cases}$$

Результирующую функцию представить в «аналитической» форме.

Решение. Для каждого $x_0 \in N$ ищем минимальное решение уравнения $f(y) = x_0$. Так как множеством значений функции $f(x)$ является множество $\{3n + 2 \mid n \neq 2\} = \{2, 5\} \cup \{11, 14, 17, \ldots, 3n + 2, \ldots\}$, то уравнение $f(y) = x_0$ имеет решения лишь при $x_0 = 2, 5, 11, 14, \ldots$; для всякого такого x_0 решение единственное $\left(\text{оно равно } \dfrac{x_0 - 2}{3}\right)$.

Принимая во внимание, что функция $f(x)$ при $x = 2$ не определена, заключаем: найденные решения, превосходящие 2, т. е. 3, 4, ..., не являются допустимыми (см. п. в) определения операции минимизации). Итак, функция $g(x) = \mu_x f(x)$ определена только при $x = 2$ и $x = 5$; $g(2) = 0$, $g(5) = 1$.

В качестве «аналитической» записи функции $g(x)$ можно взять формулу $\dfrac{x-2}{3} + \overline{\text{sg}}\,(6 - x)$ (ибо функция $\dfrac{x-2}{3}$ определена только при $x = 2, 5, 8, 11, \ldots, 3n + 2, \ldots$, а функция $\overline{\text{sg}}\,(6 - x)$ — только для $x \leqslant 6$, причем $\overline{\text{sg}}\,(6 - 2) = \overline{\text{sg}}\,(6 - 5) = 0$).

2.1. Используя в качестве исходных функций только константы и простейшие функции, построить примитивно рекурсивные схемы, описывающие следующие функции:

1) $\operatorname{sg} x$; 2) $\overline{\operatorname{sg}}\, x$; 3) $x + y$; 4) nx, где $n \geqslant 2$ и натуральное;

5) $x \dot{-} 1$; 6) $x \dot{-} y$; 7) $x \cdot y$; 8) x^2; 9) $x^2 + 2y^2$;

10) $x! = \begin{cases} 1, & \text{если } x = 0, \\ 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot x, & \text{если } x \geqslant 1; \end{cases}$ 11) $\left[\frac{x}{2}\right]$;

12) $x \oplus y = \begin{cases} 0, & \text{если } x + y \text{ четное}, \\ 1, & \text{если } x + y \text{ нечетное}, \end{cases}$ (сумма) по модулю 2).

2.2. Применяя операцию примитивной рекурсии к функциям $g(x)$ и $h(x, y, z)$ по переменной y, построить функцию $f(x, y) = R(g, h)$, записав ее в «аналитической» форме:

1) $g(x) = x$, $h(x, y, z) = x + z$; 2) $g(x) = x$, $h(x, y, z) = x + y$;

3) $g(x) = 2^x$, $h(x, y, z) = 2^x \cdot z$; 4) $g(x) = 3^x$, $h(x, y, z) = 3^y \cdot z$;

5) $g(x) = 1$, $h(x, y, z) = x \dot{-} y$; 6) $g(x) = 2$, $h(x, y, z) = z \dot{-} x$;

7) $g(x) = 2x$, $h(x, y, z) = \begin{cases} y, & \text{если } x \geqslant y, \\ 0, & \text{если } x < y; \end{cases}$

8) $g(x) = \operatorname{sg} x$, $h(x, y, z) = x \cdot \operatorname{sg} y + z \cdot \overline{\operatorname{sg}}\, x$.

2.3. Доказать примитивную рекурсивность следующих функций, используя простейшие функции и функции $\operatorname{sg} x$, $\overline{\operatorname{sg}}\, x$, $x + y$, $x \dot{-} y$, $x \cdot y$, $x \oplus y$ (сумма по модулю 2; см. задачу 2.1, 12)):

1) $|x - y|$; 2) $\min(x, y)$; 3) $\max(x, y)$; 4) $x^2 \cdot y^2 \oplus z^3$;

5) $\left[\frac{x}{y}\right] = \begin{cases} x, & \text{если } y = 0, \\ \text{целая часть от деления } x \text{ на } y, & \text{если } y \geqslant 1; \end{cases}$

6) a^x, где $a \geqslant 2$ и натуральное;

7) $f_{a,i}(x) = \begin{cases} a, & \text{если } x = i, \\ x & \text{в ином случае}, \end{cases}$ a, i — какие-либо числа из N;

8) $f(x) = \begin{cases} a_i, & \text{если } x = i,\ i = 0, 1, \ldots, m, \\ c & \text{в ином случае}, \end{cases}$

здесь $a_0, a_1, \ldots, a_m$, c — какие-либо числа из N;

9) $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \text{ четном}, \\ x & \text{при } x \text{ нечетном}; \end{cases}$

10) $f_m(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x = lm,\ l = 0, 1, 2, \ldots, \\ 0 & \text{в ином случае}, \end{cases}$

$m \geqslant 2$ и натуральное;

11) $[\sqrt{x}\,]$.

2.4. 1) Доказать, что если функция $g(x)$ примитивно рекурсивна, то всюду определенная функция $f(x)$, отличающаяся от $g(x)$ только в конечном числе точек, является примитивно рекурсивной.

2) Пусть $g_1(x)$ и $g_2(x)$ — примитивно рекурсивные функции. Доказать, что функция

$$f(x) = \begin{cases} g_1(x), & \text{если } a \leqslant x \leqslant b, \\ g_2(x) & \text{в ином случае,} \end{cases}$$

где $0 \leqslant a \leqslant b$ $(a \in N,\ b \in N)$, примитивно рекурсивна.

3) Показать, что если функции $g(y)$, $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$ и $\varphi_3(x)$ примитивно рекурсивны, то функция

$$f(x, y) = \begin{cases} \varphi_1(x), & \text{если } g(y) \leqslant a, \\ \varphi_2(x), & \text{если } a < g(y) \leqslant b, \\ \varphi_3(x), & \text{если } g(y) > b, \end{cases}$$

где $0 \leqslant a \leqslant b$ $(a \in N,\ b \in N)$, примитивно рекурсивна. Условия, наложенные на функцию $g(y)$, надо понимать так: рассматриваются все такие значения y, при которых функция $g(y)$ удовлетворяет указанному соотношению.

4) Пусть $g_1(x)$, $g_2(x)$ и $g_3(x, y)$ — примитивно рекурсивные функции. Доказать, что тогда примитивно рекурсивна и функция $f(x, y)$, определяемая следующей схемой:

$$f(0, y) = g_1(y),$$
$$f(x + 1, 0) = g_2(x),$$
$$f(x + 1, y + 1) = g_3(x, y)$$

(здесь $x \geqslant 0$ и $y \geqslant 0$).

5) Пусть функция $g(x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n)$ $(n \geqslant 1)$ примитивно рекурсивная. Доказать, что следующие функции примитивно рекурсивны:

а) $f_1(\widetilde{x}^n) = \sum\limits_{i=0}^{x_n} g(x_1, \ldots, x_{n-1}, i)$;

б) $f_2(\widetilde{x}^n) = \sum\limits_{i=0}^{x_n} g(x_1, \ldots, x_{n-1}, i)$.

6) Доказать, что функция $f(x)$, определяемая соотношениями $f(0) = 1$, $f(1) = 2$, $f(m + 2) = 3f(m + 1) \dot{-} 2f(m)$ $(m \geqslant 0)$, является примитивно рекурсивной.

7) Доказать, что следующие функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ примитивно рекурсивные:

а) $f_1(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x = a^l \quad (l = 0, 1, 2, \ldots), \\ 0 & \text{в ином случае,} \end{cases}$

$a \geqslant 2$ и натуральное;

б) $f_2(x) = [\log_a (x + 1)]$, $a \geqslant 2$ и натуральное.

2.5. Применить операцию минимизации к функции f по переменной x_i (результирующую функцию представить в «аналитической» форме):

1) $f(x_1) = 3,\ i = 1$; 2) $f(x_1) = x_1 + 2,\ i = 1$;
3) $f(x_1) = x_1 \dot{-} 2,\ i = 1$; 4) $f(x_1) = x_1 - 2,\ i = 1$;
5) $f(x_1) = 2x_1 + 1,\ i = 1$; 6) $f(x_1) = 2x_1 \dot{-} 1,\ i = 1$;
7) $f(x_1) = \left[\frac{x_1}{2}\right],\ i = 1$; 8) $f(x_1) = \frac{x_1}{2},\ i = 1$;
9) $f(x_1) = \left[\frac{x_1}{2}\right] - \left[\frac{x_1}{3}\right],\ i = 1$; 10) $f(x_1, x_2) = I_1^2(x_1, x_2),\ i = 2$;
11) $f(x_1, x_2) = x_1 \dot{-} x_2,\ i = 1, 2$;
12) $f(x_1, x_2) = \operatorname{sg}(x_1 \dot{-} 2x_2),\ i = 1$;
13) $f(x_1, x_2) = x_1 \dot{-} 1/x_2,\ i = 1, 2$;
14) $f(x_1, x_2) = 2^{x_1}(2x_2 + 1),\quad i = 1, 2$;
15) $f(x_1) = \begin{cases} x_1 + 1, & \text{если } x_1 = 0, 1, 2, \\ \text{не определено}, & \text{если } x_1 = 3, \\ x_1 - 4, & \text{если } x_1 \geqslant 4, \end{cases} \quad i = 1.$

2.6. Найти примитивно рекурсивную функцию (если она существует), из которой однократным применением операции минимизации можно получить частично рекурсивную функцию f:

1) $f(x_1) = 2 - x_1$; 2) $f(x_1) = \frac{x_1}{2}$; 3) $f(x_1) = \frac{1}{x_1 + 1}$;
4) $f(x_1) = \operatorname{sg}(x_1 - 1)$; 5) $f(x_1, x_2) = x_1 - 2x_2$;
6) $f(x_1, x_2) = \frac{x_1 - x_2}{3}$; 7) $f(x_1, x_2) = \frac{x_1}{x_2 + 2}$;
8) $f(x_1, x_2) = \frac{x_1}{1 - x_1 \cdot x_2}$.

2.7. Доказать, что следующие функции примитивно рекурсивны:

1) $\mu_x\left(\left[\frac{x \dot{-} 1}{2}\right]\right)$; 2) $\mu_x\left(\left[\frac{x}{2}\right] \dot{-} 1\right)$; 3) $\mu_x\left(x \dot{-} \left[\frac{x}{2}\right]\right)$;
4) $\mu_x\left(x \dot{-} \left[\frac{x}{3}\right]\right)$; 5) $\mu_x\left(\left[\sqrt[3]{x^2}\right]\right)$; 6) $\mu_x(x \dot{-} [\sqrt{x}]^2)$.

2.8. 1) Доказать, что однократное применение операции минимизации к всюду определенной числовой функции приводит к функции, определенной хотя бы в одной точке.

2) Привести пример одноместной примитивно рекурсивной функции, из которой двукратным применением операции минимизации можно получить нигде не определенную функцию.

3) Сформулировать условие, необходимое и достаточное для того, чтобы функция $\mu_x f(x)$ была нигде не определенной.

4) Сформулировать необходимое и достаточное условие того, что числовая функция $\mu_x f(x)$ является всюду определенной.

5) Доказать, что если функция $f(x, y)$ не является всюду определенной, то таким же свойством обладает каждая из функций $\mu_x f(x, y)$ и $\mu_y f(x, y)$.

2.9. 1) У всюду определенной функции $f(x, y)$ обе переменные существенные. Предположим, что $\mu_x f(x, y)$ и $\mu_y f(x, y)$ — всюду определенные функции. Может ли хотя бы одна из этих функций зависеть существенно только от одной переменной?

2) У всюду определенной функции $f(x, y)$ ровно одна существенная переменная. Могут ли у функции $\mu_x f(x, y)$ быть существенными обе переменные, если предположить дополнительно, что она всюду определена?

2.10. Обосновать вычислимость следующих функций:

1) $f(x, y, z) = \left[\dfrac{2}{x+1}\right] \cdot (x - \overline{\operatorname{sg}}\,(2^x \dot{-} y)) \dot{-} (x+1)^3$;

2) $f(x, y, z) = \left(\dfrac{yz}{x-1} + 2^{[x/2]}\right) \cdot ((x^2 \dot{-} y) + z))$;

3) $f(x, y, z) = 4^{x^2 \dot{-} y^2 \cdot z} - (x^2+1)^2 \cdot (\operatorname{sg}(x \dot{-} 2^y) + z)$;

4) $f(x, y, z) = \dfrac{x^2 - y^2}{z+1} \cdot 2^{(x^3+y)\cdot \overline{\operatorname{sg}}\,(x \dot{-} y\cdot z)}$.

2.11. Каковы мощности классов $K_{\text{пр}}$, $K_{\text{ор}}$, $K_{\text{чр}}$ и $K_{\text{в}}$?

2. Некоторые специальные свойства рекурсивных функций.

2.12. Опровергнуть следующее утверждение: если машина Тьюринга вычисляет функцию $f_1(x) \in K_{\text{ор}} \backslash K_{\text{пр}}$, то вычислимая на этой машине функция $f_2(x, y)$ не является примитивно рекурсивной.

2.13. 1) Машины Тьюринга T_1 и T_2 вычисляют примитивно рекурсивные функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ соответственно. Следует ли отсюда, что композиция T_1T_2 этих машин вычисляет обязательно примитивно рекурсивную функцию? А если машины T_1 и T_2 правильно вычисляют функции f_1 и f_2?

2) Машина Тьюринга T вычисляет примитивно рекурсивную функцию $f(x)$. Справедливо ли следующее утверждение: если итерация машины T вычисляет некоторую всюду определенную функцию $g(x)$, то функция $g(x)$ обязательно примитивно рекурсивна?

2.14. Известно, что $f(x) \in K_{\text{ор}}$ и что при всех $x \geqslant 0$ выполняются соотношения $f(2x) = f(x+1)$ и $f(2x+1) = f(x)$. Вытекает ли отсюда, что $f(x)$ — примитивно рекурсивная функция?

2.15. Функции $g_1(x)$ и $g_2(x)$ являются всюду определенными вычислимыми функциями, удовлетворяющими следующему условию: какова бы ни была примитивно рекурсивная функция $f(x)$, найдется x_0 такое, что $f(x_0) < g_1(x_0) + g_2(x_0)$. Доказать, что хотя бы одна из функций $g_1(x)$ и $g_2(x)$ не является примитивно рекурсивной.

2.16. Функция $f(x)$ принадлежит множеству $K_{\text{ор}} \backslash K_{\text{пр}}$ (т. е. общерекурсивна, но не является примитивно рекурсивной функцией). Показать, что каждая из приводимых ниже функций также содержится в множестве $K_{\text{ор}} \backslash K_{\text{пр}}$:

1) $f(x+3)$; 2) $f(x \dot{-} 2)$; 3) $f\left(\left[\dfrac{x}{2}\right]\right)$; 4) $f([\sqrt{x}\,])$; 5) $f(x \cdot y^3)$;

6) $f(x \dot{-} y^2)$; 7) $f(2x^2 + y)$; 8) $f\left(\left[\frac{x+y}{1+z}\right]\right)$.

2.17. Пусть частично рекурсивная функция $f(x)$ такова, что функция $g(x)$, определяемая условием

$$g(x) = \begin{cases} 0 & \text{в тех точках, где } f(x) \text{ определена,} \\ 1 & \text{в точках, где } f(x) \text{ не определена,} \end{cases}$$

является общерекурсивной. Показать, что функцию $f(x)$ можно доопределить до общерекурсивной функции.

2.18. Выяснить, образует ли множество M полную систему относительно совокупности операций $\mathfrak{G}$ в классе $K_{\text{чр}}$, если:

1) $M = K_{\text{чр}} \backslash K_{\text{ор}}$, $\mathfrak{G} = \{$операции примитивной рекурсии и минимизации$\}$;

2) $M = K_{\text{чр}} \backslash K_{\text{ор}}$, $\mathfrak{G} = \{$операция отождествления переменных$\}$;

3) $M = K_{\text{ор}} \backslash K_{\text{пр}}$, $\mathfrak{G} = \{$операции суперпозиции и минимизации$\}$.

Глава VI

ГРАФЫ И СЕТИ

§ 1. Основные понятия теории графов

1. Простейшие свойства графов. Изоморфизм графов. Пусть V — конечное непустое множество и X — некоторый набор пар элементов из V. В наборе X могут встречаться пары, состоящие из одинаковых элементов, а также одинаковые пары. Множество V и набор X определяют *граф с кратными ребрами и петлями* (или, короче, *псевдограф*) $G = (V, X)$. Элементы множества V называются *вершинами псевдографа*, а элементы набора X — *ребрами псевдографа*.

Ребра вида (v, v), $v \in V$, называются *петлями*. Псевдограф без петель называется *графом с кратными ребрами* (или, короче, *мультиграфом*). Если в наборе X нет петель и ни одна пара не встречается более одного раза, то мультиграф $G = (V, X)$ называется *графом*.

Ниже почти все определения даются для графов. Эти определения, как правило, легко переносятся на мультиграфы и псевдографы. В тех случаях, когда различия в определениях существенны, даются определения и для псевдографов.

Если пары в наборе X являются упорядоченными, то граф называется *ориентированным графом* (или, короче, *орграфом*). Ребра ориентированного графа часто называются *дугами*. Если пары в наборе X являются неупорядоченными, то граф называется *неориентированным графом* (или просто *графом*). Если $x = (u, v)$ — ребро графа, то вершины u и v называются *концами ребра* x. Если вершина v является концом ребра x, то говорят, что v и x *инцидентны*. Вершины u и v графа G называются *смежными*, если существует ребро графа G, соединяющее их (т. е. $(u, v) \in X$). Два ребра называются *смежными*, если они имеют общую вершину.

Степенью вершины v (обозначения $d(v)$ и $\deg(v)$) называется число ребер графа, инцидентных вершине v. В псевдографе степень вершины v равна общему числу ребер (и петель), инцидентных этой вершине, сложенному с числом петель, инцидентных ей (т. е. каждая петля, инцидентная вершине v, в величину степени вершины v «вносит вклад», равный 2). Вершина графа, имеющая степень 0,

называется *изолированной*, а вершина, имеющая степень 1, — *висячей* (или *концевой*). Ребро, инцидентное висячей вершине, называют *концевым*.

Последовательность

$$v_1x_1v_2x_2v_3\ldots v_{n-1}x_{n-1}v_n \quad (n \geqslant 2), \tag{1}$$

в которой чередуются вершины и ребра и при этом для каждого $i = 1, \ldots, n-1$ ребро x_i имеет вид (v_i, v_{i+1}), называется *маршрутом, соединяющим вершины* v_1 *и* v_n (или, короче, (v_1, v_n)-*маршрутом*). Число ребер в маршруте называется его *длиной. Маршрутом длины нуль* называется последовательность, состоящая из единственной вершины. Маршрут, в котором все ребра разные, называется *цепью*. Маршрут, в котором все вершины разные, называется *простой цепью*. Маршрут (1) называется *замкнутым*, если $v_1 = v_n$. Замкнутый маршрут, в котором все ребра различные, называется *циклом*. Цикл, в котором все вершины, кроме первой и последней, разные, называется *простым циклом*.

Граф называется *связным*, если для любых двух различных его вершин существует цепь (маршрут, простая цепь), соединяющая их. *Расстоянием* между вершинами связного графа называется длина кратчайшей (а значит, простой) цепи, соединяющей эти вершины. *Диаметром* связного графа называется расстояние между двумя наиболее удаленными друг от друга вершинами. Диаметр графа G обычно обозначают через $D(G)$.

Подграфом графа G называется граф, все вершины и ребра которого содержатся среди вершин и ребер графа G. Подграф называется *собственным*, если он отличен от самого графа. *Компонентой связности* (или, короче, *компонентой*) *графа* G называется его связный подграф, не являющийся собственным подграфом никакого другого связного подграфа графа G. *Остовным* называется подграф, содержащий все вершины графа.

Подграфом графа $G = (V, X)$, *порожденным подмножеством* U $(U \subseteq V)$, называется граф $H = (U, Y)$, множество ребер которого состоит из тех и только тех ребер графа G, оба конца которых лежат в U.

Графы (псевдографы) $G = (V, X)$ и $H = (U, Y)$ *изоморфны*, если существуют такие два взаимно однозначных соответствия φ: $V \leftrightarrow U$ и ψ: $X \leftrightarrow Y$, что для всякого ребра $x = (u, v)$ из X справедливо соотношение $\psi(x) = (\varphi(u), \varphi(v))$.

В случае графов можно дать следующее определение. *Графы* $G = (V, X)$ и $H = (U, Y)$ *изоморфны*, если существует такое взаимно однозначное отображение φ: $V \leftrightarrow U$, что $(u, v) \in X$ тогда и только тогда, когда $(\varphi(u), \varphi(v)) \in Y$.

Такое отображение φ называется *изоморфным* (или *изоморфизмом*).

Операция удаления вершины из графа G состоит в удалении некоторой вершины вместе с инцидентными ей ребрами. *Операция удаления ребра* из графа $G = (V, X)$ заключается в удалении соот-

ветствующей пары из набора X. При этом, если не оговаривается противное, все вершины в графе сохраняются.

Дополнением $\overline{G}$ *графа* G называется граф, в котором две вершины смежны тогда и только тогда, когда они не смежны в G. Если графы G_1 и G_2 изоморфны, то их дополнения также изоморфны.

Операция подразбиения ребра (u, v) в графе $G = (V, X)$ состоит в удалении от X ребра (u, v), добавлении к V новой вершины w и добавлении к $X \setminus \{(u, v)\}$ двух ребер — (u, w) и (w, v).

Граф G называется *подразбиением графа* H, если G может быть получен из H с помощью операции подразбиения ребра, примененной конечное число раз. В частности, подразбиением графа H является и сам граф H.

Графы G и H называются *гомеоморфными*, если некоторые их подразбиения изоморфны. *Объединением графов* $G = (V, X)$ и $H = (U, Y)$ называется граф $F = (V \cup U,\ X \cup Y)$.

Деревом называется связный ациклический (т. е. не имеющий циклов) граф. Ациклический граф называется *лесом*.

Полным называется граф, в котором любые две различные вершины смежны. Полный граф с n вершинами обозначается через K_n. *Пустым* (*вполне несвязным*) называется граф, не имеющий ребер. Вполне несвязный граф с n вершинами является, очевидно, дополнением полного графа K_n и поэтому часто обозначается через $\overline{K}_n$. Одновершинный граф без ребер называется *тривиальным* (его можно обозначать через K_1 или $\overline{K}_1$).

Двудольным называется граф, множество вершин которого можно разбить на два непустых подмножества (на две доли) V_1 и V_2 таким образом, что никакие две вершины из одной и той же доли не являются смежными. Двудольный граф с долями V_1 и V_2 и множеством ребер X обычно обозначается через (V_1, V_2, X). Если каждая вершина из V_1 смежна с каждой вершиной из V_2, то двудольный граф называется *полным двудольным графом*. Полный двудольный граф (V_1, V_2, X), у которого $|V_1| = n_1$ и $|V_2| = n_2$, обозначается через K_{n_1, n_2}.

Справедлива следующая теорема Д. Кёнига: *граф является двудольным тогда и только тогда, когда в нем отсутствуют циклы нечетной длины.*

Граф называется *однородным* (или *регулярным*) *графом степени* d, если все его вершины имеют степень d. Регулярный граф (подграф) степени 1 называется *паросочетанием*. Регулярный граф степени 3 называется *кубическим*; *k-фактором* графа называется его остовный однородный подграф степени k.

Совершенным паросочетанием графа называется его 1-фактор. *Максимальным паросочетанием* графа называется паросочетание, содержащее наибольшее число ребер.

Единичным n-мерным кубом называется граф B^n, вершинами которого являются двоичные наборы длины n, а ребрами — неупорядоченные пары соседних наборов (см. гл. I, § 1).

Вершина графа, при удалении которой увеличивается число компонент связности, называется *разделяющей* (или *точкой сочленения*).

Граф называется *k-связным*, если при удалении любых $k-1$ его вершин получается связный граф, отличный от тривиального.

Всюду в данном параграфе под графом понимается граф без петель и кратных ребер.

1.1. Показать, что для произвольного псевдографа $G=(V, X)$ справедливо равенство $\sum\limits_{v\in V} d(v) = 2|X|$.

Замечание. Это первая теорема теории графов (принадлежащая Леонарду Эйлеру и опубликованная в 1736 г.).

1.2. Обозначим через $n_i(G)$ число вершин степени i в графе G. Построить все попарно неизоморфные графы без петель и кратных ребер, у которых:

1) $n_2(G)=1$, $n_3(G)=n_4(G)=2$ и $n_i(G)=0$ при $i\neq 2, 3, 4$;

2) $n_2(G)=3$, $n_3(G)=2$, $n_4(G)=1$ и $n_i(G)=0$ при $i\neq 2, 3, 4$.

1.3. Изобразить все попарно неизоморфные 4-вершинные графы без петель и кратных ребер.

1.4. Построить все попарно неизоморфные несвязные 5-вершинные графы, не имеющие петель, кратных ребер и изолированных вершин.

1.5. Изобразить все попарно неизоморфные 6-вершинные графы без петель и кратных ребер, состоящие:

1) из 4 компонент; 2) из 3 компонент; 3) из одной компоненты и имеющие 7 ребер и 2 висячие вершины.

1.6. Сколько существует попарно неизоморфных 6-вершинных графов без петель и кратных ребер со следующим набором степеней вершин: (2, 2, 3, 3, 3, 5)?

1.7. Сколько существует попарно неизоморфных, не имеющих петель и кратных ребер кубических графов с 6 вершинами? Есть ли среди них двудольные графы?

1.8. Существует ли 6-вершинный граф без петель и кратных ребер, имеющий такой набор степеней вершин: (2, 2, 2, 4, 5, 5)?

1.9. Выяснить, какие наборы степеней вершин могут быть у 6-вершинных связных графов без петель и кратных ребер, имеющих 7 ребер и содержащих вершину степени 2 и вершину степени 3. Для каждого допустимого набора степеней вершин построить пример соответствующего графа.

1.10. Показать, что в любом графе без петель и кратных ребер, содержащем не менее 2 вершин, найдутся 2 вершины с одинаковыми степенями.

1.11. Доказать, что для всякого $n\geqslant 3$ существует n-вершинный связный граф без петель и кратных ребер, содержащий $n-1$ вершин с неравными друг другу степенями.

1.12. Доказать, что в мультиграфе всякий замкнутый маршрут нечетной длины $l \geqslant 3$ содержит простой цикл. Справедливо ли аналогичное утверждение для маршрутов четной длины?

1.13. Пусть $\delta(G)$ — наименьшая из степеней вершин графа G, не имеющего петель и кратных ребер и содержащего n вершин $(n \geqslant 2)$.

1) Доказать, что если $\delta(G) \geqslant (n-1)/2$, то граф связен.

2) Показать, что в предыдущем утверждении заменить $(n-1)/2$ на $[(n-1)/2]$ нельзя.

1.14. Индукцией по n доказать, что связный псевдограф с n вершинами содержит не менее $n-1$ ребер $(n \geqslant 1)$.

1.15. Доказать, что если из связного мультиграфа удалить произвольное ребро, содержащееся в некотором цикле, то новый мультиграф будет также связным.

1.16. Доказать, что в связном псевдографе любые две простые цепи максимальной длины имеют хотя бы одну общую вершину. Верно ли, что у них всегда есть общее ребро?

1.17. Доказать, что всякий связный псевдограф, имеющий не менее двух вершин, содержит вершину, не являющуюся разделяющей.

1.18. Показать, что если в мультиграфе степень каждой вершины больше 1, то в нем есть цикл.

1.19. Пусть G — произвольный граф без петель и кратных ребер, а $\overline{G}$ — его дополнение. Доказать, что:

1) хотя бы один из графов G или $\overline{G}$ связен;

2) если в G более 4 вершин, то хотя бы в одном из графов G или $\overline{G}$ имеется цикл;

3) если граф G несвязен или его диаметр не меньше 3, то диаметр графа $\overline{G}$ не больше 3;

4) если v — разделяющая вершина графа G, то она не является разделяющей в графе $\overline{G}$.

1.20. Граф (без петель и кратных ребер) называется *самодополнительным,* если он изоморфен своему дополнению.

1) Показать, что если граф самодополнительный, то число вершин в нем равно либо $4l$ $(l \geqslant 1)$, либо $4l+1$ $(l \geqslant 0)$.

2) Доказать, что среди 4-вершинных графов самодополнительным является только один, а среди 5-вершинных — только два.

3) Показать, что самодополнительный граф связен.

4) Доказать, что диаметр самодополнительного нетривиального графа G удовлетворяет неравенствам $2 \leqslant D(G) \leqslant 3$.

1.21. Выяснить, сколько существует попарно неизоморфных графов без петель и кратных ребер, имеющих:

1) 6 вершин и 11 ребер; 2) 7 вершин и 18 ребер; 3) 8 вершин и 24 ребра; 4) 6 вершин, 7 ребер и 2 компоненты связности; 5) 8 вершин и удовлетворяющих следующему условию: сумма степеней всех вершин не меньше 53.

1.22. Пусть у графа без петель и кратных ребер n вершин и s компонент связности. Доказать, что число ребер в нем не меньше, чем $n-s$ и не превосходит $(n-s)(n-s+1)/2$. Вывести отсюда, что если у n-вершинного графа $(n \geqslant 2)$ число ребер больше $(n-2)(n-1)/2$, то он связный.

1.23. Доказать, что если в псевдографе имеются ровно две вершины нечетной степени, то существует цепь, соединяющая их.

1.24. Показать, что если в n-вершинном графе без петель и кратных ребер нет циклов нечетной длины и число ребер больше $((n-1)/2)^2$, то граф связен $(n \geqslant 2)$.

1.25. Пусть G — граф с $n \geqslant 2$ вершинами, не имеющий петель. Доказать эквивалентность следующих утверждений:

1) G — связный граф с $n-1$ ребрами;

2) G — связный граф, но после удаления любого ребра получается несвязный граф;

3) любая пара различных вершин в графе G соединена единственной цепью;

4) граф G не имеет циклов, но добавление ребра, соединяющего любые две различные вершины, приводит к появлению цикла.

1.26. Доказать, что во всяком дереве с $n \geqslant 2$ вершинами содержится не менее двух висячих вершин.

1.27. Пусть n_1 — число висячих вершин у n-вершинного дерева, не содержащего вершин степени 2. Доказать, что $n_1 \geqslant n/2+1$.

1.28. 1) Индукцией по n доказать, что каждое дерево с $n \geqslant 2$ вершинами является двудольным графом.

2) Какие деревья являются полными двудольными графами?

1.29. Изобразить все попарно неизоморфные деревья:

1) с 6 ребрами и 3 висячими вершинами; 2) с 6 ребрами и 4 висячими вершинами; 3) с 7 ребрами и 3 висячими вершинами; 4) с 8 ребрами и 3 вершинами степени 3.

1.30. Подсчитать число попарно неизоморфных 7-вершинных деревьев, удовлетворяющих условию $\sum\limits_{i=1}^{7} d^2(v_i) \leqslant 26$.

1.31. Описать все графы, являющиеся деревьями вместе со своими дополнениями.

1.32. Пусть n, m и s — соответственно число вершин, число ребер и число компонент у мультиграфа G. Доказать, что:

1) число циклов у мультиграфа G не меньше, чем $m-n+s$;

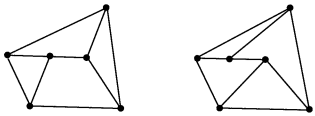
2) мультиграф G является лесом тогда и только тогда, когда $m-n+s=0$.

1.33. Если графы G и H, не имеющие петель и кратных ребер, изоморфны, то для каждого $d \geqslant 0$ число вершин степени d в графах G и H одинаково. Показать, что:

1) в том случае, когда в каждом из графов G и H не более четырех вершин, сформулированное (необходимое) условие для изоморфности графов является также и достаточным;

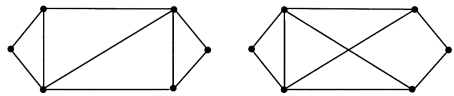
2) это условие не является достаточным для графов с пятью и более вершинами, причем если число вершин не меньше 6, то даже для деревьев.

1.34. Среди пар графов, изображенных на рис. 6.1–6.5, указать пары изоморфных и пары неизоморфных графов. Ответ обосновать.



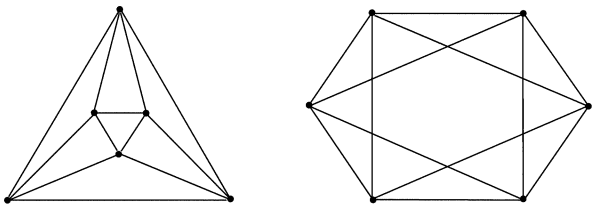
а *б*

Рис. 6.1



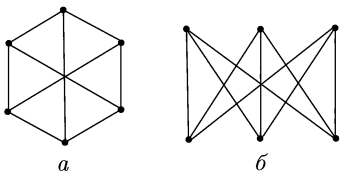
а *б*

Рис. 6.2



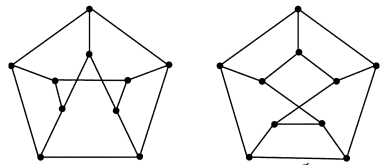
а *б*

Рис. 6.3



а *б*

Рис. 6.4



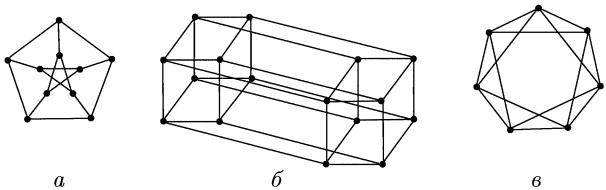
а *б*

Рис. 6.5

1.35. 1) Пусть G и H не имеют петель и кратных ребер, являются двухсвязными, содержат по 6 вершин и по 8 ребер. Пусть, кроме того, граф G имеет ровно 2 вершины степени 2, а граф H — ровно 4 вершины степени 3. Изоморфны ли графы G и H?

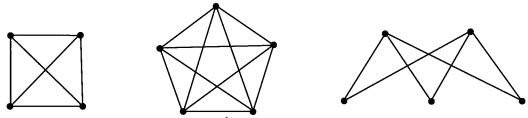
2) Известно, что 6-вершинные графы G и H не имеют петель и кратных ребер, двухсвязны, содержат по 10 ребер и удовлетворяют следующему условию: степень одной вершины в каждом из них равна d_1 $(1 \leqslant d_1 \leqslant 5)$, а степени всех остальных вершин равны d_2 $(d_2 < d_1)$. Показать, что графы G и H изоморфны.

1.36. Выяснить, существуют ли в графах, изображенных на рис. 6.6, подграфы, гомеоморфные графу G:



а *б* *в*

Рис. 6.6



а *б* *в*

Рис. 6.7

1) $G = K_4$ (рис. 6.7, *а*); 2) $G = K_5$ (рис. 6.7, *б*); 3) $G = K_{2,3}$ (рис. 6.7, *в*).

1.37. Пусть n — нечетное число, не меньшее 3, и B_k^n — подмножество всех вершин куба B^n, имеющих вес k (см. гл. I, § 1). Пусть G_n — подграф куба B^n, порожденный множеством $B^n_{(n-1)/2} \cup \cup B^n_{(n+1)/2}$.

1) Построить по одному совершенному паросочетанию в графах G_3 и G_5.

2) Показать, что в графе G_7 существует совершенное паросочетание.

1.38. 1) Привести пример связного однородного графа степени 4, не имеющего петель и кратных ребер и не содержащего остовного простого цикла.

2) Доказать, что всякий однородный псевдограф степени 4 можно представить в виде объединения двух реберно непересекающихся 2-факторов.

2. Ориентированные графы. *Ориентированный псевдограф* $G = G(V, X)$ определяется непустым (конечным) множеством V и набором X упорядоченных пар элементов из V. Элементы множества V называются *вершинами*, а элементы набора X — *дугами* (или *ориентированными ребрами*) ориентированного псевдографа $G(V, X)$.

В наборе X могут встречаться пары вида (v, v), называемые *петлями*, и одинаковые пары, называемые *кратными* (или *параллельными*) *дугами*. Пары (u, v) и (v, u) считаются одинаковыми лишь в том случае, когда $u = v$.

Ориентированным мультиграфом называется ориентированный псевдограф, не содержащий петель. Если в ориентированном псевдографе нет ни петель, ни кратных дуг, то он называется *ориентированным графом* (или, короче, *орграфом*). *Направленным гра-*

фом называется такой орграф, который не имеет симметричных пар ориентированных ребер (т. е. множество X у направленного графа не может содержать одновременно и дугу (u, v), и противоположно направленную дугу (v, u)).

Пусть $x = (u, v)$ — дуга ориентированного псевдографа. Вершину u называют *началом* или *начальной вершиной*, а вершину v — *концом* или *конечной вершиной* дуги x. В этом случае говорят также, что дуга x *исходит из вершины* u и *заходит в вершину* v. Если вершина v является началом или концом дуги x, то говорят, что v и x *инцидентны*.

Полустепенью исхода вершины v псевдографа G называется число дуг псевдографа G, исходящих из вершины v. Полустепень исхода вершины v обозначается через $\mathrm{od}(v)$ или $d^+(v)$. Аналогично *полустепенью захода вершины* v (обозначения: $\mathrm{id}(v)$ и $d^-(v)$) называется число дуг псевдографа, заходящих в вершину v.

Заменяя каждую упорядоченную пару (u, v) из набора X ориентированного псевдографа $G(V, X)$ неупорядоченной парой $\{u, v\}$, состоящей из тех же элементов u и v, получаем *псевдограф* $H = (V, X^0)$, *ассоциированный с ориентированным псевдографом* $G(V, X)$.

Ориентированные псевдографы $G_1(V_1, X_1)$ и $G_2(V_2, X_2)$ называются *изоморфными*, если существуют два таких взаимно однозначных соответствия φ: $V_1 \leftrightarrow V_2$ и ψ: $X_1 \leftrightarrow X_2$, что для всякой дуги $x = (u, v) \in X_1$ справедливо соотношение $\psi(x) = (\varphi(u), \varphi(v))$.

Операции удаления вершины и дуги, а также понятия *подграфа*, остовного подграфа и порожденного подграфа определяются для ориентированных псевдографов аналогично тому, как это делалось в случае неориентированных псевдографов.

При определении ориентированных маршрута, замкнутого маршрута, цепи, цикла, простой цепи и простого цикла требуется (в отличие от определения соответствующих «неориентированных понятий»), чтобы последовательность (вершин и дуг) $v_1, x_1, v_2, x_2, \ldots$ $\ldots, x_{n-2}, v_{n-1}, x_{n-1}, v_n$ $(n \geqslant 2)$ удовлетворяла условию: каждая дуга x_i $(1 \leqslant i \leqslant n-1)$ имеет вид (v_i, v_{i+1}), т. е. вершина v_i является началом дуги x_i, а вершина v_{i+1} — ее концом. Считается, что ориентированный (u, v)-маршрут ориентирован от своей первой вершины u к своей последней вершине v.

Длиной маршрута называется число дуг в нем. *Расстоянием* $\rho(u, v)$ *от вершины* u *до вершины* v называется длина кратчайшего (u, v)-маршрута.

Ориентированный маршрут называется *путем*, а ориентированный простой цикл — *контуром*.

Ориентированная простая остовная цепь называется *гамильтоновым путем* (или *гамильтоновой цепью*). *Гамильтоновым контуром* называется остовный контур ориентированного псевдографа. Если ориентированный псевдограф содержит гамильтонов контур, то сам псевдограф также называется *гамильтоновым*.

Говорят, что вершина v ориентированного псевдографа G *достижима из вершины* u, если в псевдографе G существует (u, v)-путь, т. е. путь, исходящий из вершины u и заходящий в вершину v. (В этом определении вместо (u, v)-пути можно рассматривать ориентированную (u, v)-цепь или ориентированную простую (u, v)-цепь.)

Ориентированный псевдограф называется *сильно связным* (или *сильным*), если любая вершина в нем достижима из всякой другой его вершины. Ориентированный псевдограф называется *односторонне связным* (или *односторонним*), если для любых двух различных его вершин по меньшей мере одна достижима из другой. Ориентированный псевдограф $G(V, X)$ называется *слабо связным* (или *слабым*), если ассоциированный с ним псевдограф (V, X^0) является связным. Если ориентированный псевдограф не является даже слабо связным, то он называется *несвязным*. *Тривиальный орграф*, состоящий лишь из одной вершины, считается (по определению) сильно связным.

Сильной компонентой ориентированного псевдографа G называется любой его ориентированный подграф, являющийся сильно связным псевдографом и не содержащийся ни в каком другом сильно связном ориентированном подграфе псевдографа G.

Аналогично *односторонняя компонента* представляет собой «максимальный» (по включению) односторонний псевдограф-подграф псевдографа G, а *слабая компонента* — «максимальный» (по включению) слабый псевдограф-подграф в G.

Пусть $\gamma = \{S_1, S_2, \ldots, S_n\}$ — множество всех сильных компонент ориентированного псевдографа G. *Конденсацией* G^* ориентированного псевдографа G называется такой орграф (без петель и кратных дуг), у которого множеством вершин является множество γ, а дуга (S_i, S_j) присутствует в орграфе G^* тогда и только тогда, когда в псевдографе G существует хотя бы одна дуга, исходящая из некоторой вершины компоненты S_i и заходящая в какую-нибудь вершину компоненты S_j $(i \neq j)$.

Если $G = G(V, X)$ — ориентированный псевдограф, то *обратный к нему ориентированный псевдограф* G' задается тем же множеством вершин V и таким множеством дуг X', что дуга (u, v) принадлежит X' тогда и только тогда, когда дуга (v, u) принадлежит X.

Вершина v ориентированного псевдографа G называется *источником*, если из нее достижима любая другая вершина псевдографа G. *Стоком* ориентированного псевдографа G называется всякая его вершина v, являющаяся источником в обратном (к псевдографу G) ориентированном псевдографе G'.

Ориентированный псевдограф называется *полным*, если в нем любые две различные вершины соединены хотя бы одной дугой. *Турниром* называется полный направленный граф. Орграф G называется *растущим деревом*, если ассоциированный с ним граф является деревом и если в G есть источник.

1.39. Построить все попарно неизоморфные орграфы (без петель и кратных дуг), содержащие:

1) 3 вершины и 3 дуги; 2) 3 вершины и 4 дуги; 3) 4 вершины и 3 дуги.

Сколько среди них сильно связных, односторонне связных и слабо связных?

1.40. Изобразить все попарно неизоморфные ориентированные псевдографы, содержащие:

1) 2 вершины и 2 дуги; 2) 2 вершины и 3 дуги; 3) 3 вершины и 2 дуги.

Сколько среди них сильно связных, односторонне связных и слабо связных?

1.41. Построить все попарно неизоморфные направленные графы, имеющие:

1) 3 вершины и хотя бы одну дугу; 2) 4 вершины и 4 дуги; 3) 5 вершин и 3 дуги.

Сколько среди них сильно связных, односторонне связных и слабо связных?

1.42. Построить все попарно неизоморфные турниры с:

1) 3 вершинами; 2) 4 вершинами.

Сколько среди них сильно связных, односторонне связных и слабо связных?

1.43. Изобразить все попарно неизоморфные турниры с 5 вершинами, содержащие вершину с нулевой полустепенью захода и вершину с нулевой полустепенью исхода. Для каждого из них построить конденсацию.

1.44. Построить все попарно неизоморфные растущие деревья с:

1) 4 вершинами; 2) 5 вершинами; 3) 6 вершинами, не содержащие ориентированных цепей длины, превосходящей 3.

1.45. 1) Доказать, что в n-вершинном $(n \geqslant 3)$ сильно связном орграфе (без петель и кратных дуг) число дуг (обозначим его через m) удовлетворяет неравенствам $n \leqslant m \leqslant n(n-1)$.

2) Доказать, что в n-вершинном $(n \geqslant 2)$ слабо связном орграфе (без петель и кратных дуг), не являющемся сильно связным, число дуг (обозначим его через m) удовлетворяет неравенствам $n-1 \leqslant m \leqslant (n-1)^2$.

1.46. Доказать, что если полустепень исхода каждой вершины ориентированного псевдографа положительна, то в нем существует ориентированный цикл. (Петля считается ориентированным циклом длины 1.)

1.47. Пусть орграф G (без петель и кратных дуг) является по меньшей мере слабо связным. Пусть $V = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ — множество его вершин $(n \geqslant 2)$, $d^+(v_1) - d^-(v_1) = 1$, $d^+(v_2) - d^-(v_2) = -1$, $d^+(v_j) = d^-(v_j)$ при $j = 3, \ldots, n$. Доказать, что в орграфе G существует ориентированная (v_1, v_2)-цепь, содержащая все его дуги.

1.48. 1) Доказать, что ориентированный псевдограф, имеющий не менее 2 вершин, сильно связен тогда и только тогда, когда в нем существует ориентированный остовный замкнутый маршрут.

2) Можно ли в приведенном утверждении заменить замкнутый маршрут циклом?

1.49. Доказать, что слабо связный псевдограф является сильно связным тогда и только тогда, когда в нем существует ориентированный замкнутый маршрут, содержащий каждую дугу псевдографа хотя бы один раз.

1.50. Пусть ориентированный псевдограф G можно представить в виде объединения некоторых его ориентированных замкнутых маршрутов $M_1, M_2, \ldots, M_k$ $(k \geqslant 1)$, удовлетворяющих условию: каждые два соседних маршрута M_j и M_{j+1} $(1 \leqslant j \leqslant k-1)$ имеют хотя бы одну общую вершину. Показать, что псевдограф G сильно связен.

1.51. 1) Привести пример 7-вершинного орграфа без петель и кратных дуг, опровергающий следующее утверждение: если полустепени исхода и захода любой вершины орграфа положительные и четные, то для каждой вершины орграфа найдется контур, содержащий ее.

2) Показать, что орграфа без петель и кратных дуг, имеющего менее 7 вершин и опровергающего приведенное выше утверждение, не существует.

1.52. Доказать, что в конденсации G^* произвольного ориентированного псевдографа G контуры отсутствуют.

1.53. Доказать, что если ориентированный псевдограф G не является сильно связным, то он будет односторонним тогда и только тогда, когда его конденсация G^* имеет ориентированную остовную цепь.

1.54. *Бесконтурным* ориентированным мультиграфом называется мультиграф, не содержащий контуров. Доказать, что в бесконтурном ориентированном мультиграфе существует вершина с нулевой полустепенью исхода.

1.55. Доказать, что ориентированный псевдограф изоморфен своей конденсации тогда и только тогда, когда он является бесконтурным орграфом (не имеющим петель и кратных дуг).

1.56. Пусть G — слабо связный ориентированный псевдограф, не являющийся односторонним. Доказать, что в G не существует такой вершины, удаление которой дает сильно связный псевдограф.

1.57. Доказать, что слабо связный орграф является растущим деревом тогда и только тогда, когда лишь одна его вершина имеет нулевую полустепень захода, а полустепень захода любой из остальных вершин равна 1.

1.58. Показать, что во всяком полном ориентированном псевдографе существует источник, т. е. вершина, из которой достижима любая другая вершина псевдографа.

1.59. Пусть G — полный сильно связный орграф (без петель и кратных дуг), имеющий $n \geqslant 3$ вершин.

1) Доказать, что, каково бы ни было k $(3 \leqslant k \leqslant n)$, для всякой вершины орграфа G найдется контур длины k, содержащий эту вершину.

2) Доказать, что если из орграфа G (при $n \geqslant 4$) удалить произвольную вершину, то результирующий орграф либо сильно связный, либо становится сильно связным после добавления одной подходящей дуги.

1.60. Показать, что в любом турнире существует гамильтонова цепь.

1.61. Доказать, что турнир является сильным орграфом тогда и только тогда, когда в нем имеется остовный контур (т. е. когда этот турнир гамильтонов).

1.62. Пусть $\{v_1, \ldots, v_n\}$ — множество вершин турнира. Доказать, что $\sum\limits_{i=1}^{n}(d^+(v_i))^2 = \sum\limits_{i=1}^{n}(n-1-d^+(v_i))^2$.

1.63. Пусть у вершины v турнира T полустепень исхода не меньше, чем полустепень исхода каждой другой вершины турнира. Доказать, что расстояние от вершины v до любой другой вершины турнира не превосходит 2.

1.64. Орграф $G(V, X)$ без петель и кратных дуг называется *транзитивным*, если из принадлежности дуг (u, v) и (v, w) множеству X следует принадлежность множеству X дуги (u, w). Доказать, что конденсация всякого турнира является транзитивным турниром.

1.65. Доказать, что в любом транзитивном турнире существует гамильтонова цепь.

1.66. Пусть $G(V, X)$ — орграф без петель и кратных дуг, а $\overline{G}(V, \overline{X})$ — его дополнение, т. е. орграф, имеющий то же множество вершин V и такое множество дуг, что $(v_1, v_2) \in \overline{X}$ тогда и только тогда, когда $(v_1, v_2) \notin X$ (здесь, естественно, $v_1 \neq v_2$). Через $h(G)$ и $h(\overline{G})$ обозначим число гамильтоновых цепей в G и $\overline{G}$ соответственно. Доказать, что $h(G) \equiv h(\overline{G}) \pmod 2$.

1.67. Пусть $G(V, X)$ — произвольный турнир и $h(G)$ — число гамильтоновых цепей в нем. Доказать, что:

1) при изменении ориентации одной его дуги получается турнир G', у которого число $h(G')$ гамильтоновых цепей удовлетворяет условию $h(G') \equiv h(G) \pmod 2$;

2) $h(G)$ — нечетное число.

§ 2. Планарность и раскраска графов

Мультиграф называется *планарным*, если его можно изобразить на плоскости так, что любые две дуги кривых (в частности, отрезки прямых), изображающие ребра, либо не имеют общих точек, либо

пересекаются только в точках, соответствующих вершинам графа; причем в любой точке пересечения сходятся лишь дуги (отрезки), сопоставленные ребрам, инцидентным именно той вершине, которой соответствует данная точка. Такая геометрическая фигура, являющаяся изображением планарного мультиграфа, называется *плоским мультиграфом*. *Внутренней гранью* плоского мультиграфа называется конечная область плоскости, ограниченная простым циклом и не содержащая внутри себя никаких вершин и ребер мультиграфа, принадлежащих другим простым циклам. Простой цикл, ограничивающий грань, называется ее *границей*. Часть плоскости, состоящая из точек, не принадлежащих мультиграфу и никакой из его внутренних граней, называется *внешней гранью*.

Из этих определений следует, что в гранях могут располагаться «древовидные отростки» (в частности, концевые ребра и висячие вершины); они в границы граней не включаются. Для связных плоских мультиграфов, содержащих n вершин, m ребер и f граней (считая и внешнюю), справедливо следующее соотношение, называемое *формулой Эйлера*: $n - m + f = 2$.

Очевидно, что мультиграф G планарен тогда и только тогда, когда планарен граф, получаемый из G заменой каждой совокупности кратных ребер одним ребром с соответствующими концами (т. е., например, совокупность кратных ребер с концами v и w заменяется одним ребром (v, w)).

Критерий планарности (теорема Понтрягина–Куратовского). *Граф планарен тогда и только тогда, когда ни один из его подграфов не гомеоморфен ни* K_5, *ни* $K_{3,3}$ (см. рис. 6.7, *б* и рис. 6.4).

Раскраской вершин графа (или ребер мультиграфа) называется *сопоставление* (*приписывание*, *назначение*) *цветов* (*красок*) вершинам графа (соответственно ребрам мультиграфа). Раскраска называется *правильной*, если смежные вершины (соответственно ребра) окрашены в разные цвета. Наименьшее число цветов, для которого существует правильная раскраска вершин графа G, называется *хроматическим числом графа* G и обозначается через $\chi(G)$. Наименьшее число цветов, для которого существует правильная раскраска ребер мультиграфа G, называется *хроматическим индексом* (или *хроматическим классом*, или *реберно-хроматическим числом*) мультиграфа G и обычно обозначается через $\chi'(G)$.

Для хроматического числа графа $G = (V, X)$ справедливы следующие оценки:

1) $\chi(G) \geqslant \omega(G)$, где $\omega(G)$ — число вершин у наибольшего полного подграфа графа G (так называемое *кликовое число графа* G);

2) $\chi(G) \geqslant \dfrac{n^2}{n^2 - 2m}$, где $n = |V|$ и $m = |X|$;

3) $\chi(G) \leqslant \Delta(G) + 1$, где $\Delta(G) = \max\limits_{v \in V} d(v)$.

Для хроматического индекса мультиграфа $G = (V, X)$ имеют место следующие оценки:

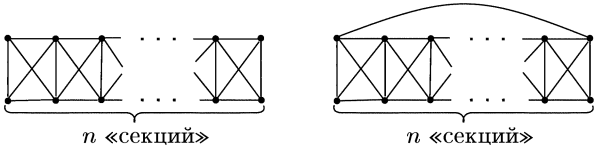
1) $\chi'(G) \geqslant \Delta(G)$, где $\Delta(G) = \max\limits_{v \in V} d(v)$;

2) $\chi'(G) \leqslant \left[\frac{3}{2}\Delta(G)\right]$ (теорема К. Шеннона);

3) $\chi'(G) \leqslant \Delta(G) + \mu(G)$, где $\mu(G) = \max\limits_{(v,w)} \mu(v, w)$ и $\mu(v, w)$ — число ребер, соединяющих в G вершины v и w, т. е. $\mu(G)$ — мощность наибольшей из совокупностей кратных ребер в мультиграфе G; эта оценка получена В.Г. Визингом.

Если G — граф (без петель и кратных ребер), то $\Delta(G) \leqslant \chi'(G) \leqslant \Delta(G) + 1$.

2.1. Применяя критерий Понтрягина–Куратовского, выяснить, планарны ли графы, изображенные: 1) на рис. 6.5, *а*, *б*; 2) на рис. 6.6, *а*, *б*, *в*.



а *б*

Рис. 6.8

2.2. При каких $n \geqslant 2$ являются планарными графы, изображенные на рис. 6.8, *а*, *б*?

2.3. Построить граф с 6 вершинами и 12 ребрами, содержащий одновременно подграфы, гомеоморфные K_5 и $K_{3,3}$.

2.4. Построить все попарно неизоморфные непланарные графы без петель и кратных ребер, содержащие 6 вершин и 11 ребер.

2.5. Построить однородный 9-вершинный граф (без петель и кратных ребер), который не планарен вместе со своим дополнением.

2.6. Используя формулу Эйлера, доказать непланарность следующих графов:

1) K_5 (рис. 6.7, *б*); 2) $K_{3,3}$ (рис. 6.4); 3) граф Петерсена (рис. 6.6, *а*); 4) граф, изображенный на рис. 6.6, *в*.

2.7. 1) Выяснить, какое наименьшее число вершин нужно удалить из графа G, чтобы получился планарный граф, если: а) G — граф Петерсена (рис. 6.6, *а*); б) G — граф, изображенный на рис. 6.9.

2) Выяснить, какое наименьшее число ребер надо удалить из графа G, чтобы получился планарный граф, если:

а) $G = K_6$; б) $G = B^4$; в) G — граф Петерсена.

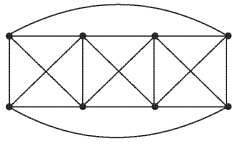


Рис. 6.9

2.8. Выяснить, существует ли планарный граф (без петель и кратных ребер), у которого:

1) 7 вершин и 16 ребер; 2) 8 вершин и 17 ребер.

2.9. Какое наибольшее число граней может быть у плоского 5-вершинного графа, не имеющего петель и кратных ребер? Изобразите такой граф.

2.10. 1) Существует ли плоский 6-вершинный граф (без петель и кратных ребер), у которого 9 граней?

2) Построить все попарно неизоморфные плоские 6-вершинные графы (без петель и кратных ребер), имеющие 8 граней.

2.11. Графы G_1 и G_2 плоские, 6-вершинные, с одинаковым числом граней. У графа G_1 четыре вершины степени 4 и две вершины степени 3. У графа G_2 две вершины степени 5, а остальные имеют степени меньше 5. Какие степени могут быть у остальных вершин графа G_2? Изобразите все такие графы G_1 и G_2.

2.12. Доказать, что в каждом планарном графе без петель и кратных ребер есть вершина степени, не большей чем 5.

2.13. Плоский связный граф без висячих вершин, каждая грань которого, включая и внешнюю, ограничена циклом длины 3, называется *триангуляцией*. Показать, что триангуляция с $n \geqslant 3$ вершинами имеет $3n-6$ ребер и $2n-4$ граней.

2.14. Доказать, что если у связного планарного графа (без петель и кратных ребер), имеющего n вершин и m ребер, каждый простой цикл содержит не менее k ребер $(k \geqslant 3)$, то $m \leqslant k(n-2)/(k-2)$.

2.15. Доказать, что в любом планарном графе (без петель и кратных ребер), имеющем не менее 4 вершин, найдутся хотя бы 4 вершины, степени которых не больше 5.

2.16. Показать, что 6-связных планарных графов (без петель и кратных ребер) не существует.

2.17. 1) Показать, что плоский кубический граф, граница каждой грани которого имеет не менее 5 вершин, содержит по крайней мере 20 вершин. Привести пример такого графа.

2) Пусть G — плоский связный кубический граф (без петель и кратных ребер). Через f_i $(i \geqslant 3)$ обозначим число тех граней графа G, каждая из которых ограничена i ребрами. Доказать, что $\sum\limits_{i \geqslant 3}(6-i)f_i = 12$.

2.18. Найти хроматические числа и хроматические индексы графов, изображенных на рис. 6.1, рис. 6.3, рис. 6.5 и рис. 6.6.

2.19. Найти хроматическое число и хроматический индекс графа G:

1) $G = B^n$ $(n \geqslant 1)$; 2) $G = K_n$ $(n \geqslant 2)$; 3) $G = K_{m,n}$ $(n \geqslant m \geqslant 1)$.

2.20. Граф (без петель и кратных ребер) называется *гамильтоновым*, если в нем существует простой остовный цикл (т. е. простой цикл, содержащий все вершины графа). Такой цикл называют *гамильтоновым*. Доказать, что если G — кубический гамильтонов граф, то $\chi'(G) = 3$.

2.21. Пусть l — длина самой длинной простой цепи в графе G, не имеющем петель и кратных ребер. Показать, что $\chi(G) \leqslant l+1$.

2.22. Пусть G — граф без петель и кратных ребер и $\Delta(G)$ — наибольшая из степеней его вершин. Доказать, что $\chi(G) \leqslant \Delta(G) + 1$.

2.23. Доказать, что вершины всякого плоского графа (без петель и кратных ребер) можно правильно окрасить в $q \leqslant 6$ цветов.

2.24. Доказать, что для правильной раскраски ребер всякого кубического мультиграфа достаточно 4 цветов.

§ 3. Деревья и сети

1. Корневые деревья. Пусть $G = (V, E)$ — граф с множеством вершин V и множеством ребер E и $W \subseteq V$ — некоторое подмножество вершин. Пару $\Gamma = (W, G)$ будем называть *сетью*. Ребра и вершины графа G называются ребрами и вершинами сети $\Gamma = (G, W)$. Элементы множества W называются *полюсами*. Сеть называется *k-полюсной*, если $|W| = k$. Сеть $\Gamma = (G, W)$ является *связной* (*планарной*), если *связным* (*планарным*) является граф G. Две k-полюсные сети *изоморфны*, если их графы изоморфны и при этом полюса одной сети взаимно однозначно соответствуют полюсам другой. *Корневым деревом* (*деревом с корнем*) называется однополюсная сеть, граф которой является деревом. Корневое дерево можно определить также по индукции.

Базис индукции. Однополюсная сеть с одним ребром является корневым деревом (рис. 6.10, *а*).

Индуктивный переход. Пусть A (рис. 6.10, *б*) — дерево с корнем a и B (рис. 6.10, *в*) — дерево с корнем b. Тогда сеть C (рис. 6.10, *г*),

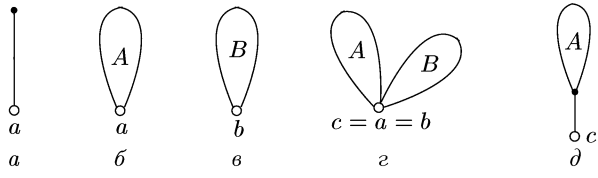


Рис. 6.10

полученная отождествлением полюсов a и b, является деревом с корнем $c = a = b$. Далее, деревом является сеть D (рис. 6.10, *д*), полученная добавлением нового ребра (a, c), где c не является вершиной сети A, и выбором вершины c в качестве нового корня.

Укладкой корневого дерева или *плоским корневым деревом* называется изображение дерева на плоскости. Укладку корневого дерева можно провести в соответствии с процедурой индуктивного построения корневого дерева. При этом мы будем считать, что корневое дерево укладывается на плоскости с разрезом, представляющим собой полупрямую, исходящую из корня. Ребра укладки дерева, инцидентные корню, можно пронумеровать по часовой стрелке числами $1, \ldots, m$, где m — степень корня. Такая нумерация является однозначной в

случае расположения укладки на плоскости с разрезом. Если из плоской укладки удалить ребро, инцидентное корню и имеющее номер i, $1 \leqslant i \leqslant m$, то образуются две компоненты связности. Ту из компонент, которая не содержит корня, назовем *i-й ветвью укладки дерева*. Будем рассматривать ветвь как плоское корневое дерево с корнем в вершине, инцидентной i-му ребру (в исходном дереве). Если ветвь не содержит ребер, то будем называть ее *пустой*.

Два плоских корневых дерева A и B будем называть *одинаковыми*, если:

1) A и B — однореберные деревья;

2) A и B — плоские корневые деревья с более чем одним ребром и равными степенями корней и такие, что i-е ветви деревьев A и B, имеющие один и тот же номер, либо пусты, либо являются одинаковыми плоскими корневыми деревьями.

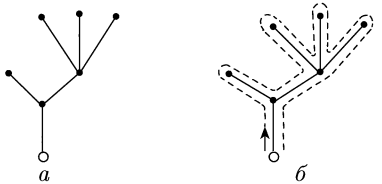
Деревья, не являющиеся одинаковыми, называются *различными*.

Каждому плоскому корневому дереву с m ребрами можно взаимно однозначно сопоставить двоичный вектор длины $2m$, называемый *кодом дерева*. Код плоского корневого дерева определим по индукции.

Базис индукции. Дереву с одним ребром (см. рис. 6.10, *а*) сопоставим вектор 01.

Индуктивный переход. Если дереву A (см. рис. 6.10, *б*) сопоставлен вектор $\widetilde{\alpha}$, а дереву B (см. рис. 6.10, *в*) — вектор $\widetilde{\beta}$, то дереву C (см. рис. 6.10, *г*) сопоставляется вектор $\widetilde{\alpha}\widetilde{\beta}$, а дереву D (см. рис. 6.10, *д*) сопоставлен вектор $0\widetilde{\alpha}1$.

Пример. Дереву, изображенному на рис. 6.11, *а*, сопоставляется вектор 001001010111. Отметим, что код дерева с m ребрами является двоичным вектором, обладающим следующими двумя свойствами.



а *б*

Рис. 6.11

1. Число нулей в векторе $\widetilde{\alpha}$ совпадает с числом единиц.

2. Для любого $k \leqslant 2m$ число единиц среди первых k координат набора $\widetilde{\alpha}$ не превосходит числа нулей среди тех же k координат.

Восстановить дерево по коду можно следующим образом.

Базис индукции. Вектору 01 сопоставляем дерево с одним ребром (см. рис. 6.10, *а*). Такое плоское дерево единственно, поскольку все однореберные плоские корневые деревья одинаковы.

Индуктивный переход. Пусть дан вектор $\widetilde{\alpha}$ с $2m$ координатами ($m > 1$), обладающий свойствами 1 и 2. Пусть k — наименьшее четное число такое, что вектор $\widetilde{\beta}$, состоящий из первых k координат набора $\widetilde{\alpha}$, удовлетворяет свойству 1. Если $k < 2m$, рассмотрим еще вектор $\widetilde{\gamma}$, составленный из координат $\alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_n$ набора $\widetilde{\alpha}$. Тогда, поскольку плоские корневые деревья A и B, кодами которых являются

соответственно наборы $\widetilde{\beta}$ и $\widetilde{\gamma}$, определены однозначно в силу предположения индукции, то можно однозначно сопоставить вектору $\widetilde{\alpha}$ дерево, показанное на рис. 6.10, *г*. Если же $k = 2m$, то пусть $\widetilde{\delta}$ — вектор, полученный из $\widetilde{\alpha}$ отбрасыванием первой и последней координат. Нетрудно убедиться, что вектор $\widetilde{\delta}$ также обладает свойствами 1, 2. Тогда в силу предположения индукции вектору $\widetilde{\delta}$ соответствует единственное плоское дерево A. Сопоставим вектору $\widetilde{\alpha}$ плоское дерево, изображенное на рис. 6.10, *д*.

Код плоского корневого дерева можно получить также с помощью обхода: при обходе дерева, начиная с корня, мы проходим каждое ребро дважды (см. рис. 6.11, *б*). Первый проход вдоль ребра отмечаем нулем,

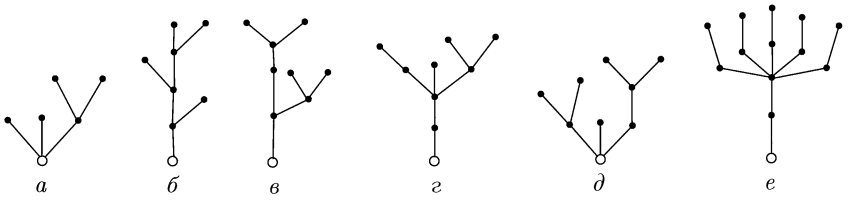


Рис. 6.12

а второй — единицей. В результате получаем тот же самый код дерева, что и при индуктивном способе построения.

3.1. Построить коды плоских корневых деревьев, изображенных на рис. 6.12.

3.2. Построить плоское корневое дерево по его коду α:

1) $\widetilde{\alpha} = 0010100111$; 2) $\widetilde{\alpha} = 00110101000111$;
3) $\widetilde{\alpha} = 0000010011011111$; 4) $\widetilde{\alpha} = 01001000110111$;
5) $\widetilde{\alpha} = 00100010110111$; 6) $\widetilde{\alpha} = 0001011101000001011$.

3.3. По вектору $\widetilde{\alpha}$ установить, является ли он кодом какого-либо плоского дерева:

1) $\widetilde{\alpha} = 001011$; 2) $\widetilde{\alpha} = 0110$; 3) $\widetilde{\alpha} = 001001$;
4) $\widetilde{\alpha} = 010011$; 5) $\widetilde{\alpha} = 00111001$; 6) $\widetilde{\alpha} = 0001100111$.

3.4. Множество векторов A разбить на классы так, чтобы каждый класс состоял из кодов попарно изоморфных плоских корневых деревьев:

1) $A = \{\widetilde{\alpha}_1 = 0100101101,\ \widetilde{\alpha}_2 = 0101000111,$
$\widetilde{\alpha}_3 = 0001110101,\ \widetilde{\alpha}_4 = 0101001011,\ \widetilde{\alpha}_5 = 0100011101\}$;
2) $A = \{\widetilde{\alpha}_1 = 0100010110111,\ \widetilde{\alpha}_2 = 000110011101,$
$\widetilde{\alpha}_3 = 001001011101,\ \widetilde{\alpha}_4 = 010010010111,$
$\widetilde{\alpha}_5 = 010001100111\}$;
3) $A = \{\widetilde{\alpha}_1 = 0011010011,\ \widetilde{\alpha}_2 = 0100110011,$
$\widetilde{\alpha}_3 = 0010110101,\ \widetilde{\alpha}_4 = 0100101101,\ \widetilde{\alpha}_5 = 0011001101\}$.

3.5. Доказать по индукции, что для всякого корневого дерева D с n ребрами его код $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1 \dots \alpha_{2n})$ обладает свойствами 1 и 2, сформулированными в рассмотренном выше примере.

3.6. Показать, что для числа $\psi(n)$ попарно различных плоских корневых деревьев справедливы неравенства:

1) $\psi(n) \leqslant 4^n$; 2) $\psi(n) \leqslant C_{2n}^n$; 3) $\psi(n) \leqslant C_{2(n-1)}^{n-1}$.

3.7. 1) Показать, что для числа $\psi(n)$ попарно различных плоских корневых деревьев справедливо рекуррентное соотношение

$$\psi(n) = \sum_{i=1}^{n} \psi(i-1)\,\psi(n-i), \quad \psi(0) = \psi(1) = 1.$$

2*) Доказать, что $\psi(n) = \dfrac{1}{n+1}\, C_{2n}^n$.

3.8. Доказать эквивалентность двух определений корневого дерева:

1) корневое дерево есть однополюсная сеть, граф которой связен и не имеет циклов;

2) корневое дерево есть сеть, которую можно получить с помощью индуктивного построения, описанного выше (см. индуктивное определение корневого дерева).

3.9. Опираясь на индуктивное определение корневого дерева, доказать следующие свойства корневых деревьев:

1) число вершин корневого дерева на единицу больше числа его ребер;

2) любая пара вершин корневого дерева соединена единственной цепью;

3) добавление любого ребра к корневому дереву приводит к появлению цикла.

3.10. Вершину корневого дерева будем называть *висячей*, если она отлична от корня и имеет степень, равную 1.

1) Пусть корневое дерево имеет k висячих вершин и не имеет вершин степени 2, отличных от корня. Доказать, что при $k \geqslant 2$ общее количество вершин не превосходит $2k$.

2) Пусть каждая вершина корневого дерева, отличная от корня, имеет степень, не превосходящую 3, а степень корня не превосходит 2. Доказать, что число висячих вершин не превосходит $n/2$, где n — число вершин корневого дерева.

Напомним, что *расстоянием* между вершинами u и v связного графа G называется минимальное число $\rho_G(u, v)$ ребер в цепи, соединяющей вершины u и v. *Диаметром* связного графа $G = (V, X)$ называется число $D(G) = \max\limits_{u,v \in X} \rho_G(u, v)$. *Центром* связного графа $G = (V, X)$ называется вершина u_0 такая, что

$$\max_{v \in X} \rho_G(u_0, v) = \min_{u \in V} \max_{v \in V} \rho_G(u, v),$$

а величина $R(G) = \max\limits_{v \in V} \rho_G(u_0, v)$ называется его *радиусом*. Цепь в графе G назовем *диаметральной*, если она соединяет вершины u и v такие, что $\rho_G(u, v) = D(G)$, и имеет длину, равную $D(G)$.

3.11. Найти количество центров $z(T)$, радиус $R(T)$ и диаметр $D(T)$ для каждого корневого дерева T из тех, что изображены на рис. 6.12.

3.12. 1) Доказать, что радиус $R(G)$ и диаметр $D(G)$ графа G связаны неравенствами $R(G) \leqslant D(G) \leqslant 2R(G)$.

2) Показать, что обе оценки достижимы.

3) Доказать, что если G — дерево, то $R(G) = \left\rceil \frac{D(G)}{2} \right\lfloor$.

4) Доказать, что всякий центр дерева принадлежит каждой его диаметральной цепи.

5) Доказать, что дерево обладает единственным центром в случае, когда его диаметр — число четное, и обладает двумя центрами, когда его диаметр — число нечетное.

3.13. Показать, что в дереве с нечетным диаметром любые две простые цепи наибольшей длины имеют хотя бы одно общее ребро.

3.14. Доказать, что дерево (некорневое) однозначно с точностью до изоморфизма восстанавливается, если заданы все попарные расстояния между его висячими вершинами.

Подграф H связного графа G называется *остовным деревом* графа G, если H — дерево, содержащее все вершины графа H.

3.15. 1) Для каждого $d > 2$ указать граф, диаметр которого равен d, а любой связный остовный подграф имеет диаметр, равный $2d$.

2) Доказать, что в любом связном графе G существует остовное дерево, диаметр которого не более чем в два раза превосходит диаметр графа.

2. Двухполюсные сети. Двухполюсная сеть $\Gamma = (\{a, b\}, G)$ будет обозначаться кратко через $\Gamma(a, b)$. *Подграфом сети* Γ будем называть произвольный подграф графа G. Пусть G — подграф сети $\Gamma(a, b)$, содержащий хотя бы одно ребро. Тогда вершина подграфа G называется *граничной*, если она либо является полюсом, либо инцидентна некоторому ребру сети, не принадлежащему подграфу G. Подграф сети называется *отростком*, если он обладает единственной граничной вершиной. *Подсетью* двухполюсной сети называется ее подграф, имеющий ровно две граничные вершины. Эти вершины называются *полюсами подсети*. Сеть $\Gamma(\{a, b\}, G)$ называется *связной*, если ее граф G является связным. *Тривиальной* называется двухполюсная связная сеть, имеющая одно ребро. Если не оговорено противное, то под *цепью* двухполюсной сети $\Gamma(a, b)$ будет подразумеваться цепь, соединяющая полюса a, b. Связная сеть называется *сильно связной*, если через каждое ребро проходит цепь. Сильно связная цепь называется *разложимой*, если она обладает хотя бы одной

нетривиальной подсетью. В противном случае сильно связная сеть называется *неразложимой*. Пусть $\Gamma(a, b)$ — разложимая сеть, $G(c, d)$ — ее нетривиальная подсеть, а $\Gamma_1(a, b)$ — сеть, полученная из $\Gamma(a, b)$ заменой подсети $G(c, d)$ одним ребром (c, d). Тогда в свою очередь сеть $\Gamma(a, b)$ может быть получена подстановкой сети $G(c, d)$ вместо ребра (c, d) сети $\Gamma_1(a, b)$. Таким образом, разложимая сеть $\Gamma(a, b)$ может быть задана указанием сети $\Gamma_1(a, b)$ ребра (c, d), сети $\Gamma_1(a, b)$

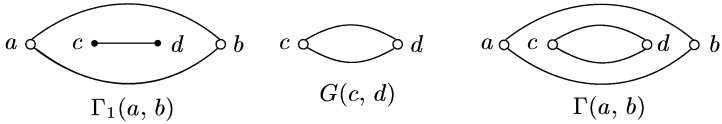


Рис. 6.13

и сети $G(c, d)$ (рис. 6.13). Такое задание называется *разложением сети* $\Gamma(a, b)$. Сеть $\Gamma_1(a, b)$ называется *внешней*, а сеть $G(c, d)$ — *внутренней сетью разложения*. Сеть $\Gamma(a, b)$ называется *суперпозицией сетей* $\Gamma_1(a, b)$ и $G(c, d)$. Сеть, состоящая из n параллельных ребер, соединяющих полюса a, b, обозначается через $\Gamma_n^p(a, b)$ или, короче, Γ_n^p. Сеть, граф которой есть простая цепь длины m, соединяющая полюса a, b, обозначается через $\Gamma_m^s(a, b)$ или, короче, Γ_m^s. Сеть, которая может быть получена из сетей Γ_2^p и Γ_2 применением конечного числа операций подстановки сети вместо ребра, называется *параллельно-последовательной сетью* или, короче, *π-сетью*. Нетривиальная неразложимая сеть $\Gamma(a, b)$, отличная от $\Gamma_2^p(a, b)$ и $\Gamma_2^s(a, b)$, называется *H-сетью*.

Разложимая сеть называется *p-разложимой* (соответственно *s-разложимой*), если некоторая внешняя сеть разложения имеет вид Γ_m^p (соответственно Γ_m^s), $m \geqslant 2$. Если некоторая внешняя сеть разложения сети Γ является H-сетью, то Γ называется *H-разложимой*. Справедливо утверждение о том, что всякая разложимая сеть является либо p-, либо s-, либо H-разложимой.

p-расщеплением сети называется p-разложение, при котором внутренние сети разложения отличны от сетей вида Γ_2^p и сетей, являющихся p-разложимыми. Аналогично определяются s-расщепления. Заметим, что сети Γ_k^p и Γ_k^s $(k \geqslant 3)$ являются разложимыми, но не допускают p-расщепления. *H-расщеплением* называется разложение, внешней сетью которого является H-сеть. Каждой π-сети Γ с $m \geqslant 1$ ребрами можно сопоставить плоское корневое дерево $T(\Gamma)$ с m висячими вершинами такое, что: а) каждая вершина дерева $T(\Gamma)$, отличная от висячей, помечена символом p или s; б) на каждой цепи, идущей от корня к висячей вершине, отметки p и s чередуются; в) вершины, отличные от корня, имеют степень, не равную 2. Висячие вершины дерева $T(\Gamma)$ пометок не имеют. Дерево $T(\Gamma)$ определяется по индукции. Если Γ имеет вид Γ_m^p (или Γ_k^s), то $T(\Gamma)$ есть дерево, корень которого

помечен символом p (соответственно символом s), а остальные m вершин являются висячими, смежными с корнем и не имеют пометок. Если сеть Γ отлична от сетей указанного вида, то она допускает расщепление. Пусть внешняя сеть расщепления имеет вид Γ_k^p (или Γ_k^s), а внутренние сети суть $G_1, G_2, \ldots, G_k$. Тогда дерево $T(\Gamma)$ строится следующим образом. Пусть $T(G_1), T(G_2), \ldots, T(G_k)$ — помеченные плоские корневые деревья, соответствующие внутренним сетям p- или s-расщепления. Тогда в качестве корня $T(\Gamma)$ берется вершина степени k, помеченная символом p (соответственно символом s). Вершины $v_1, v_2, \ldots, v_k$, смежные с корнем и не являющиеся висячими, помечаются символом s (соответственно символом p) и отождествляются с корнями деревьев $T(G_1), T(G_2), \ldots, T(G_k)$. Например, π-сети,

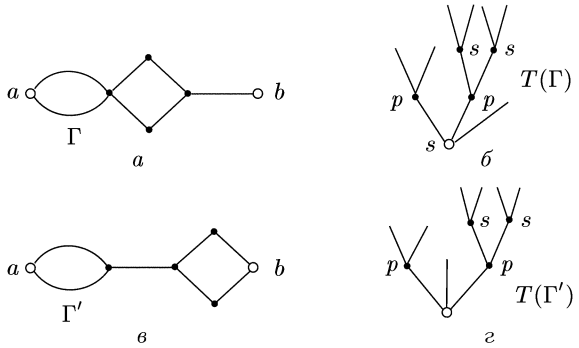


Рис. 6.14

изображенной на рис. 6.14, *а*, соответствует дерево, изображенное на рис. 6.14, *б*. Дерево $T(\Gamma)$ называется *диаграммой расщепления* π*-сети* Γ.

Укажем теперь индуктивное правило построения π-сети с h ребрами по заданному корневому помеченному дереву с h висячими вершинами, являющемуся диаграммой расщепления некоторой π-сети.

Базис индукции. Пусть плоское корневое дерево T имеет один ярус, т. е. каждая из h висячих вершин соединена ребром с корнем. Тогда: а) если корень имеет пометку s, то сопоставим дереву T сеть $\Gamma(a, b)$, представляющую собой цепь из h ребер, соединяющую полюса a и b; б) если же корень дерева T имеет пометку p, то сопоставим дереву T сеть $\Gamma(a, b)$, представляющую собой h параллельных ребер, соединяющих полюса a, b.

Индуктивный переход. Пусть корень плоского помеченного дерева T имеет степень, равную k. Пусть $T_1, T_2, \ldots, T_k$ — ветви корневого дерева, пронумерованные слева направо. Если корень дерева T помечен буквой s, а $\Gamma_1(a_1, b_1), \Gamma_2(a_2, b_2), \ldots, \Gamma_k(a_k, b_k)$ — сети, сопоставленные соответственно ветвями $T_1, T_2, \ldots, T_k$ (пустой ветви сопоставляется однореберная сеть), то дереву T сопоставляется сеть, являющаяся суперпозицией сети Γ_k^s и сетей $\Gamma_i(a_i, b_i)$ $(i = 1, \ldots, k)$.

При этом сеть $\Gamma_i(a_i, b_i)$ подставляется вместо i-го ребра сети Γ_k^s. Таким образом, сеть Γ, изображенная на рис. 6.14, *а*, соответствует дереву T (см. рис. 6.14, *б*), но не дереву T', изображенному на рис. 6.14, *г*. (Соответствующая сеть Γ' изображена на рис. 6.14, *в*.) При изображении сетей будем располагать полюс a слева от полюса b, а ребра внешней сети Γ_k^s считать упорядоченными слева направо; полюса a_i, b_i внутренних сетей $\Gamma_i(a_i, b_i)$ также считаются упорядоченными. Если корень помечен буквой p, а $\Gamma_1(a_1, b_1)$, $\Gamma_2(a_2, b_2)$, ..., $\Gamma_k(a_k, b_k)$ — сети, сопоставленные соответственно ветвям T_1, T_2, ..., T_k, то дереву T сопоставляется сеть, являющаяся суперпозицией сети Γ_k^p и сетей $\Gamma_i(a_i, b_i)$ $(i = 1, \ldots, k)$. При этом сеть $\Gamma_i(a_i, b_i)$ подставляется вместо i-го ребра сети Γ_k^p. При изображении мы располагаем первую подсеть слева, затем располагаем вторую подсеть и т. д. Соглашения об упорядоченности полюсов и ребер сетей позволяют однозначно с точностью до изоморфизма строить π-сети по их диаграммам расщепления.

Вершина сети, отличная от полюса, называется *внутренней*. *Вершина v зависит от вершины u*, если всякая цепь, соединяющая полюса и проходящая через v, проходит и через u. Вершины u и v эквивалентны, если v зависит от u, u зависит от v. Вершина v *слабее вершины u*, а вершина u *сильнее вершины v*, если v зависит от u, но не эквивалентна ей. Вершина v называется *минимальной*, если она не слабее никакой другой внутренней вершины сети. Вершина v называется *разделяющей*, если через нее проходят все цепи, соединяющие полюса.

Пример. В сети, изображенной на рис. 6.15, *а*, вершины *2*, *3* зависят от *1* и *4* и слабее их, вершина *2* эквивалентна вершине *3*,

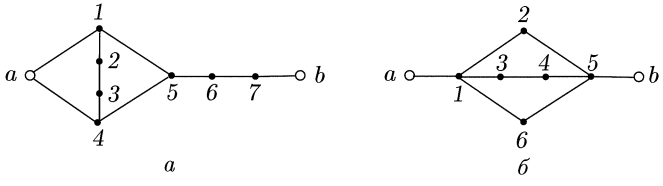


Рис. 6.15

вершина *5* сильнее вершины *4*, вершины *6* и *7* являются минимальными и разделяющими и эквивалентны друг другу.

3.16. 1) Построить все попарно неизоморфные сильно связные двухполюсные сети с 3 ребрами.

2) Найти число попарно неизоморфных сильно связных двухполюсных сетей с 4 ребрами.

3.17. 1) Для каждой из сетей, представленных на рис. 6.16, указать тип разложения.

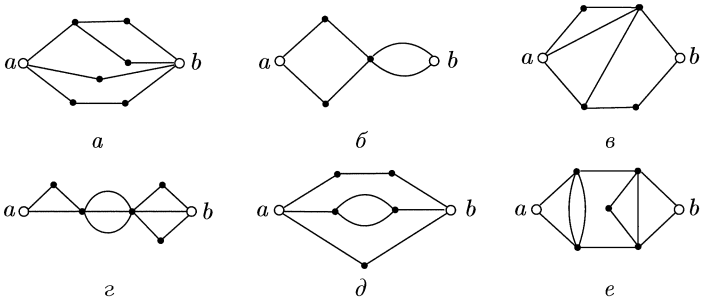


Рис. 6.16

2) Найти внешнюю сеть и внутренние сети расщеплений для сетей, представленных на рис. 6.16.

3.18. 1) Показать, что в каждой неразложимой сети, имеющей более двух ребер:

а) степень каждого полюса не меньше 2;

б) степень каждой внутренней вершины не меньше 3.

2) Найти число попарно неизоморфных неразложимых сетей с пятью ребрами.

3.19. Для сети Γ, представленной на рис. 6.15, *б*, указать:

1) две пары вершин (u, v) такие, что u слабее v и вершины u, v неэквивалентны;

2) две пары эквивалентных вершин (u, v);

3) пару вершин (u, v), не зависящих друг от друга;

4) все разделяющие вершины; 5) все минимальные вершины.

3.20. 1) Показать, что если неразложимая сеть имеет $n > 3$ вершин и m ребер, то

$$3n \leqslant 2m + 2 \leqslant n(n-1). \qquad (1)$$

2) Доказать, что при четных n первое из неравенств (1) достигается.

3.21. Показать, что всякая разделяющая вершина сети минимальна.

3.22. Показать, что всякая разделяющая вершина сети, смежная с обоими ее полюсами, минимальна.

3.23. Пусть все вершины сильно связной сети Γ минимальны. Выяснить, может ли сеть Γ быть:

1) s-разложимой; 2) p-разложимой; 3) H-разложимой.

3.24. Пусть все внутренние вершины сети Γ являются минимальными, сеть Γ не является ни p-, ни s-разложимой, число вершин сети больше 3 и в Γ нет кратных ребер. Доказать, что Γ является H-сетью.

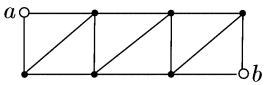


Рис. 6.17

3.25. Доказать неразложимость сети, представленной на рис. 6.17.

3.26. Пусть G — двухсвязный граф без кратных ребер, степень каждой вершины которого не меньше 3. Верно ли, что, выбирая

произвольные две вершины в качестве полюсов, мы получаем неразложимую сеть?

3.27. Сколько попарно неизоморфных неразложимых сетей можно получить, выбирая в n-мерном единичном кубе две вершины в качестве полюсов?

3.28. Пусть Γ — сильно связная сеть без кратных ребер и $S(\Gamma)$ — множество всех вершин сети v, не являющихся минимальными.

1) Верно ли, что если в сети Γ соединить каждую вершину v множества $S(\Gamma)$ с каждым из тех ее полюсов, с которыми v не соединена ребром, то получится неразложимая сеть?

2) Верно ли, что если в сети Γ соединить каждую вершину v ровно с одним из тех ее полюсов, с которыми v не соединена ребром, то получится неразложимая сеть?

3) Верно ли утверждение п. 1) при условии, что Γ является H-разложимой сетью без кратных ребер?

4) Пусть сеть Γ является H-разложимой сетью без кратных ребер. Достаточно ли для получения из нее неразложимой сети соединить каждую вершину v из $S(\Gamma)$ с одним из полюсов, с которыми v не смежна?

5) Доказать, что разложимая сеть Γ может быть сделана неразложимой добавлением ребер тогда и только тогда, когда она не имеет кратных ребер, не имеет ребер, соединяющих полюса, и обладает по меньшей мере четырьмя вершинами.

6) Указать разложимую сеть с наименьшим числом ребер и вершин, которую нельзя сделать неразложимой с помощью замены сетей вида Γ_2^p и Γ_2^s на ребра.

3.29. 1) Пусть в сильно связной сети Γ имеется ровно одна минимальная вершина и не менее трех ребер. Доказать, что сеть Γ является либо p-, либо s-разложимой.

2) Пусть в сильно связной сети Γ, имеющей не менее трех ребер, все минимальные вершины эквивалентны между собой. Доказать, что сеть Γ либо p-, либо s-разложима.

3.30. 1) Доказать, что если в H-сети удалить вершину вместе с инцидентными ее ребрами, то получится связный граф.

2) Верно ли утверждение 1) для H-разложимых сетей?

3.31. Пусть $G = (V, W, X)$ — связный двудольный граф, степень каждой вершины которого не меньше 2. Пусть $\Gamma(a, b)$ — сеть, построенная путем добавления вершин a и b в качестве полюсов и соединения ребром каждой вершины множества V с полюсом a и каждой вершины множества W с полюсом b. Доказать, что $\Gamma(a, b)$ является H-сетью.

3.32. Для каждой из π-сетей, представленных на рис. 6.16, *а*, *б*, *г*, *д*, построить диаграмму расщепления.

3.33. Для каждой из диаграмм расщепления $T(\Gamma)$, представленных на рис. 6.18, восстановить сеть Γ.

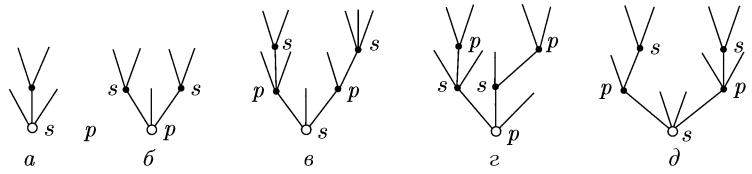


Рис. 6.18

3.34. Доказать, что число попарно неизоморфных π-сетей с h ребрами не превосходит $2C_{4(h-1)}^{2(h-1)}$.

3.35. Доказать эквивалентность следующих двух определений *π-сети*:

1) сильно связная сеть $\Gamma(a, b)$ называется π-сетью, если ее ребра можно ориентировать так, что в каждой простой цепи, соединяющей полюса a и b, все ребра цепи направлены от a к b;

2) π-сетями являются те и только те сети, которые получаются следующим индуктивным процессом.

Базис индукции. Сети Γ_2^p и Γ_2^s (рис. 6.19, *а*) суть π-сети.

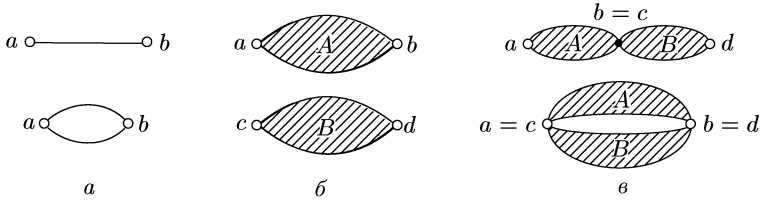


Рис. 6.19

Индуктивный переход. Если сети A и B (рис. 6.19, *б*) являются π-сетями, то и сети, представленные на рис. 6.19, *в*, также являются π-сетями.

3.36. Пусть $\varphi(\Gamma)$ — число цепей сети Γ, а $\varphi(n) = \max \varphi(\Gamma)$, где максимум берется по всем π-сетям с n ребрами. Положим $s(n) = 0$ при $n = 3m$, $s(n) = 2$ при $n = 3m + 1$, $s(n) = 1$ при $n = 3m + 2$. Показать, что $\varphi(1) = 1$ и $\varphi(n) = (2/3)^{s(n)} \cdot 3^{]n/3[}$ при $n > 1$.

Длиной цепи называется число ребер в ней. *Кратчайшей цепью* называется цепь наименьшей длины. *Длиной* сети называется длина ее кратчайшей цепи. *Разрезом* называется множество ребер сети, удаление которых разрушает все цепи. Разрез называется *тупиковым*, если никакое его подмножество не является разрезом. Разрез называется *минимальным*, если он имеет минимальное число ребер. Число ребер в минимальном разрезе называется *шириной сети*.

3.37. Доказать, что в π-сети пересечение любой простой цепи и любого тупикового разреза содержит ровно одно ребро.

3.38. Доказать, что для любой сильно связной сети с m ребрами, имеющей длину l и ширину t, справедливо неравенство $m \geqslant lt$.

Глава VII

ЭЛЕМЕНТЫ ТЕОРИИ КОДИРОВАНИЯ

§ 1. Алфавитное кодирование. Критерий однозначности кодирования

Пусть $\mathfrak{A} = \{a_1, a_2, \ldots, a_r\}$ — алфавит. Конечная последовательность символов из $\mathfrak{A}$ называется *словом* в алфавите $\mathfrak{A}$. Через $S(\mathfrak{A})$ будет обозначаться множество всех слов в алфавите $\mathfrak{A}$. Пусть $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ — два алфавита. Однозначное отображение F произвольного подмножества $M \subseteq S(\mathfrak{A})$ на подмножества $C \subseteq S(\mathfrak{B})$ называется *кодированием*. При этом слова из M называются *сообщениями*, а их образы — *кодами сообщений*. Множество C называется *кодом множества сообщений* M. Алфавит $\mathfrak{A}$ называется *алфавитом сообщений*, а алфавит $\mathfrak{B}$ — *кодирующим алфавитом*. Кодирование F (или код C) называется *взаимно однозначным* или *однозначно декодируемым*, если каждый код сообщения является кодом ровно одного сообщения.

Пусть задано отображение Σ букв алфавита $\mathfrak{A}$ в множество $S(\mathfrak{B})$ вида

$$\Sigma: \begin{cases} a_1 \to B_1, \\ a_2 \to B_2, \\ \ldots\ldots\ldots \\ a_r \to B_r. \end{cases}$$

Кодирование F_Σ: $S(\mathfrak{A}) \to S(\mathfrak{B})$, удовлетворяющее свойствам:

1) $F_\Sigma(a_i) = B_i \quad (i = 1, \ldots, r)$;

2) $F_\Sigma(a_{i_1} a_{i_2} \ldots a_{i_k}) = B_{i_1} B_{i_2} \ldots B_{i_k}$,

где под произведением слов AB понимается приписывание слова B справа к слову A, называется *алфавитным кодированием, задаваемым схемой* Σ. Множество кодовых слов $\{B_1, B_2, \ldots, B_r\}$ будет обозначаться через $C(\Sigma)$ и называться *кодом алфавита в схеме* Σ.

Если $B = B_1 B_2$, то B_1 называется *префиксом*, а B_2 — *суффиксом слова* B. Префикс (суффикс) слова B называется *собственным*, если он отличен от пустого слова (обозначаемого через Λ) и от самого слова B. *Длиной слова* называется число букв в нем. Схема Σ (код $C(\Sigma)$, кодирование F_Σ) *обладает свойством префикса*, если для любых слов B_i и B_j $(i \neq j)$ из $C(\Sigma)$ слово B_i не является префиксом

слова B_j. Код $S(\Sigma)$, обладающий свойством префикса, называется еще *префиксным кодом.*

Префиксный код $C(\Sigma)$ называется *полным*, если для каждого слова P в кодирующем алфавите справедливо одно из следующих утверждений: 1) P является префиксом (не обязательно собственным) некоторого слова из $C(\Sigma)$; 2) некоторое слово из $C(\Sigma)$ является собственным префиксом слова P.

Один из алгоритмов распознавания однозначности декодирования заключается в следующем. Пусть $C(\Sigma)$ — алфавитный код. Пусть S_1 — множество слов β, обладающих следующим свойством: слово β является собственным суффиксом некоторого кодового слова B и собственным префиксом некоторого кодового слова B_1, отличного от B, и, кроме того, не является кодовым словом кода $C(\Sigma)$. Положим $S = S_1 \cup \{\Lambda\}$. Сопоставим коду $C(\Sigma)$ ориентированный граф G_Σ, вершинами которого являются элементы множества S и в котором дуга, ведущая из вершины α в вершину β $(\beta \neq \alpha)$, присутствует тогда и только тогда, когда существует кодовое слово B и последовательность $P = B_{i_1}, \ldots, B_{i_s}$ кодовых слов такие, что $B = \alpha B_{i_1} \ldots B_{i_s} \beta$. При этом последовательность P может быть и пустой, если ни одна из вершин α, β не совпадает с Λ. Дуге, ведущей из α в β, припишем последовательность P. Дуги вида (α, α), ведущие из α в α, рассматриваться не будут, за исключением случая $\alpha = \Lambda$. Дуга (петля) из Λ в Λ присутствует в графе G_Σ тогда и только тогда, когда существуют слово B и последовательность кодовых слов $P = B_1, \ldots, B_s$, где $s \geqslant 2$, такие, что $B = B_1 \ldots B_s$. Петле (Λ, Λ) припишем слово B.

Справедливы следующие утверждения.

Теорема 1 (Ал. А. Марков). *Алфавитный код $C(\Sigma)$ является однозначно декодируемым тогда и только тогда, когда в графе G_Σ отсутствуют контуры и петли, проходящие через вершину Λ.*

Теорема 2 (неравенство Макмиллана). *Для всякого однозначно декодируемого кода в q-буквенном кодирующем алфавите с набором длин кодовых слов $l_1, l_2, \ldots, l_r$ выполнено неравенство*

$$\sum_{i=1}^{r} \frac{1}{q^{l_i}} \leqslant 1.$$

Теорема 3. *Для всякого однозначно декодируемого кода $C(\Sigma)$ в кодирующем алфавите $\mathfrak{B}$ с набором длин кодовых слов $l_1, l_2, \ldots, l_r$ можно построить префиксный код $C(\Sigma')$ с тем же набором длин кодовых слов и в том же кодирующем алфавите.*

Следствие. *Пусть $l_1, l_2, \ldots, l_r$ — натуральные числа такие, что $\sum_{i=1}^{r} q^{-l_i} \leqslant 1$. Тогда существует префиксный код в q-буквенном кодирующем алфавите с набором длин кодовых слов вида $\{l_1, l_2, \ldots, l_r\}$.*

Пример 1. Выяснить, является ли кодирование F_Σ взаимно однозначным, если $C(\Sigma) = \{a, ab, cab, baac\}$. Если да, то указать слово, декодируемое двумя способами.

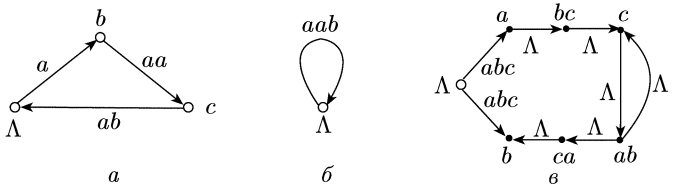


Рис. 7.1

Решение. Граф G_Σ показан на рис. 7.1, *а*. Существует контур, проходящий через вершину Λ. Выписывая слова, приписанные вершинам и дугам контура, получаем слово, декодируемое неоднозначно: $\overbrace{\underbrace{a}\ \underbrace{baac}\ \underbrace{ab}} = \underbrace{ab}\ \underbrace{a}\ \underbrace{a}\ \underbrace{cab}$.

Пример 2. Та же задача для кода $C(\Sigma) = \{a,\ b,\ aab\}$.

Решение. Граф G_Σ показан на рис. 7.1, *б*. Граф содержит петлю $(\Lambda,\ \Lambda)$. Код не является однозначно декодируемым. Слово, декодируемое неоднозначно, есть: $\overbrace{aab} = \underbrace{a}\ \underbrace{a}\ \underbrace{b}$.

Пример 3. Та же задача для кода

$$C(\Sigma) = \{cab,\ abc,\ bcc,\ abca,\ abcb\}.$$

Решение. Граф G_Σ показан на рис. 7.1, *в*. Контуров и петель, проходящих через Λ, нет. Код является однозначно декодируемым.

1.1. Выяснить, обладает ли код C свойством префикса:

1) $C = \{a,\ ba,\ bb,\ bbba\}$; 2) $C = \{ab,\ bb,\ ba,\ aab\}$;

3) $C = \{ac,\ c,\ bb,\ abc,\ bac,\ abb,\ abcb\}$; 4) $C = \{a,\ ba,\ cab,\ acb\}$;

5) $C = \{a,\ ba,\ bba,\ \ldots,\ (b)^n a,\ \ldots\}$;

6) $C = \{a,\ ba,\ \ldots,\ c(a)^n,\ \ldots\}$.

1.2. Выяснить, является ли код C с кодирующим алфавитом $\{0,\ 1,\ 2\}$ однозначно декодируемым:

1) $C = \{01,\ 201,\ 112,\ 122,\ 0112\}$;

2) $C = \{001,\ 021,\ 102,\ 201,\ 001121,\ 01012101\}$;

3) $C = \{0,\ 01,\ 0010001001\}$;

4) $C = \{20,\ 01202,\ 22,\ 2001,\ 2012010,\ 10201121,\ 1112\}$;

5) $C = 01,\ 011,\ 100,\ 2100,\ 101210,\ 001210\}$;

6) $C = \{01,\ 011,\ 100,\ 2100,\ 10110,\ 00112\}$;

7) $C = \{01,\ 12,\ 021,\ 0102,\ 10112\}$;

8) $C = \{01,\ 12,\ 012,\ 111,\ 0102,\ 10112,\ 01112\}$;

9) $C = \{01,\ 12,\ 012,\ 0102,\ 020112\}$;

10) $C = \{01,\ 10,\ 210,\ 121,\ 0210,\ 0112\}$;

11) $C = \{01,\ 10,\ 210,\ 201,\ 0210,\ 011022,\ 2221\}$;

12) $C = \{01,\ 10,\ 210,\ 201,\ 0210,\ 011022,\ 221\}$;

13) $C = \{01,\ 10,\ 210,\ 201,\ 0210,\ 011022\}$;

14) $C = \{01,\ 12,\ 011,\ 01210,\ 20120,\ 2011220\}$;
15) $C = \{01,\ 12,\ 011,\ 01210,\ 201120,\ 2011220\}$;
16) $C = \{000,\ 0100,\ 10,\ 1001,\ 0010010\}$;
17) $C = \{01,\ 12,\ 01121,\ 21201\}$.

1.3. Выяснить, является ли слово P в алфавите $\{0, 1, 2\}$ кодом сообщения в кодировании, задаваемом схемой

$$\Sigma: \begin{cases} 1 \to 10 \\ 2 \to 12 \\ 3 \to 012 \\ 4 \to 101 \\ 5 \to 2100 \end{cases}$$

Если да, то выяснить, является ли P кодом ровно одного сообщения:
1) $P = 10120121012100$; 2) $P = 1012101201210012$;
3) $P = 0121001210201$; 4) $P = 120120121001210$;
5) $P = 1010122100$; 6) $P = 12101210012$; 7) $P = 101212101012$;
8) $P = 1010012100101$.

1.4. Выбрать максимальное по числу элементов подмножество B множества A с условием, что двоичные разложения наименьшей длины чисел из B представляют собой
а) префиксный код; б) однозначно декодируемый код:
1) $A = \{1,\ 5,\ 6,\ 7,\ 12,\ 13,\ 17\}$; 2) $A = \{1,\ 3,\ 6, 8, 10, 13, 19, 33, 37\}$;
3) $A = \{2,\ 6,\ 7,\ 9,\ 12,\ 15,\ 18,\ 35,\ 36,\ 37\}$;
4) $A = \{1,\ 2,\ 5,\ 8,\ 9,\ 10,\ 13,\ 15\}$;
5) $A = \{2,\ 3,\ 7,\ 8,\ 11,\ 12,\ 13,\ 14\}$;
6) $A = \{3,\ 5,\ 6,\ 9,\ 10,\ 13,\ 17\}$; 7) $A = \{1,\ 2,\ 5,\ 8,\ 9,\ 12,\ 13,\ 14\}$;
8) $A = \{5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 11,\ 12,\ 13\}$;
9) $A = \{4,\ 6,\ 7,\ 10,\ 13,\ 15,\ 20,\ 23,\ 25\}$;
10) $A = \{5,\ 7,\ 9,\ 10,\ 12,\ 14,\ 17,\ 23,\ 24\}$.

1.5. Для кода C найти слово минимальной длины, декодируемое неоднозначно:
1) $C = \{10,\ 01,\ 12,\ 012,\ 2100,\ 12011,\ 12010\}$;
2) $C = \{0,\ 101010,\ 01010101\}$; 3) $C = \{0,\ (10)^{k+1},\ (01)^k\}$;
4) $C = \{010,\ 101,\ 01010,\ (01)^k\}$, $k = 3s + 1$;
5) $C = \{0,\ (10)^k,\ (01)^m\}$;
6) $C = \{001,\ 011,\ 100,\ 110,\ (1100)^k\}$, $k = 3s$;
7) $C = \{0,\ 10,\ 11,\ (101)^k\}$; 8) $C = \{01,\ 10,\ 11,\ (110)^k\}$, $k = 2s$;
9) $C = \{0^k,\ 0^m\}$; 10) $C = \{(01)^k 0,\ 0(10)^{k+1},\ 1(01)^m\}$;
11) $C = \{0,\ 0^k 1,\ 1(0)^m\}$; 12) $C = \{(01)^k,\ (10)^m,\ (01)^s 0\}$;
13) $C = \{(01)^k,\ (01)^{k+1}0,\ (10)^{k+2}1,\ (10)^k 1\}$;
14) $C = \{0,\ 0^k 1(0)^m,\ (1(0)^m)^2 1\}$; 15) $C = \{(01)^k,\ (10)^{k+1};\ (01)^k 0\}$;
16) $C = \{(01)^k,\ (01)^{k+1}0,\ (10)^{k+2}\}$.

1.6. Построить двоичный префиксный код C с заданной последовательностью L длин кодовых слов:

1) $L = (1,\ 2,\ 3,\ 3)$; 2) $L = (1,\ 2,\ 4,\ 4,\ 4,\ 4)$;

3) $L = (2,\ 2,\ 3,\ 3,\ 4,\ 4,\ 4,\ 4)$; 4) $L = (2,\ 2,\ 2,\ 4,\ 4,\ 4)$;

5) $L = (2,\ 2,\ 3,\ 4,\ 4)$; 6) $L = (2,\ 3,\ 3,\ 3,\ 4,\ 4)$.

1.7. С помощью неравенства Макмиллана выяснить, может ли набор чисел L быть набором длин кодовых слов однозначно декодируемого кода в q-значном алфавите:

1) $L = (1,\ 2,\ 2,\ 3),\ q = 2$; 2) $L = (l,\ 2,\ 2,\ 3),\ q = 3$;

3) $L = (2,\ 2,\ 2,\ 4,\ 4,\ 4),\ q = 2$;

4) $L = (1,\ 2,\ 2,\ 2,\ 3,\ 3,\ 3,\ 3),\ q = 3$;

5) $L = (1,\ 1,\ 2,\ 2,\ 3,\ 3,\ 3),\ q = 3$;

6) $L = (1,\ 1,\ 1,\ 2,\ 2,\ 2,\ 2,\ 3),\ q = 4$.

1.8. Пусть в алфавитом двоичном коде C таком, что $|C| > 2^n$, каждое слово имеет длину, не превышающую n.

1) Может ли код C быть однозначно декодируемым?

2) Может ли код C быть префиксным?

1.9. Пусть $C(\Sigma)$ — алфавитный код со схемой Σ, $|C(\Sigma)| = r$, сумма длин кодовых слов равна N, а максимальная из длин кодовых слов равна l. Доказать, что код $C(\Sigma)$ является однозначно декодируемым, если однозначно декодируются все коды сообщений, имеющие длину, не превышающую $(l-1)(N-r+1)+1$.

1.10. Пусть k — наименьшая, а l — наибольшая из длин кодовых слов алфавитного кода $C(\Sigma)$ и N — сумма длин кодовых слов. Показать, что для установления однозначной декодируемости кода $C(\Sigma)$ достаточно исследовать на однозначную декодируемость все коды сообщений, имеющих длину не больше Nl/k в алфавите сообщений.

1.11. Пусть M — множество, состоящее из r непустых слов в алфавите, имеющем q букв. Показать, что:

1) в M найдется слово длины не меньше $\log_q(q + r(q-1)) - 1$;

2) для всякого $\varepsilon > 0$ доля тех слов из M, длина которых не превосходит $(1-\varepsilon)\log_q(1 + r(q-1))$, не больше

$$\left(\frac{4}{3}\right)^{1-\varepsilon} (r(q-1))^{-\varepsilon} \quad \text{при} \quad r \geqslant 2, \quad q \geqslant 2.$$

1.12. Доказать, что префиксный код $C(\Sigma)$ с q-буквенным кодирующим алфавитом тогда и только тогда является полным, когда выполнено равенство $\sum\limits_{i=1}^{r} q^{-l_i} = 1$, где $l_1, l_2, \ldots, l_r$ — длины кодовых слов из $C(\Sigma)$.

1.13. Пусть $l_1, l_2, \ldots, l_r$ — целые неотрицательные числа такие, что $\sum\limits_{i=1} 2^{l_i} \leqslant 2^n$. Доказать, что в кубе B^n существуют попарно непересекающиеся грани $q_1, q_2, \ldots, q_r$, размерности которых равны соот-

ветственно $l_1, l_2, \ldots, l_n$. Напомним, что *k-мерной гранью куба B^n* называется всякое множество g, для которого существуют подмножество $\{i_1, i_2, \ldots, i_{n-k}\}$ множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ и набор $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{n-k}$ такие, что

$$g = \{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in B^n \mid \alpha_{ij} = \sigma_j, \quad j = 1, \ldots, n-k\}.$$

1.14. Пусть код $C(\Sigma)$ состоит из двух непустых слов и не является однозначно декодируемым. Доказать, что наименьшая длина декодируемого слова не превышает $2l - 1$, где l — наибольшая из длин кодовых слов. Привести пример кода, для которого эта верхняя оценка достижима.

1.15. Пусть $X(C)$ — наименьшая длина неоднозначно декодируемого слова в кодирующем алфавите кода C. Положим $X(N, r) = \max X(C)$, где максимум берется по всем неоднозначно декодируемым кодам C с r кодовыми словами и суммой длин кодовых слов, равной N. Доказать, что:

1) существует положительная константа c_1 такая, что $X(N, 3) \leqslant c_1 N^2$;

2) для всякого k существуют такие число $N \geqslant k$ и код $C = \{B_1, B_2, B_3\}$, что $\sum_{i=1}^{3} l(B_i) = N$ и $X(C) \geqslant c_2 N^2$, где c_2 — константа, не зависящая от k.

§ 2. Коды с минимальной избыточностью

Пусть заданы алфавиты $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_r\}$, $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_q\}$ и набор вероятностей $P = (p_1, p_2, \ldots, p_r)$, $p_i > 0$, $\sum_{i=1}^{r} p_i = 1$. Пусть $C = \{w_1, w_2, \ldots, w_r\}$ — алфавитный префиксный код в алфавите B такой, что слово $w_i \in C$ является кодом буквы $a_i \in A$, и l_i — длина слова w_i $(i = 1, \ldots, r)$. Число $l_{\text{ср}}(C, P) = \sum_{i=1}^{n} l_i p_i$ называется *избыточностью кода C* или *средней длиной кодового слова* в коде C. Положим $l^*(P) = \inf_C l_{\text{ср}}(C, P)$. Код C^* такой, что $l_{\text{ср}}(C^*, P) = l^*(P)$, называется *$q$-ичным кодом с минимальной избыточностью для набора вероятностей P* (или *оптимальным (P, q)-кодом*).

Метод Хаффмена для построения оптимальных $(P, 2)$-кодов опирается на следующие утверждения.

1. Среди кодовых слов максимальной длины l оптимального $(P, 2)$-кода найдутся два слова, имеющие один и тот же префикс длины $l - 1$.

2. Если слова ω_i, ω_j оптимального (P, q)-кода соответствуют вероятностям p_i, p_j и $p_i > p_j$, то длины $l(w_i)$ и $l(w_j)$ этих слов связаны неравенством $l(w_i) \leqslant l(w_j)$.

3. Теорема редукции. *Пусть* $C = (w_1, w_2, \ldots, w_r)$ — *двоичный код,* $P = (p_1, p_2, \ldots, p_r)$, $p_1 \geqslant p_2 \geqslant \ldots \geqslant p_r$, $p_i > 0$, $\sum_{i=1}^{r} p_i = 1$ — *распределение вероятностей. Пусть* w_i, w_j (*слова, имеющие максимальную длину* l *и соответствующие вероятностям* p_i, p_j) *обладают одинаковыми префиксами* w *длины* $l-1$. *Положим* $p' = p_i + p_j$ *и рассмотрим распределение вероятностей* $P' = (p_1, \ldots, p_{k-1}, p', p_{k+1}, \ldots, p_{i-1}, p_{i+1}, \ldots, p_{j-1}, p_{j+1}, \ldots, p_r)$, *в котором вероятности расположены в порядке невозрастания. Код* $C' = (C \cup \{w\}) \backslash \{w_i, w_j\}$ *является* $(P', 2)$*-оптимальным тогда и только тогда, когда код* C *является* $(P, 2)$*-оптимальным.*

Процедура Хаффмена для построения оптимального $(P, 2)$-кода заключается в следующем. Пусть вероятности в распределении $P = (p_1, p_2, \ldots, p_r)$ расположены в порядке невозрастания. Исключим из P вероятности p_{r-1} и p_r, а их сумму p вставим в оставшийся набор таким образом, чтобы в получившемся новом наборе вероятности не возрастали. Эта процедура повторяется до тех пор, пока не получится набор из двух вероятностей. Для такого набора вероятностей оптимальным является код, в котором каждой букве из алфавита сообщений A ставится в соответствие 0 или 1. Исходя из полученного на некотором шаге оптимального кода C' в соответствии с теоремой редукции можно перейти к расширенному оптимальному коду C, имеющему мощность, на единицу большую, чем код C'. Продолжая этот процесс, придем к искомому оптимальному $(P, 2)$-коду с r сообщениями.

Пример 1. Пусть $A = \{1, 2, \ldots, 6\}$, $B = \{0, 1\}$, $P = (0{,}4;\ 0{,}3;\ 0{,}1;\ 0{,}1;\ 0{,}05;\ 0{,}05)$, $r = 6$.

Схема построения оптимального $(P, 2)$-кода выглядит следующим образом:

A	P	P^{I}	P^{II}	P^{III}	P^{IV}	C^{IV}	C^{III}	C^{II}	C^{I}	C
1	0,4	0,4	0,4	0,4	0,6	0	1	1	1	1
2	0,3	0,3	0,3	0,3	0,4	1	00	00	00	00
3	0,1	0,1	0,2	0,3			01	010	011	011
4	0,1	0,1	0,1					011	0100	0100
5	0,05	0,1							0101	01010
6	0,05									01011

Всякому префиксному коду C в q-ичном алфавите B с заданным набором вероятностей P можно сопоставить помеченное дерево $D(C, P, q)$, называемое в дальнейшем *деревом кода* C, следующим образом. Сопоставим каждому кодовому слову висячую вершину, каждому собственному префиксу внутреннюю вершину, причем одинаковым префиксам разных кодовых слов сопоставим одну и ту

же внутреннюю вершину. Пустому префиксу сопоставим вершину, называемую *корнем дерева*. Соединим две вершины, соответствующие префиксам v и w, ребром с пометкой b, если $v = wb$ или $w = vb$, где b — буква алфавита B. Висячим вершинам припишем вероятности, с которыми встречаются соответствующие кодовые слова. Дерево $D(C, P, q)$ устроено так, что последовательность пометок, приписанных ребрам цепи, соединяющей корень дерева с висячей вершиной, представляет собой соответствующее кодовое слово. Непомеченное корневое дерево, полученное из $D(C, P, q)$ путем отбрасывания пометок, будем называть *остовом дерева* $D(C, P, q)$.

Пример 2. Пусть задан префиксный код $C = \{b, c, aa, ab, aca, acb, acc\}$ и набор вероятностей, соответствующих кодовым словам, есть $P = \left(\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{3}, \frac{1}{27}, \frac{1}{27}, \frac{1}{27}, \frac{1}{9}\right)$. Дерево $D(C, P, q)$ показано на рис. 7.2.

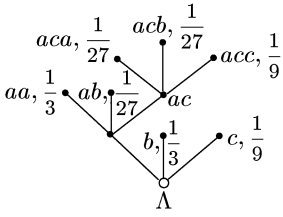


Рис. 7.2

Дерево $D(C, P, q)$, соответствующее оптимальному (P, q)-коду C, будет называться *оптимальным*. *Порядком ветвления вершины* v в дереве D называется число ребер, инцидентных вершине v и не лежащих на цепи, соединяющей вершину v с корнем. Будем говорить, что *вершина принадлежит* k*-му ярусу дерева*, если цепь, соединяющая эту вершину с корнем, содержит k ребер. Будем говорить, что *ребро принадлежит* k*-му ярусу*, если оно соединяет вершины k-го и $(k+1)$-го ярусов. Дерево D называется (r, q)*-насыщенным*, если порядки ветвления всех его вершин, за исключением, может быть, одной вершины, лежащей в последнем ярусе, равны 0 или q, а порядок ветвления этой исключительной вершины равен q_0, где

$$q_0 = \begin{cases} q-1, & \text{если } \dfrac{r}{q-1} \text{ — целое число,} \\ r - \left[\dfrac{r}{q-1}\right](q-1) & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Построение (P, q)-оптимальных кодов C, обладающих (r, q)-насыщенными деревьями, производится аналогично построению $(P, 2)$-оптимальных кодов.

Пример 3. Построить $(P, 3)$-оптимальный код для $P = (0{,}4;\ 0{,}3;\ 0{,}1;\ 0{,}1;\ 0{,}05;\ 0{,}05)$.

Решение. Поскольку $r = 6$, $q = 3$ и $r/q - 1$ — целое число, то $q_0 = q - 1 = 2$. Число q_0 дает количество «склеиваемых» на первом шаге вероятностей. Построение кода проведем в два этапа, как и в примере 1. Сначала редуцируем распределение P, а затем, построив оптимальный код для трех сообщений, расширим его до $r = 6$. Схема построения оптимального $(P, 3)$-кода имеет вид

A	P	P^{I}	P^{II}	C^{II}	C^{I}	C
1	0,4	0,4	0,4	0	0	0
2	0,3	0,3	0,3	1	1	1
3	0,1	0,1	0,3	2	20	20
4	0,1	0,1			21	21
5	0,05	0,1			22	220
6	0,05					221

2.1. С помощью процедуры Хаффмена построить двоичный код с минимальной избыточностью для набора вероятностей P:

1) $P = (0{,}4;\ 0{,}2;\ 0{,}2;\ 0{,}2)$; 2) $P = (0{,}7;\ 0{,}1;\ 0{,}1;\ 0{,}1)$;
3) $P = (0{,}2;\ 0{,}2;\ 0{,}2;\ 0{,}2;\ 0{,}2)$;
4) $P = (0{,}5;\ 0{,}2;\ 0{,}1;\ 0{,}09;\ 0{,}08;\ 0{,}03)$;
5) $P = (0{,}4;\ 0{,}3;\ 0{,}08;\ 0{,}06;\ 0{,}04;\ 0{,}04;\ 0{,}04;\ 0{,}04)$;
6) $P = (0{,}3;\ 0{,}3;\ 0{,}2;\ 0{,}04;\ 0{,}03;\ 0{,}03;\ 0{,}03;\ 0{,}03;\ 0{,}03;\ 0{,}01)$;
7) $P = (0{,}3;\ 0{,}2;\ 0{,}1;\ 0{,}1;\ 0{,}06;\ 0{,}06;\ 0{,}06;\ 0{,}06;\ 0{,}06)$;
8) $P = (0{,}4;\ 0{,}2;\ 0{,}1;\ 0{,}05;\ 0{,}05;\ 0{,}05;\ 0{,}05;\ 0{,}05;\ 0{,}05)$.

2.2. Построить оптимальный (P, q)-код для заданных P и q:

1) $P = (0{,}3;\ 0{,}2;\ 0{,}2;\ 0{,}2;\ 0{,}1)$, $q = 3$;
2) $P = (0{,}4;\ 0{,}2;\ 0{,}1;\ 0{,}1;\ 0{,}1;\ 0{,}1)$, $q = 3$;
3) $P = (0{,}3;\ 0{,}3;\ 0{,}1;\ 0{,}1;\ 0{,}1;\ 0{,}1)$, $q = 3$;
4) $P = (0{,}4;\ 0{,}1;\ 0{,}1;\ 0{,}1;\ 0{,}1;\ 0{,}08;\ 0{,}06;\ 0{,}06)$, $q = 3$;
5) $P = (0{,}3;\ 0{,}2;\ 0{,}1;\ 0{,}1;\ 0{,}1;\ 0{,}1;\ 0{,}1)$, $q = 4$;
6) $P = (0{,}21;\ 0{,}20;\ 0{,}17;\ 0{,}16;\ 0{,}12;\ 0{,}08;\ 0{,}04;\ 0{,}02)$, $q = 4$;
7) $P = (0{,}20;\ 0{,}15;\ 0{,}15;\ 0{,}13;\ 0{,}12;\ 0{,}11;\ 0{,}11;\ 0{,}03)$, $q = 4$;
8) $P = (0{,}23;\ 0{,}22;\ 0{,}18;\ 0{,}17;\ 0{,}08;\ 0{,}04;\ 0{,}02;\ 0{,}02;\ 0{,}02;\ 0{,}02)$, $q = 4$;
9) $P = \left(\frac{1}{3};\ \frac{1}{3};\ \frac{1}{9};\ \frac{1}{9};\ \frac{1}{27};\ \frac{1}{27};\ \frac{1}{54};\ \frac{1}{54}\right)$, $q = 3$;
10) $P = \left(\frac{1}{4};\ \frac{1}{4};\ \frac{1}{16};\ \frac{1}{16};\ \frac{1}{16};\ \frac{1}{16};\ \frac{1}{20};\ \frac{1}{20};\ \frac{1}{20};\ \frac{1}{20};\ \frac{1}{20}\right)$, $q = 4$.

2.3. Для заданного q указать набор вероятностей P, при котором существует q-ичный префиксный код с заданным набором длин кодовых слов L, являющийся $(P,\ q)$-оптимальным. Построить этот код:

1) $q = 2$, $L = (1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 5)$; 2) $q = 2$, $L = (2,\ 2,\ 2,\ 3,\ 3)$;
3) $q = 2$, $L = (2,\ 2,\ 3,\ 3,\ 4,\ 4,\ 4,\ 4)$;
4) $q = 2$, $L = (1,\ 2,\ 4,\ 4,\ 4,\ 4)$; 5) $q = 3$, $L = (1,\ 1,\ 2,\ 2)$;
6) $q = 3$, $L = (1,\ 1,\ 2,\ 3,\ 3,\ 3)$; 7) $q = 3$, $L = (1,\ 2,\ 2,\ 2,\ 2,\ 2,\ 2)$;
8) $q = 4$, $L = (1,\ 1,\ 2,\ 2,\ 2,\ 2,\ 2,\ 2)$;
9) $q = 4$, $L = (1,\ 1,\ 1,\ 2,\ 2,\ 2,\ 3,\ 3,\ 3)$;
10) $q = 4$, $L = (1,\ 1,\ 2,\ 2,\ 2,\ 2,\ 2,\ 2)$.

2.4. Для префиксного кода C с заданным набором вероятностей P построить дерево $D(C, P, q)$, соответствующее коду. Выяснить, является ли код C оптимальным:

1) $C = \{1, 00, 01, 02, 20, 21\}$, $P = (0{,}5;\ 0{,}1;\ 0{,}1;\ 0{,}1;\ 0{,}1;\ 0{,}1)$;

2) $C = \{00, 01, 10, 110, 111\}$, $P = \left(\frac{1}{4}; \frac{1}{4}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \frac{1}{8}\right)$;

3) $C = \{0, 10, 110, 1110, 1111\}$, $P = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{4}; \frac{1}{8}; \frac{1}{16}; \frac{1}{16}\right)$;

4) $C = \{0, 1, 20, 21, 220, 221\}$, $P = \left(\frac{1}{3}; \frac{1}{3}; \frac{1}{9}; \frac{1}{9}; \frac{1}{18}; \frac{1}{18}\right)$;

5) $C = \{0, 10, 11, 120, 121, 122\}$, $P = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{6}; \frac{1}{12}; \frac{1}{12}; \frac{1}{12}; \frac{1}{12}\right)$;

6) $C = \{0, 20, 21, 220, 221, 222\}$, $P = \left(\frac{1}{2}; \frac{1}{6}; \frac{1}{6}; \frac{1}{12}; \frac{1}{12}; \frac{1}{12}; \frac{1}{12}\right)$;

7) $C = \{0, 10, 11, 20, 210, 222\}$, $P = \left(\frac{1}{3}; \frac{1}{6}; \frac{1}{6}; \frac{1}{6}; \frac{1}{12}; \frac{1}{12}\right)$;

8) $C = \{0, 10, 11, 12, 20, 22\}$, $P = \left(\frac{1}{6}; \frac{1}{6}; \frac{1}{6}; \frac{1}{6}; \frac{1}{6}; \frac{1}{6}\right)$;

9) $C = \{0, 10, 11, 120, 121, 122\}$, $P = \left(\frac{1}{6}; \frac{1}{6}; \frac{1}{6}; \frac{1}{6}; \frac{1}{6}; \frac{1}{6}\right)$;

10) $C = \{0, 1, 20, 21, 220, 221\}$, $P = \left(\frac{1}{6}; \frac{1}{6}; \frac{1}{6}; \frac{1}{6}; \frac{1}{6}; \frac{1}{6}\right)$.

2.5. а) Выяснить, какие из найденных в задаче 2.4 деревьев являются насыщенными.

б) Выяснить, какие из этих деревьев могут быть остовами оптимальных кодовых деревьев.

2.6. Верны ли следующие утверждения?

1) Оптимальное дерево $D(C, P, 2)$ является насыщенным.

2) Оптимальное дерево $D(C, P, q)$, $q > 2$, является насыщенным.

3) В оптимальном дереве нет вершин с порядком ветвления, равным 1.

4) В оптимальном дереве все вершины, кроме одной, имеют порядки ветвления либо 0, либо q.

5) В оптимальном дереве все вершины, за исключением вершин яруса $l - 1$, где l — максимальная длина кодового слова, имеют порядок ветвления либо 0, либо q.

6) Всякое непомеченное (r, q)-насыщенное дерево можно пометить так, что получится оптимальное кодовое дерево.

2.7. 1*) Доказать, что префиксный код с q-значным кодирующим алфавитом и совокупностью длин кодовых слов $L = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r)$ является полным, если $\sum_{i=1}^{r} q^{-\lambda_i} = 1$, т. е. если в неравенстве Макмиллана имеет место равенство.

2) Используя теорему редукции, доказать следующее: при $q = 2$ всякий код с минимальной избыточностью является полным.

3) Верно ли утверждение п. 2) для $q > 2$?

2.8. Доказать, что во всяком коде с минимальной избыточностью среди кодовых слов наибольшей длины найдутся два слова, различающихся только последней буквой.

2.9. Доказать, что в двоичном коде с минимальной избыточностью число слов максимальной длины четно.

2.10. Выяснить, существует ли двоичный код с минимальной избыточностью, обладающий заданной последовательностью L длин кодовых слов:

1) $L = (2, 3, 3, 3)$; 2) $L = (3, 3, 3, 3)$; 3) $L = (1, 3, 3, 3, 3)$;
4) $L = (1, 2, 3, 4)$; 5) $L = (1, 2, 3, 4, 4)$; 6) $L = (1, 2, 3, 4, 4, 4)$;
7) $L = (1, 2, 3, 4, 4, 4, 4)$; 8) $L = (1, 3, 3, 3, 3, 3, 3)$;
9) $L = (1, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4)$; 10) $L = (3, 3, 3, 3, 3, 3)$.

2.11. Выяснить, существует ли q-ичный код с минимальной избыточностью, обладающий заданной последовательностью L длин кодовых слов:

1) $L = (1, 1, 2)$, $q = 3$; 2) $L = (1, 1, 2, 2)$, $q = 3$;
3) $L = (1, 1, 2, 2, 2, 2)$, $q = 3$; 4) $L = (1, 2, 2, 2, 2, 2, 2)$, $q = 3$;
5) $L = (2, 2, 2, 2, 2, 2, 2)$, $q = 3$; 6) $L = (\underbrace{3, 3, \ldots, 3}_{26 \text{ раз}})$, $q = 3$;
7) $L = (\underbrace{3, 3, \ldots, 3}_{25 \text{ раз}})$, $q = 3$;
8) $L = (1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 5)$, $q = 3$;
9) $L = (\underbrace{2, 2, \ldots, 2}_{13 \text{ раз}}, 3, 3, 3, 3)$, $q = 4$;
10 $L = (\underbrace{2, 2, \ldots, 2}_{11 \text{ раз}}, 3, 3, 3)$, $q = 4$.

2.12. Показать, что если $q < r \leqslant q^s - q + 1$, $s = 2, 3, \ldots$, то в q-ичном коде с минимальной избыточностью, содержащем r кодовых слов, найдутся два слова разной длины.

2.13. Код называется *почти равномерным*, если длины его кодовых слов различаются не более чем на единицу.

1) Показать, что для всякого натурального r найдется почти равномерный код мощности r, являющийся кодом с минимальной избыточностью для набора вероятностей P вида $(1/r, 1/r, \ldots, 1/r)$.

2) Существуют ли наборы вероятностей, отличные от P, для которых почти равномерный двоичный код является кодом с минимальной избыточностью?

2.14. Показать, что максимальная длина кодового слова оптимального двоичного кода мощности r не превосходит $r - 1$.

2.15. Указать такой набор вероятностей $P = (p_1, p_2, \ldots, p_r)$, что набор длин кодовых слов двоичного кода с минимальной избыточностью для набора P имеет вид $(1, 2, 3, \ldots, r-2, r-1, r-1)$.

2.16. Доказать (индукцией по r), что сумма длин кодовых слов двоичного кода с минимальной избыточностью с r сообщениями не превосходит $\frac{1}{2}(r+2)(r-1)$.

2.17. Используя теорему редукции, показать, что число оптимальных двоичных кодов с r кодовыми словами не превосходит $2^r(r-1)!$.

2.18. 1) Доказать, что число схем Σ: $a_i \to B_i$ $(i = 1, \ldots, r)$, где a_i — буквы алфавита A, $|A| = r$, B_i — слова в алфавите B длины не больше $r-1$ $(|B| = q)$, не превосходит q^{r^2}.

2) Префиксный алфавитный код со схемой Σ: $a_i \to B_i$ $(i = 1, \ldots, r)$ будем называть *тупиковым*, если после удаления любой буквы из любого слова B_i код перестает быть префиксным.

а) Верно ли, что оптимальный код является тупиковым?

б) Доказать, что число тупиковых алфавитных q-ичных кодов мощности r не превосходит $(4q)^{2r}$.

Указание. Оценить число помеченных деревьев, соответствующих тупиковым кодам.

2.19. Пусть $P = (p_1, p_2, \ldots, p_r)$ — набор вероятностей, а $l_*(P) = \inf\limits_C l_{\text{ср}}(C, P)$, где нижняя грань берется по всем двоичным префиксным кодам мощности r. Доказать, что:

1) $l_*(P) > 1$ при $r \geqslant 3$;

2) для всякого $\varepsilon > 0$ и любого $r \geqslant 1$ существует набор вероятностей P такой, что $l_*(P) < 1 + \varepsilon$.

2.20. Пусть $\widehat{l}(r) = \sup\limits_P \inf\limits_C l_{\text{ср}}(C, P)$, где нижняя грань берется по всем префиксным q-ичным кодам мощности r, а верхняя грань берется по всем наборам вероятностей $P = (p_1, p_2, \ldots, p_r)$ таким, что $p_i > 0$ $(i = 1, \ldots, r)$, $\sum\limits_{i=1}^{r} p_i = 1$. Доказать, что:

1) $\widehat{l}(r) \geqslant (\log_q r) - 1$; 2) $\widehat{l}(r) \leqslant [\log_q r] + 1$.

§ 3. Самокорректирующиеся коды

1. Расстояние Хэмминга, шары, сферы и циклы в n-мерном кубе. Напомним, что *расстоянием Хэмминга* между вершинами $\widetilde{\alpha}$ и $\widetilde{\beta}$ куба B^n называется число $\rho(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}) = \sum\limits_{i=1}^{n} |\alpha_i - \beta_i|$, равное числу координат, в которых векторы $\widetilde{\alpha}$ и $\widetilde{\beta}$ различаются. Наборы $\widetilde{\alpha}$, $\widetilde{\beta}$ из B^n называются *соседними*, если $\rho(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}) = 1$, и *противоположными*, если $\rho(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}) = n$. Неупорядоченная пара соседних вершин называется *ребром куба*. Множество $B_k^n(\widetilde{\alpha}) = \{\widetilde{\beta} \in B^n\colon \rho(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}) = k\}$ называется *сферой радиуса k с центром* $\widetilde{\alpha}$, а $S_k^n(\widetilde{\alpha}) = \{\beta \in \widetilde{B}^n\colon \rho(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}) \leqslant k\}$ —

шаром радиуса k *с центром* $\widetilde{\alpha}$. Положим $B_k^n = B_k^n(\widetilde{0})$. Множество B_k^n называется *k-м слоем n-мерного куба*. Последовательность $(\widetilde{\alpha}_0, \widetilde{\alpha}_1, \ldots, \widetilde{\alpha}_k)$ называется *цепью* в B^n, если $\rho(\widetilde{\alpha}_{i-1}, \widetilde{\alpha}_k) = 1$. Цепь $(\widetilde{\alpha}_0, \widetilde{\alpha}_1, \ldots, \widetilde{\alpha}_k)$ такая, что $\rho(\widetilde{\alpha}_k, \widetilde{\alpha}_0) = 1$, называется *циклом*. Цепь $(\widetilde{\alpha}_0, \widetilde{\alpha}_1, \ldots, \widetilde{\alpha}_k)$ такая, что $\widetilde{\alpha}_{i-1} < \widetilde{\alpha}_i$ $(i = 1, \ldots, k)$, называется *возрастающей цепью*. Число k называется *длиной цепи* $(\widetilde{\alpha}_0, \widetilde{\alpha}_1, \ldots, \widetilde{\alpha}_k)$. Цикл C куба B^n называется *$2d$-циклом*, если $|C \cap S_d^n(\widetilde{\alpha})| = 2d + 1$ для каждого $\widetilde{\alpha} \in C$. Через $B^{n,i_1,\ldots,i_k}_{\sigma_1\ldots\sigma_k}$ обозначим множество всех наборов $(\widetilde{\alpha}_1, \widetilde{\alpha}_2, \ldots, \widetilde{\alpha}_n)$ таких, что $\alpha_{ij} = \sigma_j$ $(j = 1, \ldots, k)$. Всякое такое множество называется *$(n-k)$-мерной гранью направления* $(i_1, \ldots, i_k)$.

3.1. Доказать, что для любых $\widetilde{\alpha}$, $\widetilde{\beta}$, $\widetilde{\gamma}$ из B^n выполнены соотношения:

1) $\rho(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}) = \rho(\widetilde{\beta}, \widetilde{\alpha})$; 2) $\rho(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\gamma}) \leqslant \rho(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}) + \rho(\widetilde{\beta}, \widetilde{\gamma})$; 3) $\rho(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\alpha}) = 0$;

4) $\rho(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\gamma}) = \rho(\widetilde{\alpha} \oplus \widetilde{\beta}, \widetilde{\gamma} \oplus \widetilde{\beta})$, где $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \oplus (\beta_1, \ldots, \beta_n) = (\widetilde{\alpha}_1 \oplus \widetilde{\beta}_1, \ldots, \widetilde{\alpha}_n \oplus \widetilde{\beta}_n)$;

5) $\rho(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}) = \|\widetilde{\alpha} \oplus \widetilde{\beta}\|$, где $\|(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)\| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n$;

6) $\rho(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}) = \|\widetilde{\alpha}\| \oplus \|\widetilde{\beta}\| - 2\|\widetilde{\alpha} \cap \widetilde{\beta}\|$, где $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \cap (\beta_1, \ldots, \beta_n) = (\alpha_1 \,\&\, \beta_1, \ldots, \alpha_n \,\&\, \beta_n)$.

3.2. 1) Найти число ребер в B^n.

2) Найти число неупорядоченных пар наборов $\widetilde{\alpha}$, $\widetilde{\beta}$ из B^n таких, что $\rho(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}) = k$.

3.3. Найти число вершин в подмножестве:

1) $A = B_k^n(\widetilde{\alpha})$; 2) $A = S_k^n(\widetilde{\alpha})$;

3) $A = B_k^n(\widetilde{\alpha}) \cap B_m^n(\widetilde{\beta})$, где $\rho(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}) = r$;

4) $A = S_k^n(\widetilde{\alpha}) \cap S_m^n(\beta)$, где $\rho(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}) = r$.

3.4. Пусть $\widetilde{\alpha}$, $\widetilde{\beta}$ — вершины куба B^n, а $\rho(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}) = m$. Найти число вершин $\widetilde{\gamma}$, удовлетворяющих условию:

1) $\rho(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\gamma}) + \rho(\widetilde{\gamma}, \widetilde{\beta}) = \rho(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta})$; 2) $\rho(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\gamma}) + \rho(\widetilde{\beta}, \widetilde{\gamma}) = r$;

3) $\rho(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\gamma}) = k$, $\rho(\widetilde{\beta}, \widetilde{\gamma}) = r$; 4) $\rho(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\gamma}) \leqslant k$, $\rho(\widetilde{\beta}, \widetilde{\gamma}) \geqslant r$.

3.5. Доказать несовместимость следующих систем соотношений для $\widetilde{\alpha}$, $\widetilde{\beta}$, $\widetilde{\gamma}$ из B^n $(n \geqslant 2)$:

1) $\rho(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}) > \dfrac{2n}{3}$, $\rho(\widetilde{\beta}, \widetilde{\gamma}) > \dfrac{2n}{3}$, $\rho(\widetilde{\gamma}, \widetilde{\alpha}) > \dfrac{2n}{3}$;

2) $\nu(\widetilde{\alpha}) < \nu(\widetilde{\beta} \oplus \widetilde{\gamma})$, $\nu(\widetilde{\beta}) < \nu(\widetilde{\alpha} \oplus \widetilde{\gamma})$, $\nu(\widetilde{\gamma}) < \nu(\widetilde{\alpha} \oplus \widetilde{\beta})$;

3) $\|\widetilde{\alpha}\| > \|\widetilde{\beta} \oplus \widetilde{\gamma}\|$, $\|\widetilde{\beta}\| > \|\widetilde{\alpha} \oplus \widetilde{\gamma}\|$, $\|\widetilde{\gamma}\| > \|\widetilde{\alpha} \oplus \widetilde{\beta}\|$, $|\widetilde{\alpha} \cap (\widetilde{\beta} \cap \widetilde{\gamma})| = 0$.

3.6. Множество $A \subseteq B^n$ называется *полным в* B^n, если любой вектор $\widetilde{\beta} \in B^n$ однозначно восстанавливается при условии, что для каждого $\widetilde{\alpha} \in A$ известно расстояние $\rho(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta})$. Полное в B^n множест-

во A называется *базисным*, если для любого вектора $\widetilde{\alpha}$ из A множество $A\backslash\{\alpha\}$ не является полным.

1) Показать, что любая цепь $\widetilde{\alpha}_0, \widetilde{\alpha}_1, \ldots, \widetilde{\alpha}_{n-1}$ в B^n образует базисное множество.

2) Показать, что множества B_1^n и B_{n-1}^n являются полными в B^n при $n > 2$. Указать такое $n > 2$, что B_1^n не является базисным.

3) При каких n и k множество B_k^n не является полным в B^n?

4) Доказать, что всякое базисное множество $A \subseteq B^n$ удовлетворяет условию

$$n \log_2^{-1}(n-1) \leqslant |A| \leqslant n.$$

5) Доказать, что никакая грань размерности $n-2$ не является полным в B^n множеством.

6) Показать, что число ψ_n базисных множеств в B^n удовлетворяет неравенствам $2((n-1)!) \leqslant \psi_n \leqslant \binom{2^n}{n}$.

3.7. Пусть φ — взаимно однозначное отображение B^n на себя. Говорят, что φ *сохраняет расстояние*, если $\rho(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}) = \rho(\varphi(\widetilde{\alpha}, \varphi(\widetilde{\beta}))$ для всех $\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}$ из B^n. Доказать, что отображение сохраняет расстояние тогда и только тогда, когда оно может быть получено: а) с помощью некоторой перестановки координат во всех наборах из B^n; б) заменой 0 на 1 и 1 на 0 в некоторых координатах всех векторов.

3.8. Отображение φ множества B^n в себя называется *монотонным*, если из $\nu(\widetilde{\alpha}) \leqslant \nu(\widetilde{\beta})$ вытекает, что $\nu(\varphi(\widetilde{\alpha})) \leqslant \nu(\varphi(\widetilde{\beta}))$. Найти число монотонных отображений куба из B^n.

3.9*. Пусть $I(A)$ — число ребер n-мерного куба, соединяющих пары вершин подмножества $A \subseteq B^n$, а $I_n(m) = \max\limits_{A \subseteq B^n, |A|=m} |(A)|$.

1) Доказать, что $I_n(m) \leqslant \frac{1}{2} m \log_2 m$.

2) Доказать, что оценка п. 1) достигается при $m = 2^k$.

3) Пусть $A \subseteq B^n$, $|A| > 2^{n-1}$. Доказать, что $I(A) \geqslant n$.

4) Доказать, что $I(A) \leqslant n|A| - \min\{|A|, 2^n - |A|\}$.

3.10. Пусть $F_r(n)$ — семейство подмножеств $A \subseteq B^n$ таких, что $\rho(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}) \leqslant 2r$ для любых $\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}$ из A. Пусть $\varphi_r(n) = \max\limits_{A \in F_r(n)} |A|$.

1) Доказать, что максимум A по всем $A \in F_r(n)$ не меньше $\sum\limits_{0 \leqslant i \leqslant r} \binom{n}{k}$.

2) Для нечетного n и $r = (n-1)/2$ привести пример множества $A \in F_r(n)$, не являющегося шаром радиуса r ни в одном из подкубов куба B^n и такого, что $|A| = \sum\limits_{0 \leqslant k \leqslant r} \binom{n}{k}$.

3.11. Доказать по индукции, что наборы из B^n можно расположить в цикл $\widetilde{\alpha}_0, \widetilde{\alpha}_1, \ldots, \widetilde{\alpha}_{2^n-1}$.

3.12. Двоичный вектор $(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{2^n-1})$ называется *n-универсальным*, если для всякого $(\beta_1, \ldots, \beta_n)$ из B^n существует такой номер k, что $\beta_i = \alpha_{k \oplus i}$ $(i = 1, \ldots, n)$, где $k \oplus i = k + i \,(\mathrm{mod}\, 2^n)$. Например, вектор (0011) является 2-универсальным.

1) Выяснить, является ли n-универсальным вектор $\widetilde{\alpha}^{2^n}$:

а) $\widetilde{\alpha}^4 = (0110)$; б) $\widetilde{\alpha}^4 = (0101)$; в) $\widetilde{\alpha}^8 = (0001\,1101)$;

г) $\widetilde{\alpha}^8 = (0001\,1010)$; д) $\widetilde{\alpha}^8 = (0100\,0111)$; е) $\widetilde{\alpha}^8 = (0100\,1110)$;

ж) $\widetilde{\alpha}^{16} = (0000\,1111\,0010\,1101)$; з) $\widetilde{\alpha}^{16} = (1100\,1011\,0100\,0011)$.

2) Доказать, что для всякого n существует n-универсальный вектор.

3.13. 1) Пусть $l(n)$ — максимальная длина 2-цикла в B^n. Найти $l(2)$, $l(3)$, $l(4)$.

2) Доказать, что для всякого 2-цикла $C \subseteq B^n$ и любой грани G размерности 4 выполнено $|C \cap G| \leqslant 8$.

3) Доказать, что максимальная длина 2-цикла в B^n не превосходит 2^{n-1} $(n > 3)$.

3.14*. Пусть $\varphi(n)/(\varphi'(n))$ — максимальная мощность множества $A \subseteq B^n$ такого, что $\|\widetilde{\alpha} \cap \widetilde{\beta}\| = 1$ (соответственно $\|\widetilde{\alpha} \cap \widetilde{\beta}\| = 1$) для любых двух различных векторов из A. Доказать, что:

1) $\varphi(n) = n$; 2) $\varphi'(n) = 2^{n-1}$.

3.15*. Доказать, что куб B^n можно представить в виде объединения попарно непересекающихся возрастающих цепей, обладающих следующими свойствами:

1) число цепей длины $n - 2k$ равно $\binom{n}{k} - \binom{n}{k-1}$, $k = 1, \ldots, \ldots, [n/2]$; при этом минимальный набор каждой цепи длины $n - 2k$ имеет вес k, а максимальный — вес $n - k$;

2) если $\widetilde{\alpha}_i$, $\widetilde{\alpha}_{i+1}$, $\widetilde{\alpha}_{i+2}$ — три последовательные вершины цепи, имеющей длину $n - 2k$, то вершина $\widetilde{\beta}$ такая, что $\widetilde{\alpha}_i < \widetilde{\beta} < \widetilde{\alpha}_{i+2}$, $\widetilde{\beta} \neq \widetilde{\alpha}_{i-1}$, принадлежит цепи длины $n - 2k - 2$.

3.16*. Пусть $A \subseteq B^n$ — такое множество наборов, что не существует наборов $\widetilde{\alpha}$, $\widetilde{\beta}$, $\widetilde{\gamma}$ из A, для которых $\widetilde{\alpha} \cap \widetilde{\beta} = \widetilde{0}$ и $\widetilde{\alpha} \cup \widetilde{\beta} = \widetilde{\gamma}$. Пусть $a_k = |A \cap B_k^n|$. Доказать, что

$$\frac{a_{k+m}}{\binom{n}{k+m}} + \frac{a_k}{\binom{n}{k}} + \frac{a_m}{\binom{n}{m}} \leqslant 2.$$

2. Коды, обнаруживающие и исправляющие ошибки. Подмножество $C \subseteq B^n$ называется (*двоичным*) *кодом с расстоянием d* или, короче, *$\langle n, d\rangle$-кодом*, если $\min\limits_{\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta} \in C} \rho(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}) = d$. Число d называется *кодовым расстоянием* множества C. Максимальная мощность $\langle n, d\rangle$-кода будет обозначаться через $m(n, d)$. Если мощность $\langle n, d\rangle$-кода равна $m(n, d)$, то он называется *максимальным*. *Плотно упакованным кодом* называется $\langle n, 2d+1\rangle$-код C, удовлетворяющий сле-

дующему условию: для всякого $\widetilde{\alpha} \in B^n$ существует $\beta \in C$ такое, что $\rho(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}) \leqslant d$. Множество $C \subseteq B^n$ называется *эквидистантным кодом*, если величина $\rho(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta})$ постоянна для любой пары наборов $\widetilde{\alpha}$, $\widetilde{\beta}$ из C. Множество $C \subseteq B^n$ называется *равновесным кодом*, если существует целое число k $(0 \leqslant k \leqslant n)$, называемое *весом кода*, такое, что $C \subseteq B^n_k$. Положим $m(n, d, k) = \max |C|$, где максимум берется по всем $\langle n, d\rangle$-кодам веса k.

Подмножества $C \subseteq B^n$ могут рассматриваться как множества двоичных слов, предназначенных для передачи по каналу связи, в котором могут происходить искажения передаваемых слов. Элементы множества C называются при этом *кодовыми словами*. Передача слова по каналу связи рассматривается здесь как преобразование, не меняющее длины передаваемого слова и состоящее в замене некоторых букв на противоположные, т. е. 0 на 1, а 1 на 0. Если слово $\widetilde{\alpha}$ при передаче по каналу преобразовывалось в слово $\widetilde{\beta}$, отличное от $\widetilde{\alpha}$, то говорят, что в канале *произошли ошибки*. Если i-я буква переданного слова $\widetilde{\alpha}$ отличается от i-й буквы полученного слова $\widetilde{\beta}$, то говорят, что *произошла ошибка в i-м разряде*. Если полученное слово отличается от переданного в t разрядах, то говорят, что *произошло t ошибок*. Ясно, что число ошибок, имевших место при передаче, равно расстоянию Хэмминга между переданным и принятым словами.

Пусть $C \subseteq B^n$ — некоторый код. Произвольное однозначное отображение φ множества B^n на множество C называется *декодированием*. Пусть $\widetilde{\alpha} \in C$, а $\psi^{-1}(\widetilde{\alpha})$ — множество тех $\widetilde{\beta} \in B^n$, для которых $\psi(\widetilde{\beta}) = \widetilde{\alpha}$. Пусть $S^n_t(\widetilde{\alpha})$ — шар радиуса t с центром $\widetilde{\alpha}$ в B^n. Говорят, что код C *исправляет t ошибок*, если существует такое декодирование ψ, что $S^n_t(\widetilde{\alpha}) \subseteq \psi^{-1}(\widetilde{\alpha})$ для каждого $\widetilde{\alpha} \in C$. Очевидно, что код C исправляет t ошибок тогда и только тогда, когда $S^n_t(\widetilde{\alpha}) \cap S^n_t(\widetilde{\beta}) = \varnothing$ для любых двух различных кодовых слов $\widetilde{\alpha}$, $\widetilde{\beta}$ из C.

Говорят, что код C *обнаруживает t ошибок*, если любое слово, которое можно получить из произвольного кодового слова $\widetilde{\alpha}$ в результате не более t ошибок, отлично от любого слова $C\backslash\{\widetilde{\alpha}\}$. Таким образом, код C обнаруживает t ошибок, если $C \cap S^n_t(\widetilde{\alpha}) = \{\widetilde{\alpha}\}$ для любого $\widetilde{\alpha} \in C$.

Метод Хэмминга построения кодов, исправляющих одну ошибку, заключается в построении по произвольному двоичному набору $\widetilde{\alpha} = \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, называемому в дальнейшем *сообщением*, кодирующего слова $\widetilde{\beta} = \beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$, где n и m связаны соотношением $n = \min\{l\colon 2^m \leqslant 2^l/(l+1)\}$. Кодирующее слово $\widetilde{\beta}$ содержит все разряды набора $\widetilde{\alpha}$ и, кроме того, k проверочных разрядов $p_0, p_1, \ldots, p_{k-1}$. При этом $\beta_j = p_i$, если $j = 2^i$ $(i = 0, 1, \ldots, k-1)$, и $\beta_j = \alpha_{j-]\log_2 j[}$, если j не является степенью двойки. Значения проверочных разрядов $p_0, \ldots, p_{k-1}$ определяются из равенств вида

$$p_i = \beta_{2^i+1} \oplus \beta_{2^i+2} \oplus \ldots, \quad i = 0, \ldots, k-1,$$

где в правую часть входят все координаты β_j $(2^i < j \leqslant n)$, у которых двоичное разложение индекса j имеет коэффициент при 2^i, равный единице.

Пример 1. Построим по методу Хэмминга кодовое слово для сообщения $\widetilde{\alpha} = (1011)$. Имеем $m = 4$, $n = \min\{l\colon 2^m \leqslant 2^l/(l+1)\} = 7$, $k = n - m = 3$. Кодовое слово $\widetilde{\beta}$ имеет вид $\beta_1\beta_2\beta_3\beta_4\beta_5\beta_6\beta_7 = p_0p_1 1p_2 011$. Значения проверочных символов определяются из равенств

$$p_0 = \beta_3 \oplus \beta_5 \oplus \beta_7 = 1 \oplus 0 \oplus 1 = 0,$$
$$p_1 = \beta_3 \oplus \beta_6 \oplus \beta_7 = 1 \oplus 1 \oplus 1 = 1,$$
$$p_2 = \beta_5 \oplus \beta_6 \oplus \beta_7 = 0 \oplus 1 \oplus 1 = 0.$$

Таким образом, кодовым словом для $\widetilde{\alpha}$ является вектор $\widetilde{\beta} = (0110011)$.

Декодирование состоит в том, что по вектору $\widetilde{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$, полученному из некоторого кодового слова путем искажения не более чем в одном разряде, восстанавливается исходное сообщение $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$. Декодирование осуществляется следующим образом. Пусть $m = [\log_2(2^n/(n+1))]$, $k = n - m$. Вычислим по вектору $\widetilde{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ k сумм вида

$$v_i = \beta_{2^i} \oplus \beta_{2^i+1} \oplus \ldots, \quad i = 0, \ldots, k-1,$$

где в i-ю сумму включаются все координаты β_j $(2^i \leqslant j \leqslant n)$, у которых двоичное разложение индекса j имеет коэффициент при 2^i, равный единице. В результате получаем двоичный вектор $\mathbf{v} = (v_0, \ldots, v_{k-1})$ и число $\overline{\nu}(\mathbf{v}) = \sum\limits_{0 \leqslant i < k} v_i \cdot 2^i$. Это число указывает номер разряда, в котором произошла ошибка. Если $\overline{\nu}(\mathbf{v}) = 0$, то считаем, что ошибки при передаче не было. Если $\overline{\nu}(\mathbf{v}) > n$, то считаем, что передавалось слово, которое не является ни кодовым словом сообщения $\widetilde{\alpha}$, ни кодовым словом, искаженным в одном разряде.

Пример 2. Декодировать вектор $\widetilde{\beta} = (1001110)$. Имеем $n = 7$, $m = [\log_2(2^7/8)] = 4$, $k = n - m = 3$.

Вычислим вектор $\mathbf{v} = (v_0, v_1, v_2)$. Имеем

$$v_0 = \beta_1 \oplus \beta_3 \oplus \beta_5 \oplus \beta_7 = 1 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0 = 0,$$
$$v_1 = \beta_2 \oplus \beta_3 \oplus \beta_6 \oplus \beta_7 = 0 \oplus 0 \oplus 1 \oplus 0 = 1,$$
$$v_2 = \beta_4 \oplus \beta_5 \oplus \beta_6 \oplus \beta_7 = 1 \oplus 1 \oplus 1 \oplus 0 = 1.$$

Получаем, что $v(\mathbf{v}) = 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 0 \cdot 2^0 = 6$. Следовательно, ошибка произошла в шестом разряде. Неискаженный кодовый вектор имеет вид $\widetilde{\beta}' = (1001100)$. Вычеркивая проверочные разряды с номерами 1, 2, 4, получаем исходное сообщение $\widetilde{\alpha} = (0100)$.

3.17. 1) Показать, что код исправляет t ошибок тогда и только тогда, когда расстояние между любыми двумя кодовыми словами не меньше $2t + 1$.

2) Показать, что код обнаруживает t ошибок тогда и только тогда, когда расстояние между любыми двумя кодовыми словами не меньше $t+1$.

3.18. Для данного множества $C \subseteq B^n$ найти кодовое расстояние:
1) $C = \{11000, 10101, 01110\}$; 2) $C = \{111100, 110011, 001111\}$;
3) $C = \{00001, 11111, 10100, 01010\}$;
4) $C = \{101010, 010110, 000001\}$;
5) $C = \{01101010, 11000110, 00011001, 10101100\}$.

3.19. Для каждого из кодов C предыдущей задачи найти:
а) число ошибок, которые код C обнаруживает;
б) число ошибок, которые код C исправляет.

3.20. Булева функция $f(\widetilde{x}^n)$ называется *характеристической* для подмножества $C \subseteq B^n$, если $C = N_f$.

Определить, сколько ошибок обнаруживает и сколько исправляет код с характеристической функцией f:
1) $f(\widetilde{x}^n) = x_1 \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_n$; 2) $f(\widetilde{x}^n) = \overline{x}_1\overline{x}_2 \ldots \overline{x}_n \vee x_1x_2 \ldots x_n$;
3) $f(\widetilde{x}^{3n}) = \overline{x}_1\overline{x}_2 \ldots \overline{x}_{3n} \oplus \overline{x}_1 \ldots \overline{x}_n x_{n+1} \ldots x_{3n} \oplus$
$\oplus\, x_1 \ldots x_n\overline{x}_{n+1} \ldots \overline{x}_{2n}x_{2n+1} \ldots x_{3n} \oplus x_1 \ldots x_{2n}\overline{x}_{2n+1} \ldots \overline{x}_{3n}$;
4) $f(\widetilde{x}^n) = x_1x_2 \ldots x_{n-1} \oplus x_1x_2 \ldots x_{n-2}x_n \oplus \ldots \oplus x_2x_3 \ldots x_n$.

3.21. Построить по методу Хэмминга кодовое слово для сообщения:
1) $\widetilde{\alpha} = 010$; 2) $\widetilde{\alpha} = 011$; 3) $\widetilde{\alpha} = 1001$; 4) $\widetilde{\alpha} = 1101$;
5) $\widetilde{\alpha} = 10101011$; 6) $\widetilde{\alpha} = 111001111$; 7) $\widetilde{\alpha} = 100010011$;
8) $\widetilde{\alpha} = 01110111011$.

3.22. По каналу связи передавалось кодовое слово, построенное по методу Хэмминга для сообщения $\widetilde{\alpha}$. После передачи по каналу связи, искажающему слово не более чем в одном разряде, было получено слово $\widetilde{\beta}$. Восстановить исходное сообщение:
1) $\widetilde{\beta} = 110$; 2) $\widetilde{\beta} = 101110$; 3) $\widetilde{\beta} = 011110$; 4) $\widetilde{\beta} = 1001011$;
5) $\widetilde{\beta} = 0101101$; 6) $\widetilde{\beta} = 1011101$; 7) $\widetilde{\beta} = 1100011$;
8) $\widetilde{\beta} = 11011100110$; 9) $\widetilde{\beta} = 1010101010100$;
10) $\widetilde{\beta} = 001011110111111$.

3.23. Доказать, что при кодировании сообщений по методу Хэмминга кодовые слова, сопоставленные двум различным сообщениям одинаковой длины, различаются по меньшей мере в трех разрядах.

3.24. Множество сообщений R задано характеристической функцией $f(\widetilde{x}^n)$. Построить характеристическую функцию $g(\widetilde{x}^n)$ множества кодовых слов, соответствующих сообщениям из R:
1) $f(\widetilde{x}^2) = x_1 \sim x_2$; 2) $f(\widetilde{x}^2) = x_1 \vee x_2$;
3) $f(\widetilde{x}^3) = x_1x_2x_3 \vee \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3$; 4) $f(\widetilde{x}^3) = x_1x_2 \vee \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3$.

3.25. Верно ли, что код $C \subseteq B^n$, исправляющий t ошибок, обнаруживает:

1) не менее $2t+1$ ошибок; 2) не менее $2t$ ошибок;

3) не более $2t$ ошибок?

3.26. Показать, что из всякого подмножества $C \subseteq B^n$ можно получить код, обнаруживающий одну ошибку, удалив из C не более половины вершин.

3.27. Показать, что мощность плотно упакованного $\langle n,\, 2t+1\rangle$-кода равна $2^n \Big/ \sum\limits_{i=0}^{t} \binom{n}{i}$.

3.28. Показать, что мощность максимального $\langle n,\, 2t+1\rangle$-кода не меньше $2^n \Big/ \sum\limits_{i=0}^{t} \binom{n}{i}$.

3.29. Показать, что $m(n, d) = 2$ при $2n/3 < d \leqslant n$.

3.30. Показать, что $m(n,\, 2n/3) = 4$ при n, кратных 3.

3.31. Показать, что не существует максимальных кодов мощности 3.

3.32. 1) Показать, что при любом натуральном k и $n = 2^k - 1$ существует разбиение куба B^n на непересекающиеся шары радиуса 1.

2) Показать, что при $n = 2^k$ существует разбиение куба B^n на непересекающиеся сферы радиуса 1.

3.33*. Доказать, что:

1) $m(n+1,\, d) \geqslant m(n,\, d)$; 2) $m(n+d,\, d) \geqslant 2m(n,\, d)$;

3) $m(2n,\, d) \geqslant (m(n,\, d))^2$; 4) $m(n,\, d) \leqslant 2m(n-1,\, d)$;

5) $m(n,\, d) \leqslant 2d/(2d-n)$ при $n < 2d$.

3.34. Пусть $q(n,\, d)$ — максимальное число вершин в B^n, попарные расстояния между которыми не превосходят d. Доказать, что

$$m(n,\, d+1)q(n,\, d) \leqslant 2^n.$$

3.35. Показать, что из всякого множества $C \subseteq B^n$ можно выделить множество D мощности, не меньшей $2^{-d+1}|C|$, которое является $\langle n,\, d\rangle$-кодом.

3.36. Доказать, что $m(n,\, d) \leqslant 2^{n-d+1}$.

3.37. 1) Показать, что максимальный $\langle n,\, 2\rangle$-код имеет мощность 2^{n-1}.

2) Выяснить, сколько существует максимальных $\langle n,\, 2\rangle$-кодов.

3.38. Найти максимальную мощность множества $C \subseteq B^n$, в котором расстояния между любыми двумя вершинами четны.

3.39. Выяснить, существует ли плотно упакованный $\langle n,\, 3\rangle$-код при $n = 147$.

3.40. Показать, что не существует плотно упакованных $\langle 15,\, 7\rangle$-кодов.

3.41. Показать, что мощность всякого эквидистантного кода с нечетным кодовым расстоянием не превосходит 2.

3.42. Показать, что при четном d существует эквидистантный код мощности $[2n/d]$.

3.43. Доказать, что $m(n,\,k,\,2d) \leqslant \binom{n}{k} \Big/ \sum\limits_{i=0}^{d-1} \binom{k}{i}\binom{n-k}{i}$.

3.44. Доказать, что при $2k^2 - n(2k-d) > 0$

$$m(n,\,k,\,d) \leqslant \left[\frac{nd}{2k^2 - n(2k-d)}\right].$$

3.45. Доказать, что при $k \leqslant d \leqslant n-k$:

1) $m(n,\,k,\,2d) \leqslant \left[\frac{n}{k}\, m(n-1,\,k-1,\,2d)\right]$;

2) $m(n,\,k,\,2d) \leqslant \left[\frac{n}{k}\left[\frac{n-1}{k-1}\left[\ldots\left[\frac{n-k+d}{d}\right]\ldots\right]\right]\right]$;

3) $m(n,\,k,\,2d) \leqslant \left[\frac{n}{n-k}\, m(n-1,\,k,\,2d)\right]$;

4) $m(n,\,k,\,2d) \leqslant \left[\frac{n}{n-k}\left[\frac{n-1}{n-1-k}\left[\ldots\left[\frac{d+k}{d}\right]\ldots\right]\right]\right]$.

§ 4. Линейные коды

Выражение вида

$$\lambda_1\widetilde{\alpha}_1 \oplus \lambda_2\widetilde{\alpha}_2 \oplus \ldots \oplus \lambda_s\widetilde{\alpha}_s, \tag{1}$$

где $\widetilde{\alpha}_i \in B^n$, $\lambda_i \in \{0,\,1\}$ $(i = 1,\,\ldots,\,s)$, называется *линейной комбинацией векторов* $\widetilde{\alpha}_1,\,\ldots,\,\widetilde{\alpha}_s$. Линейная комбинация (1) называется *тривиальной*, если $\lambda_1 = \lambda_2 = \ldots = \lambda_s = 0$, и *нетривиальной* в противном случае. Всякая линейная комбинация векторов из B^n является вектором из B^n. Векторы $\widetilde{\alpha}_1,\,\ldots,\,\widetilde{\alpha}_s$ называются *линейно независимыми*, если любая их нетривиальная комбинация отлична от нулевого вектора. В противном случае говорят, что векторы $\widetilde{\alpha}_1,\,\ldots,\,\widetilde{\alpha}_s$ *линейно зависимы*. Подмножество $G \subseteq B^n$ называется *группой*, если G замкнуто относительно операции сложения по модулю 2, т. е. если для любых $\widetilde{\alpha}$, $\widetilde{\beta}$ из G вектор $\widetilde{\alpha} \oplus \widetilde{\beta}$ принадлежит G. Из замкнутости G относительно операции $\oplus$ вытекает, что всякая линейная комбинация векторов из G также принадлежит G (в частности, $\widetilde{0} \in G$). Наибольшее число $k = k(G)$, для которого в группе (в линейном пространстве, которым также является группа в B^n) G существует k линейно независимых векторов, называется *размерностью* G. Совокупность из k линейно независимых векторов пространства размерности k называется *базисом* этого пространства. Если код $C \subseteq B^n$ образует группу, то он называется *линейным* или *групповым*. Если линейный код в B^n имеет размерность k, то он называется $(n,\,k)$-*кодом*. Двоичный линейный код, исправляющий одну ошибку, называется *кодом Хэмминга*.

Линейные коды удобно задавать с помощью матриц. Матрица $H(C)$, строками которой являются кодовые слова кода $C \subseteq B^n$, называется *матрицей кода* C. Матрица $M(C)$, строками которой являются векторы некоторого произвольного базиса (n, k)-кода C, называется *порождающей матрицей кода* C. Если H — произвольная матрица, строками которой являются векторы из B^n, то множество $C(H)$, составленное из всех попарно различных вершин куба B^n, являющихся линейными комбинациями строк матрицы H, называется *кодом, порожденным матрицей* H. Векторы $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ и $\widetilde{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ называются *ортогональными*, если $\alpha_1\beta_1 \oplus \ldots \ldots \oplus \alpha_n\beta_n = 0$. Множество $V(H)$ всех векторов из B^n, ортогональных к каждой из строк матрицы H, называется *нулевым пространством матрицы* H. Пусть C — двоичный код, каждое слово которого ортогонально каждой строке некоторой матрицы H. Если C является (n, k)-кодом, а матрица H состоит из $n - k$ линейно независимых строк, то H называется *проверочной матрицей кода* C. Множество C^* всех векторов, представимых в виде линейной комбинации строк проверочной матрицы (n, k)-кода C, называется *кодом, двойственным к коду* C. Через $g(n, d)$ обозначается $\max|C|$, где максимум берется по всем линейным кодам $C \subseteq B^n$ с кодовым расстоянием d.

4.1. Пусть векторы $\widetilde{\alpha}$ и $\widetilde{\beta}$ из B^n являются кодовыми словами, построенными по методу Хэмминга. Доказать, что $\widetilde{\alpha} \oplus \widetilde{\beta}$ также является кодовым словом для некоторого сообщения.

4.2. 1) Выяснить, являются ли векторы множества A линейно зависимыми:

а) $A = \{010, 101\}$; б) $A = \{010, 011, 001\}$;

в) $A = \{010, 101, 110\}$; г) $A = \{101, 110, 011\}$;

д) $A = \{0110, 1011, 0100, 1001\}$; е) $A = \{1011, 0100, 1111, 0101\}$.

2) Найти множество векторов, являющихся линейными комбинациями векторов из A.

3) Найти множество всех ненулевых векторов, ортогональных каждому из векторов множества A.

4.3. Пусть множество $C \subseteq B^n$ состоит из k линейно независимых векторов. Показать, что любые две линейные комбинации векторов множества C, различающиеся коэффициентами, представляют собой различные векторы.

4.4. Показать, что всякий (n, k)-код имеет мощность 2^k.

4.5. 1) Показать, что в двоичном линейном коде либо каждый кодовый вектор имеет четный вес, либо половина кодовых векторов имеет четные веса и половина — нечетные.

2) Пусть $H(C)$ — матрица (n, k)-кода C. Показать, что в каждом ненулевом столбце ее ровно 2^{k-1} единиц.

3) Если матрица $H(C)$ (n, k)-кода C не содержит ненулевых столбцов, то сумма весов матрицы $H(C)$ равна $n \cdot 2^{k-1}$.

4.6. Найти число векторов, ортогональных к данному ненулевому вектору $\widetilde{\alpha}$ из B^n.

4.7. 1) По матрице H найти кодовое расстояние $d(C(H))$ кода $C(H)$, порожденного матрицей H:

а) $H = \begin{bmatrix} 00 \\ 11 \end{bmatrix}$; б) $H = \begin{bmatrix} 0111 \\ 1100 \end{bmatrix}$; в) $H = \begin{bmatrix} 01001 \\ 11100 \\ 10110 \end{bmatrix}$;

г) $H = \begin{bmatrix} 11001 \\ 10101 \\ 01110 \end{bmatrix}$; д) $H = \begin{bmatrix} 0001111 \\ 0110011 \\ 1010101 \end{bmatrix}$;

е) $H = \begin{bmatrix} 10101010 \\ 11000101 \\ 01010011 \\ 00111100 \end{bmatrix}$; ж) $H = \begin{bmatrix} 1110110010 \\ 0111100101 \\ 1001101010 \\ 0010011111 \\ 1101011101 \end{bmatrix}$.

2) Для каждой из матриц H задач 1) а)–д) построить проверочные матрицы H^* для кодов $C(H)$, порожденных матрицей H.

4.8. Пусть $m = [\log_2(2^n/(n+1)]$ и $\varphi\colon B^m \to B^n$ — отображение m-мерных векторов в n-мерные по методу Хэмминга (см. § 3). Пусть $k = n - m$ и H — матрица размера $k \times n$, составленная из наборов (взятых в качестве столбцов) с номерами от 1 до n, расположенных в порядке возрастания номеров. Доказать, что матрица H^T является проверочной для кода $C = \varphi(B^m)$. Например, матрица H из задачи 4.7, 1), д) является проверочной для кода $C = \varphi(B^4)$.

Пусть Q и P — матрицы размерности соответственно $k \times m$ и $k \times n$. Тогда через (QP) будем обозначать матрицу размерности $k \times (m+n)$, в которой i-я строка $(1 \leqslant i \leqslant k)$ получена приписыванием справа к i-й строке матрицы Q матрицы P.

4.9. Доказать, что кодовое расстояние линейного кода C равно минимальному весу ненулевого кодового слова.

4.10. Пусть $H = (I_k P)$, где I — единичная матрица размерности $k \times k$, а P — произвольная двоичная матрица размерности $k \times (n-k)$, каждая строка которой содержит по меньшей мере две единицы и все строки попарно различны. Доказать, что код $C(H)$, порожденный матрицей H, является кодом Хэмминга.

4.11. Выяснить, каково кодовое расстояние $d(C(M))$ кода $C(M)$, порожденного матрицей $M = (I_5 H)$, где I_5 — единичная матрица размерности 5×5, а H — матрица из задачи 4.7, 1), д).

4.12. Пусть $V \subseteq B^n$ — пространство, состоящее из линейных комбинаций матрицы $H = (I_k P)$, где I_k — единичная матрица размерности $k \times k$, а P — матрица из нулей и единиц размерности $k \times (n-k)$. Доказать, что V является нулевым пространством для матрицы $G = (P^T I_{n-k})$, где I_{n-k} — единичная матрица размерности $(n-k) \times (n-k)$, а P^T — матрица, транспонированная к матрице P.

4.13. Показать, что кодовое расстояние (n, k)-кода не превосходит $[n \cdot 2^{k-1}/(2^k - 1)]$.

4.14. Показать, что при $n = 2d - 1$ мощность линейного $\langle n, d\rangle$-кода не превосходит $2d$.

4.15. 1) Показать, что максимально возможная мощность $g(n, d)$ линейного $\langle n, d\rangle$-кода удовлетворяет неравенству

$$g(n, d) \leqslant 2g(n - 1, d).$$

2) С использованием утверждения задачи 4.14 показать, что

$$g(n, d) \leqslant d \cdot 2^{n-2d+2}.$$

4.16. Пусть код C является нулевым пространством матрицы C. Показать, что кодовое расстояние кода C тогда и только тогда не меньше d, когда любая совокупность из $d - 1$ или меньшего числа столбцов матрицы H является линейно независимой.

4.17. Показать, что если $\sum\limits_{i=1}^{d-2} \binom{n-1}{i} \leqslant 2^k - 1$, то существует матрица из нулей и единиц размерности $k \times r$, в которой любые $d - 1$ столбцов линейно независимы и, следовательно, существует $(n, n - k)$-код с кодовым расстоянием не меньше d.

4.18. 1) Показать, что $g(9, 5) = 4$.

2) Показать, что $m(9, 5) \geqslant 5$.

4.19. Показать, что число различных базисов в B^n равно

$$\frac{(2^n - 1)(2^n - 2)\dots(2^n - 2^{n-1})}{n!}.$$

4.20. Показать, что число различных (n, k)-кодов в B^n равно

$$\frac{(2^n - 1)(2^n - 2)\dots(2^n - 2^{k-1})}{(2^k - 1)(2^k - 2)\dots(2^k - 2^{k-1})}.$$

Глава VIII

ЭЛЕМЕНТЫ КОМБИНАТОРИКИ

§ 1. Перестановки и сочетания Свойства биномиальных коэффициентов

Набор элементов $a_{i_1}, \ldots, a_{i_r}$ из множества $U = \{a_1, \ldots, a_n\}$ называется *выборкой объема r из n элементов* или (n, r)-*выборкой*. Выборка называется *упорядоченной*, если порядок следования элементов в ней задан. Две упорядоченные выборки, различающиеся лишь порядком следования элементов, считаются *различными*. Если порядок следования элементов не является существенным, то выборка называется *неупорядоченной*. В выборках могут допускаться или не допускаться повторения элементов. Упорядоченная (n, r)-выборка, в которой элементы могут повторяться, называется *перестановкой с повторениями из n элементов по r* или (n, r)-*перестановкой с повторениями*. Если элементы упорядоченной (n, r)-выборки попарно различны, то она называется (n, r)-*перестановкой без повторений* или просто (n, r)-*перестановкой*. Число (n, r)-перестановок будет обозначаться символом $P(n, r)$, а число (n, r)-перестановок с повторениями — символом $\widehat{P}(n, r)$. Неупорядоченная (n, r)-выборка, в которой элементы могут повторяться, называется *сочетанием с повторениями из n элементов по r* или, короче, (n, r)-*сочетанием с повторениями*. Если элементы неупорядоченной выборки попарно различны, то она называется *сочетанием* (*без повторений*) *из n элементов по r* или (n, r)-*сочетанием*. Каждое такое сочетание представляет собой подмножество мощности r множества U. Число сочетаний из n элементов по r будет обозначаться через $C(n, r)$. Число сочетаний с повторениями из n элементов по r будет обозначаться через $\widehat{C}(n, r)$.

Пример 1. Пусть $U = \{a, b, c\}$, $r = 2$. Тогда имеются:

девять перестановок с повторениями — aa, ab, ac, ba, bb, bc, ca, cb, cc;

шесть перестановок без повторений — ab, ac, ba, bc, ca, cb;

шесть сочетаний с повторениями — aa, ab, ac, bb, bc, cc;

три сочетания без повторений — ab, ac, bc.

Произведение $n(n-1)\dots(n-r+1)$, где n действительное, а r целое положительное, будет обозначаться через $(n)_r$. По определению положим $(n_0)=1$. Если n натуральное, то $(n)_n$ обозначается символом $n!$ и называется *n-факториалом*. При $n=0$ полагаем $0!=1$. Для любого действительного n и целого неотрицательного r величина $\dfrac{(n)_r}{r!}$ называется *биномиальным коэффициентом* и обозначается символом *) $\binom{n}{r}$. Пусть $r_1, r_2, \dots, r_k$ — целые неотрицательные числа и $r_1+r_2+\dots+r_k=n$. Величина $\dfrac{n!}{r_1!r_2!\dots r_k!}$ называется *полиномиальным коэффициентом* и обозначается через $\binom{n}{r_1, r_2, \dots, r_k}$.

При подсчете числа различных комбинаций используются следующие два правила.

Правило произведения. Если объект A может быть выбран n способами и после каждого из таких выборов объект B в свою очередь может быть выбран n способами, то выбор «A и B» в указанном порядке может быть осуществлен $m\cdot n$ способами.

Правило суммы. Если объект A может быть выбран m способами, а объект B — другими n способами при условии, что одновременный выбор A и B невозможен, то выбор «A или B» можно осуществить $m+n$ способами.

Пример 2. Бросают две игральные кости (с шестью гранями каждая). Сколькими способами они могут упасть так, что либо на каждой грани выпадет четное число очков, либо на каждой грани выпадет нечетное число очков?

Решение. Пусть A — число способов выпадения на каждой кости четного числа очков, B — число способов выпадения на каждой кости нечетного числа очков. Тогда по правилу суммы искомое число равно $A+B$. Пусть C — число способов выпадения четного числа очков на первой кости, а D — число способов выпадения четного числа очков на второй кости. Ясно, что $C=D=3$, а по правилу произведения $A=C\cdot D=9$. Аналогично, $B=9$, а искомое число равно 18.

Пример 3. Доказать, что число (n, r)-перестановок без повторений равно $(n)_r$.

Решение. Индукция по r. При $r=1$ число способов выбора одного элемента из n равно $n=(n)_1$. Пусть для некоторого $r\geqslant 1$ выполнено равенство $P(n, r)=(n)_r$. Докажем аналогичное равенство для $r+1$. Всякая совокупность, состоящая из $r+1$ элементов, может быть составлена путем предварительного выбора элементов, составляющих (n, r)-перестановку, и последующего присоединения к ней $(r+1)$-го элемента. Если r элементов выбраны, то $(r+1)$-й может быть

*) В литературе встречаются также обозначения C_n^r, nC_r, (n, r).

выбран $n-r$ способами. В силу правила произведения получаем, что

$$P(n,\, r+1) = P(n,\, r)\cdot(n-r).$$

С использованием предположения индукции получаем отсюда, что

$$P(n,\, r+1) = (n)_r\cdot(n-r) = (n)_{r+1}.$$

Большое число комбинаторных задач сводится к подсчету числа двоичных векторов.

Пример 4. Сколькими способами можно представить число n в виде суммы k неотрицательных слагаемых? (Представления, отличающиеся лишь порядком слагаемых, считаются различными.)

Решение. Каждому разбиению числа n на k целых неотрицательных слагаемых сопоставим вектор длины $n+k-1$ с n единицами и $k-1$ нулями, в котором число единиц, стоящих перед первым нулем, равно первому слагаемому, число единиц, расположенных между первым и вторым нулями, равно второму слагаемому и т.д. Соответствие взаимно однозначно. Заметим, что каждому двоичному вектору с $n+k-1$ координатами и n единицами в свою очередь можно сопоставить n-элементное подмножество A множества $U=\{a_1,\, a_2,\, \ldots,\, a_{n+k-1}\}$ следующим образом: i-я координата вектора равна 1 тогда и только тогда, когда $a_i\in A$ $(i=1,\, 2,\, \ldots,\, n+k-1)$. Но число таких подмножеств есть $C(n+k+1,\, n)$.

1.1. Сколькими способами можно распределить три билета среди 20 студентов, если:

1) распределяются билеты в разные театры, а каждый студент может получить не более одного билета;

2) распределяются билеты в разные театры и на разные дни, а каждый студент может получить любое (не превышающее трех) число билетов;

3) распределяются равноценные билеты на вечер и каждый студент может получить не более одного билета?

1.2. Выяснить, сколькими способами можно выстроить девять человек:

1) в колонну по одному;

2) в колонну по три, если в каждой шеренге люди выстраиваются по росту и нет людей одинакового роста?

1.3. Показать, что:

1) $\widehat{P}(n,\, r) = n^r$; 2) $C(n,\, r) = \binom{n}{r}$; 3) $\widehat{C}(n,\, r) = \binom{n+r-1}{n-1}$.

1.4. Найти число векторов $\widetilde{\alpha}=(\alpha_1,\, \ldots,\, \alpha_n)$, координаты которых удовлетворяют условиям:

1) $\alpha_i\in\{0,\, 1,\, \ldots,\, k-1\}$ $(i=1,\, \ldots,\, n)$;

2) $\alpha_i\in\{0,\, 1,\, \ldots,\, k_i-1\}$ $(i=1,\, \ldots,\, n)$;

3) $\alpha_i\in\{0,\, 1\}$ $(i=1,\, \ldots,\, n)$ и $\alpha_1+\ldots+\alpha_n=r$.

1.5. 1) Каково число матриц из n строк и m столбцов с элементами из множества $\{0,\, 1\}$?

2) То же при условии, что строки матрицы попарно различны?

1.6. Дано m предметов одного сорта и n другого. Найти число выборок, составленных из r предметов одного сорта и s предметов другого сорта.

1.7. Из n букв, среди которых a встречается α раз, буква b встречается β раз, а остальные буквы попарно различны, составляются слова. Сколько среди них будет различных r-буквенных слов, содержащих h раз букву a и k раз букву b?

1.8. Имеется колода из $4n$ $(n \geqslant 5)$ карт, которая содержит карты четырех мастей по n карт каждой масти, занумерованных числами $1, 2, \ldots, n$. Подсчитать, сколькими способами можно выбрать пять карт так, что среди них окажутся:

1) пять последовательных карт одной масти;

2) четыре карты из пяти с одинаковыми номерами;

3) три карты с одним номером и две карты с другим;

4) пять карт какой-нибудь одной масти;

5) пять последовательно занумерованных карт;

6) в точности три карты из пяти с одним и тем же номером;

7) не более двух карт каждой масти.

1.9. Применяя правило суммы и правило произведения, решить следующие задачи.

1) Сколькими способами из 28 костей домино можно выбрать две кости так, чтобы их можно было приложить друг к другу (т. е. чтобы некоторое одинаковое число очков встретилось на обеих костях)?

2) Бросают три игральные кости. Сколькими способами они могут упасть так, что все оказавшиеся сверху грани либо одинаковы, либо попарно различны?

3) У англичан принято давать детям несколько имен. Сколькими способами можно назвать ребенка, если ему дадут не более трех имен, а общее число имен равно 300?

1.10. 1) Сколькими способами можно число n представить в виде суммы k натуральных слагаемых? (Представления, различающиеся лишь порядком слагаемых, считаются разными.)

2) Сколькими способами число 7^n можно представить в виде трех сомножителей? (Представления, различающиеся лишь порядком сомножителей, считаются разными.)

3) Решить задачу 2), если представления, различающиеся лишь порядками, разными не считаются и $n \neq 3s$.

1.11. 1) Сколькими способами можно расставить n нулей и k единиц так, чтобы между любыми двумя единицами находилось не менее m нулей?

2) Сколько существует неотрицательных целых чисел, не превышающих 10^n, цифры которых расположены в неубывающем порядке?

3) Карта города имеет вид прямоугольника, разделенного улицами на квадраты. Таких квадратов в направлении с севера на юг ровно n, а в направлении с востока на запад ровно k. Сколько имеется кратчайших маршрутов от северо-восточного конца города до юго-западного?

1.12. Пусть $n = p_1^{\alpha_1} \dots p_r^{\alpha_r}$ — разложение числа n в произведение простых попарно различных чисел. Найти:

1) число всех натуральных делителей числа $(n)_j$;

2) число всех делителей, не делящихся на квадрат никакого целого числа, отличного от 1;

3) сумму делителей числа n.

1.13. Доказать следующие свойства биномиальных коэффициентов:

1) $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$; 2) $\binom{n}{k}\binom{k}{r} = \binom{n-r}{k-r}\binom{n}{r}$;

3) $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$; 4) $\dfrac{\binom{n}{k-r}}{\binom{n}{k}} = \dfrac{(k)_r}{(n-k+r)_r}$;

5) $\binom{n}{k} = \sum\limits_{r=0}^{n} \binom{n-r-1}{k-r}$; 6) $\dfrac{\binom{n-r}{k-r}}{\binom{n}{k}} = \dfrac{(k)_r}{(n)_r}$;

7) $\dfrac{\binom{n+1}{k}}{\binom{n}{k}} = \dfrac{n+1}{(n-k+1}$; 8) $\sum\limits_{r=k}^{n} \binom{r}{k} = \binom{n+1}{k+1}$.

1.14. Доказать, что:

1) $\binom{n}{k}$ возрастает по n при фиксированном k;

2) $\binom{n-r}{k-r}$ убывает по r при фиксированных n и k;

3) если n фиксировано, то $\binom{n}{k}$ возрастает по k при $k \leqslant \left[\frac{n}{2}\right]$ и убывает при $k > \left]\frac{n}{2}\right[$;

4) $\max\limits_{0 \leqslant k \leqslant n} \binom{n}{k} = \binom{n}{[n/2]}$;

5) минимальное значение суммы $\binom{n_1}{k} + \binom{n_2}{k} + \dots + \binom{n_s}{k}$ при условии $\sum\limits_{i=1}^{s} n_i = n$ равно $(s-r)\binom{q}{r} + r\binom{q+1}{k}$, где $q = \left[\frac{n}{s}\right]$, $r = n - s\left[\frac{n}{s}\right]$;

6) максимальное значение суммы $\binom{n}{k_1} + \binom{n}{k_2} + \dots + \binom{n}{k_s}$ при условии $0 \leqslant k_1 < \dots < k_s \leqslant n$ $(1 \leqslant s \leqslant n+1)$ равно $\sum\limits_{\frac{n-s}{2} \leqslant j < \frac{n+s}{2}} \binom{n}{j}$;

7) при простом p и любом $p > k \geqslant 1$ число $\binom{p}{k}$ кратно p;

8) $\prod\limits_{n<p_i\leqslant 2n} p_i \leqslant \binom{2n}{n}$, где произведение берется по всем простым числам p_i $(n < p_i \leqslant 2n)$.

1.15. 1) Пусть m — целое неотрицательное число, а $n = n(m)$ — минимальное целое число такое, что $m < n!$. Показать, что можно (и притом единственным способом) сопоставить числу m такой вектор $\widetilde{\alpha}(m) = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1})$, что $m = \alpha_1 \cdot 1! + \alpha_2 \cdot 2! + \ldots + \alpha_{n-1}(n-1)!$, $0 \leqslant \alpha_i \leqslant i$ $(i = 1, \ldots, n-1)$.

2) Пусть $\mu(\widetilde{\alpha})$ — число такое, что $\widetilde{\alpha} = \widetilde{\alpha}(\mu(\widetilde{\alpha}))$. Найти вектор $\widetilde{\alpha}(m)$ для $m = 4, 15, 37$.

3) По вектору $\widetilde{\alpha}$ найти $\mu(\widetilde{\alpha})$, где:

а) $\widetilde{\alpha} = (0, 2, 0, 4)$; б) $\widetilde{\alpha} = (0, 2, 1)$; в) $\widetilde{\alpha} = (1, 2, 3, 2)$.

4) *Подстановкой на множестве* $z_n = \{1, 2, \ldots, n\}$ называется произвольное отображение z_n на себя. Всякой подстановке π взаимно однозначно соответствует вектор $\pi = (\pi(1), \ldots, \pi(n))$, в котором координата $\pi(i)$ указывает место элемента i. Каждой подстановке π поставим в соответствие число $\nu(\pi)$, $0 \leqslant \nu(\pi) < n!$, называемое *номером подстановки*. Для этого сначала построим вектор $\widetilde{\alpha}_\pi = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_{n-1})$. Положим $\alpha_{n-1} = \pi(1) - 1$. Если $\alpha_{n-1}, \ldots, \alpha_{n-j}$ уже определены и $s(j) = |\{i < j \mid \pi(i) < \pi(j)\}|$, то положим $\alpha_{n-j-1} = \pi(j+1) - s(j+1) - 1$. Номер $\nu(\pi)$ определим как $\mu(\widetilde{\alpha}_\pi)$. Например, если $\pi = (3, 4, 2, 1)$, то $\widetilde{\alpha}_n = (1, 2, 2)$, $\nu(\pi) = 1 + 2 \cdot 2! + 2 \cdot 3! = 17$.

По подстановке π, заданной вектором π, найти номер $\nu(\pi)$:

а) $\pi = (2, 3, 1, 4)$; б) $\pi = (3, 5, 2, 1, 4)$; в) $\pi = (1, 3, 4, 5, 2)$.

5) Дать алгоритм построения подстановки π по ее номеру $\nu(\pi)$.

6) По числу m найти подстановку π на множестве z_n, где $n! > m \geqslant (n-1)!$, такую, что $\nu(\pi) = m$:

а) $m = 7$; б) $m = 18$; в) $m = 28$.

1.16. 1) Пусть k, n — натуральные числа. Доказать, что любому целому m $\left(0 \leqslant m < \binom{n}{k}\right)$ можно сопоставить (и притом единственным образом) целочисленный вектор $\widetilde{\beta}(m) = (\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k)$, удовлетворяющий условию $n > \beta_1 > \beta_2 > \ldots > \beta_k > 0$, $m = \binom{\beta_1}{k} + \binom{\beta_2}{k-1} + \ldots + \binom{\beta_k}{1}$. Число m в этом случае будем называть *номером набора* $\widetilde{\beta}$ (обозначение: $m = \mu(\beta)$).

2) Для заданных m, n, k построить вектор $\widetilde{\beta}(m)$:

а) $m = 19$, $n = 7$, $k = 4$; б) $m = 25$, $n = 7$, $k = 3$;

в) $m = 32$, $n = 8$, $k = 4$.

3) По заданному вектору $\widetilde{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_n)$ построить число m, удовлетворяющее условию задачи 1):

а) $\widetilde{\beta} = (6, 3, 0)$; б) $\widetilde{\beta} = (5, 4, 3, 1)$; в) $\widetilde{\beta} = (6, 4, 3, 2, 1)$.

4) Пусть B_k^n — подмножество всех векторов длины n с k единицами и $n-k$ нулями. Опираясь на задачу 1), построить нумерацию всех наборов из B_k^n числами от 1 до $\binom{n}{k}$, т. е. взаимно однозначное отображение ν множества B_k^n на множество $\left\{1, 2, \ldots, \binom{n}{k}\right\}$.

1.17. Индукцией по n с использованием соотношения $\binom{n+1}{k} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k-1}$ доказать тождество

$$(1+t)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} t^k. \tag{1}$$

1.18. Пусть n и m — целые положительные числа. С использованием тождества (1) или иным способом доказать следующие равенства:

1) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$; 2) $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$; 3) $\sum_{k=1}^{n} k\binom{n}{k} = n2^{n-1}$;

4) $\sum_{k=2}^{n} k(k-1)\binom{n}{k} = n(n-1)2^{n-2}$; 5) $\sum_{k=0}^{n} (2k+1)\binom{n}{k} = (n+1)2^n$;

6) $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{1}{n+1}(2^{n+1}-1)$; 7) $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{k+1}\binom{n}{k} = \frac{1}{n+1}$;

8) $\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}\binom{n}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}$;

9) $\sum_{r=0}^{k} \binom{m}{r}\binom{n}{k-r} = \binom{n+m}{k}$; 10) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$;

11) $\sum_{k=0}^{n} \frac{(2n)!}{(k!)^2((n-k)!)^2} = \binom{2n}{n}^2$; 12) $\sum_{k=0}^{n}\sum_{r=0}^{n-k} \binom{n}{k}\binom{n-k}{r} = 3^n$;

13) $\sum_{r=k}^{n} (-1)^{k-r}\binom{n}{r} = \sum_{r=0}^{n-k} (-1)^{n-k-r}\binom{n}{r}$;

14) $\sum_{r=0}^{n-k} \binom{n}{k+r}\binom{m}{r} = \binom{m+n}{n-k}$;

15) $\sum_{k=n}^{m} (-1)^{k-n}\binom{k}{n}\binom{m}{k} = \begin{cases} 0 & \text{при } m \neq n, \\ 1 & \text{при } m = n. \end{cases}$

1.19. Доказать тождества:

1) $\sum_{k} \binom{n}{2k} = \sum_{k} \binom{n}{2k+1} = 2^{n-1}$;

2) $4\sum\limits_k \binom{n}{4k} = 2^n + 2^{n/2+1}\cos\frac{\pi n}{4}$;

3) если $0 \leqslant r < m$, то $m\sum\limits_k \binom{n}{mk+r} = \sum\limits_{\nu=0}^{m-1} e^{-2\pi i r\nu/m}(1+e^{2\pi i\nu/m})^n$, где $i^2 = -1$;

4) $\sum\limits_k \binom{n}{4k+r} = \frac{1}{4}\Big(2^n + 2^{n/2+1}\cos\Big(\frac{\pi}{4}(n-2r)\Big)\Big)$, $0 \leqslant r \leqslant 3$;

5) если $0 \leqslant r < m$, $m \geqslant 1$, то

$$\frac{2^n}{m}\Big(1-(m-1)\cos^n\frac{\pi}{m}\Big) \leqslant \sum_k \binom{n}{mk+r} \leqslant \frac{2^n}{m}\Big(1+(m-1)\cos^n\frac{\pi}{m}\Big).$$

1.20. 1) Доказать, что

$$m\sum_k \alpha^{mk+r}\binom{n}{mk+r} = \sum_{\nu=0}^{m-1} e^{-2\pi i r\nu/m}(1+\alpha e^{2\pi i\nu/m})^n.$$

С помощью тождества из п. 1) вычислить:

2) $\sum\limits_k 3^k\binom{n}{2k}$; 3) $\sum\limits_k (-1)^k 2^k\binom{n}{4k+1}$;

4) $\sum\limits_k (-1)^k 3^k\binom{n}{2k+1}$.

1.21. Определить, сколько рациональных членов содержится в разложении:

1) $\Big(\sqrt{2}+\sqrt[3]{3}\Big)^{20}$; 2) $\Big(\sqrt{3}+\sqrt[4]{5}\Big)^{50}$; 3) $\Big(\sqrt[3]{6}+\sqrt[4]{2}\Big)^{100}$;

4) $\Big(\sqrt[3]{12}+\sqrt[6]{3}\Big)^{30}$.

1.22. Найти коэффициент при t^k в разложении:

1) $(1+2t-3t^2)^8$, $k=9$; 2) $(1-t+2t^2)^{10}$, $k=7$;

3) $(2+t-2t^3)^{10}$, $k=5$; 4) $(2+t^4+t^7)^{15}$, $k=17$.

1.23. Доказать, что при целых $m \geqslant 0$, $n \geqslant 0$ справедливы тождества:

1) $\sum\limits_{k=0}^{n} \frac{(n)_k}{(m)_k} = \frac{m+1}{m-n+1}$, $m \geqslant n$;

2) $\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{m+k-1}{k} = \sum\limits_{k=0}^{m}\binom{n+k-1}{k}$.

1.24. Пусть a, b — действительные, k, m, n, r — целые неотрицательные числа. Доказать, что:

1) $\binom{a}{k}+\binom{a}{k-1}=\binom{a+1}{k}$; 2) $(1+t)^a=\sum\limits_{k=0}^{\infty}\binom{a}{k}t^k$, $|t|<1$;

3) $\binom{-a}{k}=(-1)^k\binom{a+k-1}{k}$, $a>0$;

4) $\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{a-k}{r}=\binom{a+1}{r+1}-\binom{a-n}{r+1}$;

5) $\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{a}{k}\binom{b}{n-k}=\binom{a+b}{n}$ (теорема сложения);

6) $\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{a}{k}=\binom{a-1}{n}$;

7) $\sum\limits_{k=0}^{n}\binom{a+n-k-1}{n-k}\binom{b+k-1}{k}=\binom{a+b+n-1}{n}$;

8) $\sum\limits_{0\leqslant k,r\leqslant n}\binom{a}{k}\binom{b}{r}\binom{c}{n-k-r}=\binom{a+b+c}{n}$;

9) $\sum\limits_{k=0}^{\infty}(-1)^k\binom{2k}{k}\left(\frac{1}{8}\right)^k=\sqrt{\frac{2}{3}}$; 10) $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\binom{1/2}{2k+1}\left(\frac{1}{2}\right)^k=\sqrt{5}-\sqrt{3}$;

11) $m\sum\limits_{k}\binom{a}{mk+r}b^{mk+r}=\sum\limits_{\nu=0}^{m-1}e^{-2\pi i r\nu/m}(1+be^{2\pi i\nu/m})^a$, $|b|<1$.

1.25. 1) Найти число всех таких слов длины mn в n-буквенном алфавите, в которых каждая буква алфавита встречается m раз.

2) Сколькими способами множество из n элементов может быть разбито на s подмножеств, из которых первое содержит k_1 элементов, второе k_2 элементов и т. д.?

3) Исходя из комбинаторных соображений, показать, что для любых целых неотрицательных k_1, k_2, …, k_s, n таких, что $k_1+k_2+\ldots+k_s=n$, справедливо равенство

$$\binom{n}{k_1}\binom{n-k_1}{k_2}\cdots\binom{n-k_1-k_2-\ldots-k_{s-1}}{k_s}=\frac{n!}{k_1!k_2!\ldots k_s!}.$$

4) Индукцией по s доказать тождество

$$(t_1+t_2+\ldots+t_s)^n=\sum_{\substack{k_1,\ldots,k_s\\ k_1+\ldots+k_s=n}}\frac{n!}{k_1!\,k_2!\ldots k_s!}\,t_1^{k_1}t_2^{k_2}\ldots t_s^{k_s}.$$

§ 2. Формула включений и исключений

Пусть имеется N предметов и n свойств $A_1, \ldots, A_n$. Каждый из этих предметов может обладать или не обладать любым из этих свойств. Обозначим через $N_{i_1, \ldots, i_k}$ число предметов, обладающих свойствами $A_{i_1}, \ldots, A_{i_k}$ (и, может быть, некоторыми другими). Тогда число $\widehat{N}_0$ предметов, не обладающих ни одним из свойств $A_1, \ldots, A_n$, определяется равенством

$$\widehat{N}_0 = S_0 - S_1 + S_2 - \ldots + (-1)^n S_n, \tag{1}$$

где $S_0 = N$, а

$$S_k = \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n} N_{i_1, \ldots, i_k}, \quad k = 1, \ldots, n. \tag{2}$$

Формула (1) называется *формулой включений и исключений.*

Пример 1. Пусть колода состоит из n карт, пронумерованных числами $1, \ldots, n$. Сколькими способами можно расположить карты в колоде так, что ни для одного i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ карта с номером i не занимает i-е место?

Решение. Имеется n свойств α_i вида «i-я карта занимает в колоде i-е место». Число всевозможных расположений карт в колоде равно $n!$. Число $N_{i_1, \ldots, i_k}$ расположений, при которых карта с номером i_ν занимает место i_ν $(\nu = \overline{1, k})$, равно $(n-k)!$. Тогда

$$S_0 = n!, \quad S_k = \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n} N_{i_1, \ldots, i_k} = \binom{n}{k}(n-k)! = \frac{n!}{k!}.$$

Используя формулу (1), получаем, что число $\widehat{N}_0$ расположений, при которых ни одно из свойств α_i не выполняется, равно

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k S_k = n! \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \frac{1}{k!}.$$

В случае, когда свойств немного, для решения задач подобного сорта удобно пользоваться так называемыми *кругами Эйлера.*

Пример 2. В группе студентов 25 человек. Среди них 20 сдали сессию успешно, 12 занимаются в спортивных секциях, причем 10 из них сдали сессию успешно. Сколько неуспевающих студентов не посещает спортивных секций?

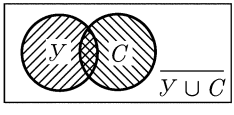


Рис. 8.1

Решение. Изобразим (рис. 8.1) множество студентов, успешно сдавших сессию, кругом, помеченным буквой $У$, а множество тех, кто занимается в секциях, кругом, помеченным буквой $С$. Пересечение кругов соответствует множеству успевающих студентов, занимающихся спортом, а объединение — множеству студентов, которые учатся успешно или посещают секции. Число таких студентов рав-

но $20 + 12 - 10 = 22$. Число тех неуспевающих студентов, которые не посещают секций, равно $25 - 22 = 3$.

При решении задач, связанных с подсчетами числа элементов из множества $U = \{a_1, \ldots, a_N\}$, обладающих заданными свойствами, используются диаграммы Венна. *Диаграмма Венна* для n свойств представляет собой прямоугольник, разбитый на 2^n клеток. Каждая клетка соответствует одному типу элементов. Тип элемента определяется тем, что для каждого i $(1 \leqslant i \leqslant n)$ известно, обладает элемент i-м свойством или нет. Поэтому тип и соответствующую ему клетку удобно кодировать двоичным вектором $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, в котором $\alpha_i = 1$, если i-е свойство выполнено для данного типа элементов, и $\alpha_i = 0$ в противном случае $(i = 1, \ldots, n)$.

Пример 3. Пусть X, Y, Z — подмножества множества $U = (a_1, \ldots, a_N)$, удовлетворяющие условиям $X \subseteq (Y \cap Z) \cup U \backslash Y$, $Z \subseteq (X \cap Y) \cup \overline{X}$, $Y \subseteq (X \cap Z) \cup \overline{Z}$, где $\overline{A} = U \backslash A$, $A \in \{X, Y, Z\}$. Найти число троек (X, Y, Z).

Решение. Для каждого $a \in U$ определены три свойства: $a \in X$, $a \in Y$, $a \in Z$. Каждый элемент принадлежит одному из восьми типов в зависимости от принадлежности множества X, Y, Z. Очевидно, что включение $A \subseteq B$ равносильно тому, что $A \cap \overline{B} = \varnothing$. Поэтому условие $X \subseteq (Y \cap Z) \cup \overline{Y}$ равносильно тому, что $X \cap \overline{(Y \cap Z) \cup \overline{Y}} = X \cap ((\overline{Y} \cup \overline{Z}) \cap Y) = X \cap (\overline{Z} \cap Y) = \varnothing$. Два остальных условия равносильны равенствам $Z \cap (\overline{Y} \cap X) = \varnothing$, $Y \cap (\overline{X} \cap Z) = \varnothing$. На диаграмме (рис. 8.2) это соответствует тому, что соответствующие клетки пусты. Таким образом, X, Y, Z тогда и только тогда удовлетворяют условиям задачи, когда среди элементов множества $U = \{a_1, \ldots, a_N\}$ нет элементов трех типов: $\overline{X}YZ$, $X\overline{Y}Z$ и $XY\overline{Z}$. Произвольный элемент из U может принадлежать любому из остальных пяти типов. Отсюда число искомых троек равно 5^N.

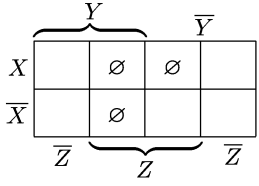


Рис. 8.2

2.1. 1) Доказать по индукции формулу (1).

2) Пусть $\widehat{N}_m$ — число предметов, обладающих в точности m свойствами из n. Доказать, что

$$\widehat{N}_m = \sum_{k=0}^{n-m} (-1)^k \binom{m+k}{m} S_{m+k}. \tag{3}$$

3) Пусть $\check{N}_m$ — число предметов, обладающих в точности не менее чем m свойствами из n. Доказать, что

$$\check{N}_m = \sum_{k=0}^{n-m} (-1)^k \binom{m-1+k}{m-1} S_{m+k}. \tag{4}$$

4) Показать, что

$$S_k = \sum_{m=k}^{n} \binom{m}{k} \widehat{N}_m, \tag{5}$$

$$S_k = \sum_{m=k}^{n} \binom{m-1}{k-1} \check{N}_m. \tag{6}$$

5) Показать, что

$$S_m - (m+1)S_{m+1} \leqslant \widehat{N}_m \leqslant S_m, \tag{7}$$

$$S_m - mS_{m+1} \leqslant \check{N}_m \leqslant S_m. \tag{8}$$

2.2. Четыре человека сдают свои шляпы в гардероб. В предположении, что шляпы возвращаются наугад, найти вероятность того, что в точности k человек получат свои шляпы назад. Рассмотреть все значения k $(0 \leqslant k \leqslant 4)$.

2.3. Пусть $E(r, n, m)$ — число способов размещения r различных предметов по n ящикам, при которых имеется ровно m пустых ящиков, а $F(r, n, m)$ — число тех способов размещения, при которых не менее m ящиков оказываются пустыми. Показать, что:

1) $E(r, n, 0) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} (n-k)^r$;

2) $R(r, n, m) = \binom{n}{m} \sum_{k=0}^{n-m} (-1)^k \binom{n-m}{k} (n-m-k)^r$;

3) $F(r, n, m) = \binom{n}{m} \sum_{k=0}^{n-m} (-1)^k \binom{n-m}{k} (n-m-k)^r \frac{m}{m+k}$.

2.4. При обследовании читательских вкусов студентов оказалось, что 60 % студентов читают журнал A, 50 % — журнал B, 50 % — журнал C, 30 % — журналы A и C, 20 % — журналы B и C, 40 % — журналы A и C, 10 % — журналы A, B и C. Выяснить, сколько процентов студентов:

1) не читает ни одного из журналов;

2) читает в точности два журнала;

3) читает не менее двух журналов.

2.5. На одной из кафедр университета работают 13 человек, причем каждый из них знает хотя бы один иностранный язык. Десять человек знают английский, семеро — немецкий, шестеро — французский, пятеро знают английский и немецкий, четверо — английский и французский, трое — немецкий и французский. Выяснить:

1) сколько человек знают все три языка;

2) сколько человек знают ровно два языка;

3) сколько человек знают только английский язык.

2.6. 1) Показать, что количество целых положительных чисел, делящихся на n и не превосходящих x, равно $[x/n]$.

2) Найти число целых положительных чисел, не превосходящих 1000 и не делящихся ни на одно из чисел 3, 5 и 7.

3) Найти число целых положительных чисел, не превосходящих 1000 и не делящихся ни на одно из чисел 6, 10 и 15.

4) Показать, что если $n = 30m$, то количество целых положительных чисел, не превосходящих n и не делящихся ни на одно из чисел 6, 10, 15, равно $22m$.

5) Пусть $p_1, \ldots, p_r$ — все простые числа, не превосходящие $\sqrt{n}$. Показать, что число простых чисел p таких, что $\sqrt{n} < p \leqslant n$, равно $n - 1 + \sum\limits_{k=1}^{r} (-1)^k S_k$, где сумма $S_k = \sum \left[\dfrac{n}{p_1^{\alpha_1} \ldots p_r^{\alpha_r}}\right]$ берется по всевозможным $\binom{r}{k}$ наборам показателей $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$, в которых k из показателей равны 1, а остальные равны 0.

6) Найти число простых чисел, не превосходящих 100.

2.7. Пусть U — множество из n $(n \geqslant 3)$ элементов.

1) Найти число пар (X, Y) таких подмножеств множества U, что $X \cap Y = \varnothing$.

2) Найти число таких пар (X, Y), что $X \subseteq U$, $Y \subseteq U$, $|(X \backslash Y) \cup (Y \backslash X)| = 1$.

3) Найти число таких троек (X, Y, Z), что $X \subseteq U$, $Y \subseteq U$, $Z \subseteq U$, $X \cup (Y \cap \overline{Z}) = \overline{X} \cup \overline{Y}$.

4) Найти число таких пар (X, Y) подмножеств множества U, что $X \cap Y = \varnothing$, $|X| \geqslant 2$, $|Y| \geqslant 3$.

5) Найти число таких пар (X, Y), что $X \subseteq U$, $Y \subseteq U$, $|(X \backslash Y) \cup (Y \backslash X)| = 1$, $|X| \geqslant 2$, $|Y| \geqslant 2$.

6) Найти число таких троек (X, Y, Z), что $X \subseteq U$, $Y \subseteq U$, $Z \subseteq U$, $X \cup (Y \cap \overline{Z}) = \overline{X} \cup \overline{Y}$, $|X| \geqslant 1$, $|Y| \geqslant 1$, $|Z| \leqslant 1$.

2.8. Задача мажордома. К обеду за круглым столом приглашены n пар враждующих рыцарей $(n \geqslant 2)$. Требуется рассадить их так, чтобы никакие два врага не сидели рядом. Показать, что это можно сделать $\sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} n \cdot 2^{k+1} (2n - k - 1)!$ способами.

2.9. Задача о супружеских парах. Сколькими способами можно расположить за круглым столом шесть супружеских пар так, чтобы мужчины и женщины чередовались и никакие двое супругов не сидели рядом?

§ 3. Возвратные последовательности, производящие функции, рекуррентные соотношения

Последовательность $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ называется *возвратной*, если для некоторого k и всех n выполняется соотношение вида

$$a_{n+k} + p_1 a_{n+k-1} + \ldots + p_k a_n = 0, \qquad (1)$$

где коэффициенты p_i $(i = 1, \ldots, k)$ не зависят от n. Многочлен

$$P(x) = x^k + p_1 x^{k-1} + \ldots + p_k \tag{2}$$

называется *характеристическим* для возвратной последовательности.

3.1. 1) Доказать, что возвратная последовательность полностью определяется заданием ее первых k членов и соотношением (1).

2) Пусть λ является корнем характеристического многочлена. Показать, что последовательность $\{c\lambda^n\}$, где c — константа, удовлетворяет соотношению (1).

3) Доказать, что если $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ — *простые* (не являющиеся кратными) корни характеристического многочлена (2), то *общее* решение рекуррентного соотношения (1) имеет вид

$$a_n = c_1\lambda_1^n + \ldots + c_k\lambda_k^n.$$

4) Пусть λ_i является корнем кратности r_i $(i = 1, \ldots, s)$ характеристического многочлена (2). Доказать, что тогда общее решение рекуррентного соотношения (1) имеет вид

$$a_n = \sum_{i=1}^{s} (c_{i1} + c_{i2}n + \ldots + c_{ir_i}n^{r_i-1})\lambda_i^n,$$

где c_{ij} $(i = 1, \ldots, s,\ j = 1, \ldots, r_i)$ — некоторые константы.

3.2. Найти общие решения рекуррентных соотношений:

1) $a_{n+2} - 4a_{n+1} + 3a_n = 0$; 2) $a_{n+2} + 3a_n = 0$;

3) $a_{n+2} - a_{n+1} - a_n = 0$; 4) $a_{n+2} + 2a_{n+1} + a_n = 0$;

5) $a_{n+3} + 10\,a_{n+2} + 32\,a_{n+1} + 32\,a_n = 0$;

6) $a_{n+3} + 3\,a_{n+2} + 3\,a_{n+1} + a_n = 0$.

3.3. Найти a_n по рекуррентным соотношениям и начальным условиям:

1) $a_{n+2} - 4\,a_{n+1} + 3\,a_n = 0,\ a_0 = 10,\ a_1 = 16$;

2) $a_{n+3} - 3\,a_{n+2} + a_{n+1} - 3\,a_n = 0,\ a_0 = 3,\ a_1 = 7,\ a_2 = 27$;

3) $a_{n+3} - 3\,a_{n+1} + 2\,a_n = 0,\ a_1 = a,\ a_2 = b,\ a_3 = c$;

4) $a_{n+2} - 2\cos\alpha a_{n+1} + a_n = 0,\ a_0 = 1,\ a_1 = \cos\alpha$;

5) $a_{n+2} - a_n = 0,\ a_0 = 0,\ a_1 = 2$;

6) $a_{n+2} - 6\,a_{n+1} + 9\,a_n = 0,\ a_0 = 6,\ a_1 = 6$.

3.4. Доказать, что:

1) если $x = 1$ не является корнем многочлена $x^2 + px + q$, то частным решением рекуррентного соотношения

$$a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = \alpha n + \beta, \tag{3}$$

где α, β, p, q — данные числа, является последовательность $a_n^* = an + b$; найти a и b;

2) если $x = 1$ — простой корень многочлена $x^2 + px + q$, то частное решение может быть найдено в виде $a_n^* = n(an + b)$; найти a и b;

3) если $x = 1$ — кратный корень многочлена $x^2 + px + q$, то частное решение может быть найдено в виде $a_n^* = n^2(an + b)$; найти a и b;

4) в каждом из предыдущих случаев найти общее решение соотношения (3).

3.5. Решить рекуррентные соотношения:

1) $a_{n+1} - a_n = n,\ a_1 = 1$;

2) $a_{n+2} + 2\,a_{n+1} - 8\,a_n = 27 \cdot 5^n,\ a_0 = 0,\ a_1 = -9$;

3) $a_{n+2} - 2\,a_{n+1} + 2\,a_n = 2^n,\ a_0 = 1,\ a_1 = 2$;

4) $a_{n+2} + a_{n+1} - 2\,a_n = n,\ a_0 = 1,\ a_1 = -2$;

5) $a_{n+2} - 4\,a_{n+1} + 4\,a_n = 2^n,\ a_0 = 1,\ a_1 = 2$;

6) $a_{n+2} + a_{n+1} - 6\,a_n = 5 \cdot 2^{n+1},\ a_0 = 2,\ a_1 = 1$.

3.6. 1) Пусть $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ — две последовательности, члены которых связаны соотношениями

$$a_{n+1} = p_1 a_n + q_1 b_n,$$
$$b_{n+1} = p_2 a_n + q_2 b_n,$$
$$\Delta = p_1 q_2 - p_2 q_1 \neq 0,$$

где p_1, q_1, p_2, q_2 — данные числа. Найти выражения для a_n и b_n, считая, что a_1 и b_1 заданы.

2) Найти решение системы рекуррентных соотношений

$$a_{n+1} = 3a_n + b_n,$$
$$b_{n+1} = -a_n + b_n,$$
$$a_1 = 14, \quad b_1 = -6.$$

3) Найти общее решение системы рекуррентных соотношений

$$a_{n+1} = b_n + 5,$$
$$b_{n+1} = -a_n + 3.$$

3.7. Последовательность Фибоначчи $\{F_n\}$ задается рекуррентным соотношением $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ и начальными условиями $F_1 = F_2 = 1$. Доказать, что:

1) для любых натуральныз m и n $F_{n+m} = F_{n-1}F_m + F_nF_{m+1}$;

2) для любых m и $n = km$ число F_n делится на F_m;

3) два соседних числа F_n и F_{n+1} взаимно просты;

4) всякое натуральное число N $(N > 1)$ может быть однозначно представлено в виде суммы чисел Фибоначчи такой, что каждое число входит в сумму не более одного раза и никакие два соседних числа не входят вместе;

5) $F_n = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$;

6) $F_1 + F_3 + \ldots + F_{2n+1} = F_{2n+2}$;

7) $1 + F_2 + F_4 + \ldots + F_{2n} = F_{2n+1}$;

8) $F_{n+1}^3 + F_n^3 - F_{n-1}^3 = F_{3n}$.

С каждой последовательностью $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$ можно связать ряд $A(t) = a_0 + a_1 t + \ldots + a_n t^n + \ldots$, называемый *производящей функцией для последовательности* $\{a_n\}$. В тех случаях, когда ряд $A(t)$ сходится к некоторой функции $f(t)$, функцию $f(t)$ также называют производящей для $\{a_n\}$. В задачах на нахождение производящей функции для последовательности $\{a_n\}$ обычно подразуме-

вается нахождение функции $f(t)$, ряд Маклорена которой есть $A(t)$. *Экспоненциальной производящей функцией* для $\{a_n\}$ называется ряд $E(t) = a_0 + a_1(t) + \ldots + a_n(t)/n! + \ldots$ Можно определить операции сложения, умножения на константу для производящих функций, рассматривая их как формальные ряды. Пусть $A(t)$ и $B(t)$ — производящие функции для последовательностей $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ соответственно, а α, β — константы. Тогда

$$\alpha A(t) + \beta B(t) = \alpha a_0 + \beta b_0 + (\alpha a_1 + \beta b_1)t + \ldots + (\alpha a_n + \beta b_n)t^n + \ldots,$$

$$A(t) \cdot B(t) = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)t + \ldots + \ldots (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_n b_0)t^n + \ldots$$

Если $E_a(t)$ и $E_b(t)$ — экспоненциальные производящие функции соответственно для последовательностей $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$, то сложение и умножение на константу определяются так же, как для обычных производящих функций, а их произведение определяется как

$$E_a(t) \cdot E_b(t) = c_0 + c_1 t + \ldots + \frac{c_n t^n}{n!} + \ldots,$$

где $c_n = a_0 b_n + \binom{n}{1} a_1 b_{n-1} + \ldots + \binom{n}{k} a_k b_{n-k} + \ldots + a_n b_0$.

3.8. Найти производящую функцию $f(t)$ для последовательности $\{a_n\}$, если:

1) $a_n = 1$ при всех $n \geqslant 0$;

2) $a_n = 1$ при $0 \leqslant n \leqslant N$ и $a_n = 0$ при $n > N$;

3) $a_n = \alpha^n$; 4) $a_n = \alpha^n/n!$; 5) $a_n = (-1)^n$; 6) $a_n = n$;

7) $a_n = n(n-1)$; 8) $a_n = \binom{m}{n}$, m — натуральное число;

9) $a_n = \binom{\alpha}{n}$, α — действительное число; 10) $a_n = n^2$;

11) $a_n = \sin \alpha n$; 12) $a_n = \cos \alpha n$.

3.9. Найти экспоненциальные производящие функции $E(t)$ для последовательности $\{a_n\}$, если:

1) $a_n = 1$; 2) $a_n = \alpha^n$; 3) $a_n = n$; 4) $a_n = n(n-1)$;

5) $a_n = (m)_n$; 6) $a_n = n^2$.

3.10. С помощью тождеств, связывающих производящие функции, вывести следующие тождества для биномиальных коэффициентов:

1) $(1+t)^n(1+t)^m = (1+t)^{n+m}$, $\displaystyle\sum_{s=0}^{k} \binom{n}{s}\binom{m}{k-s} = \binom{n+m}{k}$;

2) $(1-t)^{-1-n}(1-t)^{-1-m} = (1-t)^{-2-n-m}$,

$$\sum_{s=0}^{k} \binom{n+s}{n}\binom{m+k-s}{m} = \binom{n+m+k+1}{k};$$

3) $(1+t)^n(1+t)^{-m} = (1+t)^{n-m}$,

$$\sum_{s=0}^{k}(-1)^{k-s}\binom{n}{s}\binom{m+k-s-1}{k-s} = \binom{n-m}{k};$$

4) $(1-t)^{-1-n}(1+t)^{-1-n} = (1-t^2)^{-1-n}$,

$$\sum_{s=0}^{2k}(-1)^{s}\binom{n+s}{n}\binom{n+2k-s}{n} = \binom{n+k}{k};$$

5) $(1+t)^n(1-t^2)^{-n} = (1-t)^n$,

$$\sum_{s=0}^{[k/2]}\binom{n}{k-2s}\binom{n+s-1}{s} = \binom{n+k-1}{k};$$

6) $(1+t)^n(1-t)^n = (1-t^2)^n$,

$$\sum_{s=0}^{k}(-1)^{s}\binom{n}{k-s}\binom{n}{s} = \begin{cases}(-1)^{k/2}\binom{n}{k/2}, & k \text{ четно},\\ 0, & k \text{ нечетно}.\end{cases}$$

3.11. Найти общий член a_n последовательности, для которой функция $A(t)$ является производящей:

1) $A(t) = (q+pt)^m$; 2) $A(t) = (1-t)^{-1}$; 3) $A(t) = \sqrt{1-t}$;

4) $A(t) = t^m(1-t)^m$; 5) $A(t) = (t+t^2+\ldots+t^r)^m$;

6) $A(t) = \left(1+\frac{t^2}{2}\right)^{-m}$; 7) $A(t) = (1+2t)^{-1/2}\left(1-\frac{t}{2}\right)^{-m}$;

8) $A(t) = t^2(1-t)(1+2t)^{-m}$; 9) $A(t) = \ln(1+t)$;

10) $A(t) = \operatorname{arctg} t$; 11) $A(t) = \arcsin t$; 12) $A(t) = e^{-2t^2}$;

13) $A(t) = \int\limits_0^t e^{-x^2}\,dx$; 14) $A(t) = \left(\frac{-t}{1+t}\right)^n$.

3.12. Вывести тождества*):

1) $\sum\limits_s (-1)^{n-s}\binom{n}{s}\binom{m+s}{m+1} = \binom{m}{n-1}$;

2) $\sum\limits_s (-1)^{s}\binom{m}{s}\binom{m}{2n-s} = (-1)^n\binom{m}{n}$;

3) $\sum\limits_s (-1)^{s}\binom{m}{m-k+s}\binom{n+s}{n} = \binom{m-n-1}{k}$;

4) $2\sum\limits_s \binom{n}{2s}\binom{n}{2m-2s} = \binom{2n}{2m} + (-1)^m\binom{n}{m}$;

*) Суммирование ведется по всем s, для которых рассматриваемые выражения имеют смысл.

5) $2\sum\limits_{s}\binom{n+2s}{n}\binom{n+2m-2s+1}{n+1}=\binom{2n+2m+2}{2n+1}$;

6) $\sum\limits_{s=0}(-1)^{n-s}4^s\binom{n+s+1}{2s}=n+1$.

3.13. Пусть $A(t)$ и $E(t)$ являются соответственно обычной и экспоненциальной производящими функциями последовательности $\{a_n\}$.

1) Используя равенство $n!=\int\limits_0^\infty e^{-x}x^n\,dx$, показать, что

$$A(t)=\int_0^\infty e^{-x}E(xt)\,dx. \tag{4}$$

2) Убедиться, что формула (4) справедлива для производящих функций $A(t)=(1-t)^{-1}$ и $E(t)=e^t$ последовательности $a_0=a_1=a_2=\ldots=1$.

3) То же, что и в задаче 2), но для последовательности с общим членом

$$a_n=\begin{cases}0, & n<j,\\ (n)_j, & n\geqslant j.\end{cases}$$

3.14. 1) Пусть $(a)_n=a(a-1)\ldots(a-n+1)$. Доказать, используя экспоненциальные производящие функции, что

$$(a+b)_n=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(a)_{n-k}(b)_k.$$

Указание. Использовать тождество $(1+t)^{a+b}=(1+t)^a(1+t)^b$.

2) Пусть $(a)_{n,h}=a(a-h)\ldots(a-h(n-1))$. Показать, что

$$(a+b)_{n,h}=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(a)_{n-k,h}(b)_{k,h}.$$

3.15. Пусть $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ — последовательности, $b_{-1}=0$, $A(t)$ и $B(t)$ — соответствующие производящие функции. Показать, что:

1) если $a_n=b_n-b_{n-1}$, то $A(t)=B(t)(1-t)$;

2) если $a_n=b_{n+1}-b_n$, то $A(t)=B(t)\dfrac{1-t}{t}-b_0t^{-1}$;

3) если $a_n=b_{n+1}+b_{n+2}+\ldots$, $a_0=B(1)$, то $A(t)=\dfrac{B(1)-B(t)}{1-t}$;

4) если $a_n=nb_n$, то $A(t)=t\dfrac{d}{dt}B(t)$;

5) если $a_n=n^2b_n$, то $A(t)=t\dfrac{d}{dt}\Big(t\dfrac{d}{dt}B(t)\Big)$;

6) если определить операцию S^k $(k\geqslant 0)$ над последовательностью $\{b_n\}$ с помощью соотношения

$$S^k(b_n)=b_n+\binom{k}{1}b_{n-1}+\ldots+\binom{k+j-1}{j}b_{n-j}+\ldots+\binom{k+n-1}{n}b_0$$

и положить $a_n=S^k(b_n)$, то $A(t)=(1-t)^{-k}B(t)$;

7) если $a_n = b_{2n}$, то $A(t) = \frac{1}{2}\,(B(t^{1/2}) + B(-t^{1/2}))$;

8) если $a_n = b_0 + b_1 + \ldots + b_{n-1}$, $a_0 = 0$, то $A(t) = B(t)t(1-t)^{-1}$.

3.16. Пусть $A(t)$ и $B(t)$ — производящие функции последовательностей $\{a_n\}$ и $\{b_n\}$ соответственно, и пусть $A(t) \cdot B(t) = 1$.

Найти $\{b_n\}$ и $B(t)$ по заданной последовательности $\{a_n\}$:

1) $a_n = \binom{m}{n}$; 2) $a_n = a^n$; 3) $a_n = n + 1$;

4) $a_0 = a_2 = 1$, $a_n = 0$ при $n \neq 0, 2$;

5) $a_n = (-1)^n$; 6) $a_n = (-1)^n \binom{2n}{n} 4^{-n}$.

3.17. Пусть последовательность $\{a_n\}$ удовлетворяет рекуррентному соотношению $a_{n+2} + pa_{n+1} + qa_n = 0$.

1) Показать, что $A(t) = \dfrac{a_0 + (a_1 + pa_0)t}{1 + pt + qt^2}$.

2) Пусть $1 + pt + qt^2 = (1 - \lambda_1 t)(1 - \lambda_2 t)$, $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Показать, что

$$a_n = (a_1 + pa_0)\,\frac{\lambda_1^n - \lambda_2^n}{\lambda_1 - \lambda_2} + a_0\,\frac{\lambda_1^{n+1} - \lambda_2^{n+1}}{\lambda_1 - \lambda_2}.$$

3) Выразить a_n в случае, когда $1 + pt + qt^2 = (1 - \lambda t)^2$.

3.18. Пусть

$$a_n = \sum_{j=0}^{n} \binom{n+j}{2j}, \quad b_n = \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n+j}{2j+1}, \quad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

и $A(t)$, $B(t)$ — соответствующие производящие функции.

1) Показать, что a_n и b_n связаны соотношениями вида

$$a_{n+1} = a_n + b_{n+1},$$
$$b_{n+1} = b_n + a_n, \quad a_0 = 1, \quad b_0 = 0.$$

2) Показать, что $A(t)$ и $B(t)$ удовлетворяют системе уравнений

$$A(t) - 1 = tA(t) + B(t),$$
$$B(t) = tA(t) + tB(t).$$

3) Найти $A(t)$ и $B(t)$.

4) Показать, что

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{3+\sqrt{5}}\right)^n a_n = \frac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}, \quad \lim_{n\to\infty} \left(\frac{2}{3+\sqrt{5}}\right)^n b_n = \frac{1}{\sqrt{5}}.$$

3.19. Пусть члены последовательности $\{a_n\}$ удовлетворяют соотношению

$$a_n = a_0 a_{n-1} + a_1 a_{n-2} + \ldots + a_{n-1} a_0, \quad a_0 = 1.$$

1) Показать, что производящая функция $A(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ удовлетворяет равенству $tA^2(t) = A(t) - a_0$, или, с учетом начального условия равенству $A(t) = \dfrac{1 - \sqrt{1 - 4t}}{2t}$.

2) Разлагая $A(t)$ в ряд по степеням t, показать, что

$$a_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}.$$

3) Найти последовательность $\{a_n\}$, члены которой удовлетворяют соотношениям

$$a_0 a_{n-1} + a_1 a_{n-2} + \ldots + a_{n-1} a_0 = 2^n a_n, \quad a_0 = a_1 = 1.$$

3.20. Вывести рекуррентное соотношение для последовательности чисел $\{a_n\}$ и разрешить это соотношение, если:

1) a_n — число способов разбиения выпуклого $(n+2)$-угольника на треугольники диагоналями, не пересекающимися внутри этого многоугольника;

2) a_n — число таких способов расстановки скобок в выражении $b_1 : b_2 : \ldots : b_{n+1}$, при которых получающиеся выражения имеют смысл.

3.21. Используя метод математической индукции, найти последовательность $\{a_n\}$ по рекуррентному соотношению и начальным условиям:

1) $a_{n+1} = (n+1)a_n$, $a_0 = 1$; 2) $na_{n+1} + a_n = 0$, $a_1 = 1$;

3) $(n+2)(n+1)a_{n+2} - n^2 a_n$, $a_0 = 0$, $a_1 = 1$;

4) $(n+2)^2 a_{n+2} + a_n = 0$, $a_0 = 1$, $a_1 = 0$;

5) $n^2 a_{n+2} + (n+2)^2 a_n = 0$, $a_1 = 1$, $a_2 = 0$;

6*) $a_{n+1}^2 - a_n a_{n+2} = (-1)^{n-1}$, $a_0 = 1$, $a_1 = 1$.

3.22. Пусть $A_n(t) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a(n, k)t^k$ — производящая функция для последовательности, удовлетворяющей соотношению $a(n, k) = a(n, k-1) + a(n-1, k)$ с начальными условиями $a(n, 0) = 1$, $a(0, k) = 0$ при $k > 0$. Показать, что:

1) $1 - t)A_n(t) = A_{n-1}(t)$; 2) $A_n(t) = (1-t)^{-n}$;

3) $a(n, k) = \binom{n+k-1}{k}$.

3.23. 1) Сколькими способами можно разменять 10-копеечную монету монетами в 1, 2, 3 и 5 копеек.

2) Та же задача, что и 1), при условии, что каждая из разменных монет присутствует в двух экземплярах.

3) Та же задача, что и 1), при условии, что имеются четыре копеечные монеты, три монеты достоинством 2 копейки, две трехкопеечные монеты и одна пятикопеечная.

3.24. Найти производящую функцию $A(t)$ для последовательности $\{a_n\}$, где:

1) a_n — число решений в целых неотрицательных числах уравнения $2x + 3y + 5z = n$;

2) a_n — число решений того же уравнения при условии, что x, y, z принимают значения 0 или 1;

3) a_n — число решений в целых числах того же уравнения при условии, что $0 \leqslant x \leqslant p$, $0 \leqslant y \leqslant r$, $0 \leqslant z \leqslant s$.

3.25*. По заданной производящей функции $A(t)$ для последовательности $\{a_n\}$ найти a_n:

1) $A(t) = \prod\limits_{k=0}^{\infty} (1 - q^k t)$, $|q| < 1$.

Указание. Показать, что $A(t) = (1 - qt)A(qt)$, и сравнить коэффициенты при t^n в левой и правой частях этого равенства;

2) $A(t) = \prod\limits_{k=0}^{\infty} (1 + qt^{2^k})$.

Указание. Доказать, что $a_n = q^{b_n}$, где b_n — число единиц в двоичном разложении числа n.

3.26. Пусть $S(n, k, l) = \sum\limits_{\nu=0}^{n} (-1)^{n-\nu} \binom{n}{\nu} (\nu + l)^k$. Доказать, что:

1) $S(n+1, k, l) = S(n, k, l+1) - S(n, k, l)$;

2) $S(n, k, l+1) = S(n, k, l) - S(n+1, k, l)$;

3) $S(n, k+1, l) = (n+l)S(n, k, l) + nS(n-1, k, l)$;

4) $S(n, k, l) = 0$ при $n > k$;

5) $S(n, n, l) = n!$; 6) $S(n, k, l) > 0$ при $n \leqslant k$;

7) $S(n, k, l)$ — возрастающая функция параметров k и l при $n \leqslant k$;

8) $S(n, n+1, l) = \sum\limits_{k=0}^{n} (k+l)k!$; 9) $S(1, k, 0) = 1$ при $1 \leqslant k$.

3.27. Пусть $S(n, k) = S(n, k, 0) = \sum\limits_{\nu} (-1)^{n-\nu} \binom{n}{\nu} \nu^k$ и $\sigma_n(t) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} S(n, k) t^k$. Показать, что при $|t| < 1$:

1) $\sigma_n(t) = \dfrac{n!\, t^n}{(1-t)(1-2t)\dots(1-nt)}$;

2) $\sigma_n(t) = t \sum\limits_{k=1}^{n} (-1)^{n-k} k \binom{n}{k} (1-kt)^{-1}$.

§ 4. Теория Пойа

Подстановкой на множестве $Z_n = \{1, 2, \dots, n\}$ называется отображение Z_n на себя*). Подстановку $\pi = \begin{pmatrix} 1, & 2, & \dots, & n \\ i_1, & i_2, & \dots, & i_n \end{pmatrix}$ будем часто задавать строкой $(i_1, i_2, \dots, i_n)$. Подстановка называется *цик-*

*) Роль Z_n может играть любое множество из n элементов.

лической (или *циклом*), если некоторое число j_1 переводится ею в j_2, j_2 — в j_3 и т. д., j_{k-1} переводится в j_k, j_k — в j_1, а все остальные числа остаются на месте. Такой цикл обозначается через $(j_1, j_2, \ldots, j_k)$. Число k называется *длиной цикла*. Произвольная подстановка может быть представлена в виде произведения циклов. Например, $\begin{pmatrix}1,2,3,4,5\\2,1,4,5,3\end{pmatrix} = (1,2)(3,4,5)$. Цикл длины 2 называется *транспозицией*. Всякая подстановка представима в виде произведения (т. е. последовательного выполнения) транспозиций. Подстановка, представимая в виде произведения четного (нечетного) числа транспозиций, называется *четной* (соответственно *нечетной*). Подстановки на множестве Z_n образуют группу относительно операции произведения. Операция произведения подстановок π_1 и π_2 состоит в последовательном их применении. Например, если $\pi_1 = \begin{pmatrix}1,2,3,4\\2,4,3,1\end{pmatrix}$, $\pi_2 = \begin{pmatrix}1,2,3,4\\1,4,3,2\end{pmatrix}$, то $\pi_1\pi_2 = \begin{pmatrix}1,2,3,4\\4,2,3,1\end{pmatrix}$. Операция произведения обладает, как нетрудно проверить, свойством ассоциативности: $\pi(\sigma\tau) = (\pi\sigma)\tau$. Единичным элементом группы является тождественная подстановка $\begin{pmatrix}1,2,\ldots,n\\1,2,\ldots,n\end{pmatrix}$. *Подстановкой, обратной к* $\begin{pmatrix}1,2,\ldots,n\\i_1,i_2,\ldots,i_n\end{pmatrix}$, является подстановка $\begin{pmatrix}i_1,i_2,\ldots,i_n\\1,2,\ldots,n\end{pmatrix}$. Группа подстановок на множестве Z_n называется *симметрической* группой n-й степени и обозначается через S_n. Порядок симметрической группы n-й степени (число ее элементов) равен $n!$.

Если подстановка на множестве N^n представляется в виде произведения b_1 циклов длины 1, b_2 циклов длины 2 и т. д., b_n циклов длины n, то говорят, что *подстановка имеет тип* $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$. Например, подстановка $\begin{pmatrix}1,2,3,4\\3,2,4,1\end{pmatrix}$ имеет тип $(1, 0, 1, 0)$. Если G — некоторая подгруппа группы S_n, то многочлен

$$P_G = P_G(t_1, \ldots, t_n) = |G|^{-1} \sum_{\pi \in G} t_1^{b_1} \ldots t_n^{b_n},$$

где $(b_1, \ldots, b_n)$ — тип подстановки π, называется *цикловым индексом группы* G. Пусть G — группа подстановок на множестве Z_n. Элементы a и b из z_n называются *G-эквивалентными* (обозначение: $a \sim b$), если существует подстановка $\pi \in G$ такая, что $\pi a = b$ (или, что то же самое, $\pi b = a$). Классы G-эквивалентности называются *транзитивными множествами* или *орбитами*.

Лемма Бернсайда. *Число орбит $\nu(G)$ в множестве Z_n, определяемых группой G, дается равенством*

$$\nu(G) = |G|^{-1} \sum_{\pi \in G} b_1(\pi).$$

Пусть M и N — конечные множества, а G и H — группы подстановок соответственно на M и N. *Степенная группа* H^G сос-

тоит из всевозможных пар $(\pi; \sigma)$, где $\pi \in G$, $\sigma \in H$, и действует на множестве N^M всех функций f: $M \to N$. При этом по определению $(\pi; \sigma)f(x) = \sigma f(\pi(x))$ для всех $x \in M$ и $f \in N^M$. Пусть на множестве N задана весовая функция w: $N \to \{0, 1, \dots\}$ и q_n — число элементов веса n в N. Производящая функция $Q(t) = \sum_{n=0}^{\infty} q_n t^n$ называется *перечисляющим рядом для фигур*. Все функции f из N^M определяются равенством $w(f) = \sum_{x \in M} w(f(x))$. Функции f_1 и f_2 из N^M называются *эквивалентными* (обозначение: $f_1 \sim f_2$), если существует элемент $\pi \in G$ такой, что $f_1(\pi x) = f_2(x)$ для всех $x \in M$. Если f_1 и f_2 эквивалентны, то они имеют одинаковый вес. Поэтому можно определить *вес* $w(F)$ *класса эквивалентности* F как вес любого элемента f из F. Пусть φ_k — число классов эквивалентности веса k в N^M. Производящая функция $\Phi(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k t^k$ называется *перечисляющим рядом для функций* (или *перечисляющим рядом для конфигураций*).

Теорема (Д. Пойа)

$$\Phi(t) = P_G(Q(t), Q(t^2), \dots, Q(t^n)),$$

где $n = |G|$, $P_G(t_1, t_2, \dots, t_n)$ — *цикловой индекс группы* G, *а* $Q(t^k)$ *подставляется в* P_G *на место переменной* t_k $(k = 1, 2, \dots, n)$.

4.1. Найти тип подстановки π:

1) $\pi = (2, 3, 4, 1)$; 2) $\pi = (4, 2, 3, 1)$; 3) $\pi = (3, 4, 5, 6, 1, 2)$;

4) $\pi = (8, 2, 1, 7, 4, 6, 3, 5)$.

4.2. Представить подстановки из предыдущей задачи в виде произведения транспозиций.

4.3. Найти цикловой индекс группы G, где:

1) G — группа подстановок вершин квадрата, получающихся при вращениях квадрата в плоскости;

2) G — группа подстановок вершин квадрата, получающихся при вращении квадрата в пространстве;

3) G — группа подстановок вершин тетраэдра, получающихся при его вращениях;

4) G — группа подстановок ребер тетраэдра, получающихся при его вращениях;

5) G — группа подстановок граней тетраэдра, получающихся при его вращениях;

6) $G = S_3$;

7) $G = A_4$, где A_4 — знакопеременная группа степени 4, т. е. подгруппа группы S_4, состоящая из подстановок, представимых произведениями четного числа транспозиций;

8) G — группа подстановок граней куба, получающихся при вращениях;

9) G — группа подстановок вершин октаэдра.

4.4. 1) Доказать, что группа G, определенная в задаче 4.3, 1), задает на множестве Z_4 одну орбиту.

2) Найти число орбит в множестве Z_4, определяемых группой G, образованной перестановками:

$\pi_1 = (1, 2, 3, 4)$, $\pi_2 = (1, 2, 4, 3)$, $\pi_3 = (2, 1, 3, 4)$, $\pi_4 = (2, 1, 4, 3)$.

4.5. Доказать лемму Бернсайда.

4.6. Пусть $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ — вектор, соответствующий разбиению числа n, для которого $b_1 + 2b_2 + \ldots + nb_n = n$, где b_k — целые неотрицательные числа $(1 \leqslant k \leqslant n)$. Через $H(\mathbf{b})$ обозначим множество всех таких подстановок симметрической группы S_n, у которых тип совпадает с b, и пусть $h(\mathbf{b}) = |H(\mathbf{b})|$.

1) Доказать, что $h(\mathbf{b}) = n!\left(\prod\limits_{k=1}^{n} k^{b_k} \cdot b_k!\right)^{-1}$.

2) Доказать, что $P_{S_n}(t_1, t_2, \ldots, t_n) = \dfrac{1}{n!}\sum\limits_{\mathbf{b}} h(\mathbf{b}) \prod\limits_{k=1}^{n} t_k^{b_k}$.

3) Доказать, что цикловой индекс P_{S_n} равен коэффициенту при x^n в разложении функции

$$\exp\{t_1 x + t_2 \frac{x^2}{2} + \ldots + t_k \frac{x^k}{k} + \ldots\}$$

в ряд по степеням x.

4.7. Пусть A_n — знакопеременная группа степени n, т. е. подгруппа группы S_n, состоящая из всех ее подстановок, представляемых в виде произведения четного числа транспозиций. Доказать, что

$$P_{A_n}(t_1, \ldots, t_n) = P_{S_n}(t_1, \ldots, t_n) + P_{S_n}(t_1, -t_2, \ldots, (-1)^n t_n).$$

4.8. Пусть G — группа подстановок множества X, H — группа подстановок множества Y, $X \cap Y = \varnothing$. Произвольной паре подстановок $\pi \in G$, $\sigma \in H$ поставим в соответствие подстановку $\pi \times \sigma$ множества $X \cup Y$, определенную так: $z \to \pi z$ при $z \in X$, $z \to \sigma z$ при $z \in Y$.

1) Показать, что подстановки $\pi \times \sigma$ образуют группу порядка $|G| \cdot |H|$. Эта группа называется *произведением* групп G и H и обозначается $G \times H$.

2) Показать, что если подстановки $\pi \in G$, $\sigma \in H$ имеют соответственно типы $(b_1, \ldots, b_n)$ и $(c_1, \ldots, c_n)$, то $\pi \times \sigma$ имеет тип $(b_1 + c_1, \ldots, b_n + c_n)$.

3) Доказать, что $P_{G \times H} = P_G \times P_H$.

4.9. 1) Найти число ожерелий, которые можно составить из бусин двух цветов, если каждое ожерелье содержит семь бусин. Ожерелья считаются одинаковыми, если одно из другого получаются поворотом (зеркальные повороты не допускаются).

2) С помощью теоремы Пойа найти количество ожерелий из бусин k цветов, если каждое ожерелье состоит из n бусин (n — простое число). Ожерелья считаются одинаковыми, если одно из другого получается поворотом без отражений.

4.10. 1) Найти число различных окрасок вершин тетраэдра в два цвета. Две окраски считаются различными, если нельзя добиться совпадения цветов вершин вращениями тетраэдра.

2) Найти число различных окрасок вершин октаэдра в три цвета.

3) Найти число различных окрасок граней куба таких, что три грани окрашены в красный цвет, две в синий и одна в белый.

4.11. Пусть G — группа подстановок множества Z_n, а E — единичная группа, действующая на множестве N и переводящая каждый элемент $x \in N$ в себя. Найти число орбит, определяемых степенной группой E^G на множестве N^{Z_n}.

4.12. Пусть T_k — число попарно неизоморфных корневых деревьев с k вершинами, а $T(x) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} T_k x^k$ — производящая функция для последовательности $\{T_k\}$. Доказать, что

$$T(x) = x \sum_{n=1}^{\infty} P_{S_n}(T(x), \ldots, T(x^n)).$$

4.13. Пусть g_n — число попарно неизоморфных графов с n вершинами, l_n — число попарно неизоморфных связных графов с n вершинами. Пусть

$$g(t) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n t^n, \quad l(t) = \sum_{n=1}^{\infty} l_n t^n$$

суть соответствующие производящие функции. Доказать, что

$$g(t) = \sum_{n=1}^{\infty} P_{S_n}(l(t), \ldots, l(t^n)).$$

4.14. Пусть $p(n, k)$ — число подстановок группы S_n, состоящих из k циклов, а $\mathscr{P}_n(t) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} p(n, k) t^k$ — соответствующая производящая функция. Доказать, что:

1) $\mathscr{P}_n(t) = \prod\limits_{i=0}^{n-1} (t + i)$;

2) $p(n, k) = p(n-1, k-1) + (n-1)p(n-1, k)$.

§ 5. Асимптотические оценки и неравенства

При оценке роста функций употребляются следующие обозначения. Запись $\varphi(x) = O(\psi(x))$ при $x \in X$ означает, что существует константа c такая, что $|\varphi(x)| \leqslant c|\psi(x)|$ для $x \in X$. Если $\varphi(x) = O(\psi(x))$ и $\psi(x) = O(\varphi(x))$ при $x \in X$, то пишут $\varphi(x) \asymp \psi(x)$ при $x \in X$. Запись $\varphi(x) = o(\psi(x))$ при $x \to a$ означает, что $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{\varphi(x)}{\psi(x)} = 0$.

Говорят, что функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ асимптотически равны (обозначение: $\varphi(x) \sim \psi(x)$) при $x \to a$, если $\varphi(x) = \psi(x) + o(\psi(x))$ при $x \to a$. При разного рода оценках полезна *формула Стирлинга*

$$n! \sim \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n}. \tag{1}$$

Для более точных оценок используются неравенства

$$\sqrt{2\pi n}\, n^n \exp\Big\{-n + \frac{1}{12n} - \frac{1}{360n^3}\Big\} < n! < \sqrt{2\pi n}\, n^n \exp\Big\{-n + \frac{1}{12n}\Big\}. \tag{2}$$

5.1. Доказать неравенства*):

1) $n^{n/2} < n! < \Big(\dfrac{n+1}{2}\Big)^n$ при $n > 2$; 2) $(2n)! < [n(n+1)]^n$;

3) $\Big(1 + \dfrac{1}{n}\Big)^n < 3$; 4) $\Big(\dfrac{n}{3}\Big)^n < n!$; 5) $(n!)^2 < \Big(\dfrac{n(n+1)}{2}\Big)^n$, $n > 1$;

6) $1 \cdot 2^2 \cdot 3^3 \cdot \ldots \cdot n^n \leqslant \Big(\dfrac{2n+1}{3}\Big)^{n(n+1)/2}$; 7) $\dfrac{(2n-1)!!}{(2n)!!} < \dfrac{1}{\sqrt{3n+1}}$;

8) $(2n-1)!! < n^n$, $n > 1$; 9) $n! > e^{-n} n^n$;

10) $(1+\alpha)^n \geqslant (1+\alpha n)$ при $-1 \leqslant \alpha$, $n \geqslant 1$;

11) $\Big(\dfrac{n+2}{n+1}\Big)^{n+1} > \Big(\dfrac{n+1}{n}\Big)^n$.

5.2. Доказать неравенства:

1) $\Big(2 \cdot \dfrac{n-k}{k+1}\Big)^k < \dbinom{n}{k} \leqslant \dfrac{1}{e}\Big(\dfrac{en}{k}\Big)^k$, $n \geqslant k \geqslant 1$;

2) $\Big(\dfrac{n}{k}\Big)^k < \dbinom{n}{k} < \dfrac{n^n}{k^k (n-k)^{n-k}}$, $n > k > 0$;

3) $\dfrac{4^n}{2\sqrt{n}} < \dbinom{2n}{n} \leqslant \dfrac{4^n}{\sqrt{3n+1}}$, $n > 1$.

5.3. Используя формулу Стирлинга, показать, что при $n \to \infty$ справедливы асимптотические равенства:

1) $(2n-1)!! \sim \sqrt{2}\,(2n)^n e^{-n}$; 2) $\dbinom{2n}{n} \sim \dfrac{1}{\sqrt{\pi n}} \cdot 4^n$;

3) $\dfrac{n!}{\Big(\Big[\dfrac{n}{3}\Big]!\Big)^2 \Big(n - 2\Big[\dfrac{n}{3}\Big]\Big)!} \sim \dfrac{2\sqrt{3}}{2\pi} \cdot \dfrac{3^n}{n}$;

4) $\dfrac{(m+1)(m+2)\ldots(m+n)}{(k+1)(k+2)\ldots(k+m)} \sim \dfrac{k!}{m!}\, n^{m-k}$ для целых неотрицательных k и m;

5) $\dfrac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{2}\, n}$.

*) Символом $(2n-1)!!$ обозначается число $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot (2n-1)$, а $(2n)!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot (2n)$.

5.4. Доказать, что при $n \to \infty$ справедливы следующие асимптотические равенства:

1) $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k+1}\binom{n}{k} \sim \frac{2^{n+1}}{n}$; 2) $\sum\limits_{\nu} \binom{n}{r+k\nu} \sim \frac{1}{k} \cdot 2^n$, $0 \leqslant r < k$;

3) $\sum\limits_{\nu} \binom{n}{r+k\nu} \alpha^{r+k\nu} \sim \frac{1}{k}(1+\alpha)^n$, $0 \leqslant r < k$;

4) $\sum\limits_{k=1}^{n} k\binom{n}{k}^2 \sim \frac{1}{2} \cdot \sqrt{\frac{n}{\pi}} \cdot 4^n$.

5.5. Пусть $b_0, b_1, \ldots, b_n$ — такие числа, что $0 < a^k \leqslant b_k \leqslant c^k < 1$. Выяснить, верно ли, что:

1) $(1+a)^n \leqslant \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} b_k \leqslant (1+c)^n$;

2) $(1-c)^n \leqslant \sum\limits_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} b_k \leqslant (1-a)^n$.

5.6. 1) Доказать неравенство Чебышева в следующей форме. Пусть $A = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ — совокупность чисел, $\overline{a} = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} a_i$, $Da = \frac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} (a_i - \overline{a})^2$. Тогда доля δ_t тех a_i, для которых $|a_i - \overline{a}| \geqslant t$, не превышает Da/t^2.

2) Используя неравенство Чебышева, показать, что

$$\sum_{0 \leqslant k \leqslant n/2 - t\sqrt{n}} \binom{n}{k} + \sum_{n/2 + t\sqrt{n} \leqslant k \leqslant n} \binom{n}{k} \leqslant \frac{2^n}{(2t^2)}.$$

3) Показать, что $\sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{k}\binom{n}{k} \sim \frac{2^{n+1}}{n}$.

5.7. С помощью формулы Стирлинга показать, что:

1) если $\left|k - \frac{n}{2}\right| = o(n^{3/4})$ при $n \to \infty$, то

$$\binom{n}{k} \sim \frac{2^{n+1}}{\sqrt{2\pi n}} e^{-(2k-n)^2/(2n)};$$

2*) если $a > 0$ и $k - \frac{an}{a+1} = o(n^{2/3})$ при $n \to \infty$, то

$$\binom{n}{k} a^k = \frac{(1+a)^{n+1}}{\sqrt{2\pi n a}} \exp\left\{-\frac{(k(a+1)-an)^2}{2an}\right\} \times$$
$$\times \left(1 + O\left(\frac{1}{n} + \frac{(k(a+1)-an)^3}{n^2}\right)\right).$$

3*) если $a>0$, $k<m$, $h=\dfrac{a+1}{\sqrt{an}}$, $x_k=\Big(k-\dfrac{na}{a+1}\Big)h$, $x_m=\Big(m-\dfrac{na}{a+1}\Big)h$, $x_k\to\infty$, $x_m^3h\to 0$, $m-k\to\infty$ при $n\to\infty$, то

$$\sum_{\nu=k}^{m}\binom{n}{\nu}a^\nu\sim\frac{(a+1)^{n+1}}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{e^{-x_k^2/2}}{x_k}-\frac{e^{-x_m^2/2}}{x_m}\right);$$

4) если $a>0$, $x\to\infty$ и $x=o(n^{1/6})$ при $n\to\infty$, то

$$\sum_{\nu>\frac{na}{a+1}+x\frac{\sqrt{\pi a}}{a+1}}\binom{n}{\nu}a^\nu\sim\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,x}\,e^{-x^2/2}(1+a)^n.$$

5.8. Пусть $0<\lambda<1$, λ_n целое, $\mu=1-\lambda$, и пусть $G(n,\lambda)=\dfrac{\lambda^{-\lambda n}\mu^{-\mu n}}{\sqrt{2\pi\lambda\mu n}}$. С помощью формул (1) и (2) показать, что:

1) $\binom{n}{\lambda n}\sim G(n,\lambda)$ при $n\to\infty$;

2) $G(n,\lambda)\exp\Big\{-\dfrac{1}{12n\lambda\mu}\Big\}<\binom{n}{\lambda n}<G(n,\lambda)$;

3) $\dfrac{\sqrt{\pi}}{2}\,G(n,\lambda)\leqslant\binom{n}{\lambda n}$ при $n\geqslant 2$;

4) $\Big(\dfrac{n}{\lambda n}\Big)<\displaystyle\sum_{k=\lambda n}^{n}\binom{n}{k}<\frac{\lambda}{2\lambda-1}\binom{n}{\lambda n}$ при $\lambda<\dfrac12$;

5) $\displaystyle\sum_{k=\lambda n}^{n}\binom{n}{k}<\lambda^{-\lambda n}\mu^{-\mu n}$ при $\lambda>\dfrac12$;

6) $\displaystyle\sum_{0\leqslant k\leqslant\lambda n}\binom{n}{k}<\lambda^{-\lambda n}\mu^{-\mu n}$ при $\lambda<\dfrac12$.

5.9. Пусть k и n — натуральные числа $(k<n)$. Показать, что:

1) $(n)_k=n^k\exp\left\{-\displaystyle\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu n^\nu}\sum_{i=1}^{k-1}i^\nu\right\}$;

2) если $k=o(\sqrt{n})$ при $n\to\infty$, то $(n)_k\sim n^k$;

3) если $k=o(n)$ при $n\to\infty$, то для всякого $m>1$

$$(n)_k=n^k\exp\left\{-\sum_{\nu=1}^{m-1}\frac{k^{\nu+1}}{\nu(\nu+1)n^\nu}+O\Big(\frac{k^{m+1}}{n^m}\Big)\right\};$$

4) при $n\to\infty$ и $k=o(n^{3/4})$ $(n)_k=n^k\exp\Big\{-\dfrac{k^2}{2^n}-\dfrac{k^3}{6n^2}+o(1)\Big\}$.

5.10. 1) Пусть $k=k(n)$ и $s=s(n)$ таковы, что при $n\to\infty$ $s=o(\sqrt{k})$. Показать, что

$$\binom{n-s}{k-s}\Big/\binom{n}{k}\sim\Big(\frac{k}{n}\Big)^s.$$

2) Показать, что если $s = o(k^{r/(r+1)})$, то

$$\binom{n-s}{k-s}\Big/\binom{n}{k} \sim \left(\frac{k}{n}\right)^s \exp\left\{-\sum_{\nu=1}^{r} \frac{s^{\nu+1}}{\nu(\nu+1)}\left(\frac{1}{k^\nu} - \frac{1}{n^\nu}\right)\right\}.$$

5.11. Пусть $s = s(n)$ и $k = k(n)$ — целочисленные неотрицательные функции натурального аргумента. Показать, что:

1) если $s + k = o(n^{3/4})$ при $n \to \infty$, то

$$\binom{n-s}{k}\Big/\binom{n}{k} \sim \exp\left\{-\frac{sk}{n} - \frac{s^2k + sk^2}{2n^2}\right\};$$

2) если $x^2 + k^2 = o(n)$ при $n \to \infty$, то

$$\binom{n-s}{k}\Big/\binom{n}{k} \sim 1;$$

3) $\exp\left\{-\dfrac{sk}{n} - \dfrac{sk^2}{n^2} - \dfrac{s^2}{(n-k)^2}\right\} < \dbinom{n-s}{k}\Big/\dbinom{n}{k} < \exp\left\{-\dfrac{sk}{n}\right\}$,

$n \geqslant k + 2s$.

5.12. Пусть $f(x)$ — непрерывная, монотонно возрастающая на отрезке $[n, m]$ функция. Показать, что

$$f(n) \leqslant \sum_{k=n}^{m} f(k) - \int_n^m f(x)\,dx \leqslant f(m).$$

5.13. Используя предыдущую задачу, показать, что при $m \to \infty$ справедливы следующие соотношения:

1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{m} \ln k \sim m \ln m - m + O(\ln m)$;

2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{m} k^n = \frac{1}{n+1}\, m^{n+1} + O(m^n)$, $n > 1$;

3) $\displaystyle\sum_{k=2}^{m} \frac{1}{k \ln k \ln\ln k} = \ln\ln\ln m + c + O\left(\frac{1}{m \ln m \ln\ln m}\right)$,

c — константа;

4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{m} \frac{\log k}{k} = \frac{1}{2}\,\log^2 m + c + O\left(\frac{\log m}{m}\right)$, c — константа;

5) $\displaystyle\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k \ln^2 k} = c + \frac{1}{\ln m} + O\left(\frac{1}{m \ln^2 m}\right)$, c — константа;

6) $\displaystyle\sum_{k=n}^{m} \frac{1}{k^\nu} = \frac{1}{\nu - 1}\left(\frac{1}{n^{\nu-1}} - \frac{1}{m^{\nu-1}}\right) + O\left(\frac{1}{n^\nu} - \frac{1}{m^\nu}\right)$;

7) $\displaystyle\sum_{k=n}^{m} \frac{1}{k} = \ln\frac{m}{n} + O\left(\frac{1}{n}\right)$.

5.14. Последовательность $\{p_n\}$ определяется рекуррентным соотношением $p_n = p_{n-1} - \alpha p_{n-1}^{\beta}$, $p_0 = 1$, $0 < \alpha < 1$, $\beta > 1$.

Показать, что:

1) $0 < p_n < 1$ $(n \geqslant 1)$; 2) p_n монотонно убывает с ростом n;

3*) $p_n \sim (\alpha(\beta-1)n)^{1/(1-\beta)}$ при $n \to \infty$.

Указание. Воспользоваться неравенствами

$$n = \sum_{k=1}^{n} \frac{p_{k-1} - p_k}{\alpha p_{k-1}^{\beta}} \leqslant \int_1^{p_n} \frac{dx}{-\alpha x^{\beta}} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{p_k - p_{k-1}}{-\alpha p_k^{\beta}}.$$

5.15. 1) Показать, что решение уравнения $xe^x = t$ имеет вид

$$x = \ln t - \ln\ln t + \frac{\ln\ln t}{\ln t} + O\left(\left(\frac{\ln\ln t}{\ln t}\right)^2\right), \quad t \to \infty.$$

2) Показать, что решение уравнения $e^x + \ln x = t$ при $t \to \infty$ имеет вид

$$x = \ln t - \frac{\ln\ln t}{t} + O\left(\left(\frac{\ln\ln t}{t}\right)^2\right).$$

5.16. Пусть $f(x) > 0$ и $e^{tf(t)} = f(t) + t + O(1)$, $0 < t < \infty$. Показать, что $f(t) = \dfrac{\ln t}{t} + O(t^{-2})$ при $t \to \infty$.

5.17. Пусть производящая функция $A(t)$ последовательности $\{a_n\}$ имеет вид $A(t) = Q(t)/P(t)$, где $Q(t)$ и $P(t)$ — многочлены с действительными коэффициентами. Пусть λ_1 — наименьший по абсолютной величине корень многочлена $P(t)$. Доказать, что:

1) если λ_1 — простой (не являющийся кратным) действительный корень, то при $n \to \infty$

$$a_n \sim -\frac{Q(\lambda_1)}{P'(\lambda_1)}\lambda_1^{-n-1}, \quad \text{где} \quad P'(\lambda_1) = \frac{d}{dt}P(t)\Big|_{t=\lambda_1};$$

2) если λ_1 — действительный корень кратности r и

$$A(t) = \frac{Q_1(t)}{(t-\lambda_1)^r} + \frac{Q_2(t)(t-\lambda_1)^r}{P(t)},$$

где $Q_1(t)$, $Q_2(t)$ — многочлены, $Q_1(t) = q_0 + q_1 t + \ldots + q_{r-1}t^{r-1}$, то при $n \to \infty$

$$a_n \sim (-1)^r(\lambda_1)^{-n-r}\sum_{i=0}^{r-1} q_i \binom{-r}{n-i}\lambda_1^i.$$

5.18. Пусть $A(t)$ — производящая функция последовательности $\{a_n\}$. Найти асимптотическое поведение a_n при $n \to \infty$:

1) $A(t) = \dfrac{1+t}{3t^2-4t+1}$; 2) $A(t) = \dfrac{1}{6t^2+5t-6}$; 3) $A(t) = \dfrac{12t^3+10t^2}{6t^2+5t-6}$;

4) $A(t) = \dfrac{t}{4t^2+1}$; 5) $A(t) = \dfrac{2t^3}{6t^4-17t^3+35t^2-22t+4}$;

6) $A(t) = \dfrac{1-3t}{(8t^3-1)(t^2+1)}$; 7) $A(t) = \dfrac{2t^2+4t+8}{(t^2+2t-2)^2}$;

8) $A(t) = \dfrac{2t^3-1{,}8t-0{,}02}{(2t^2+1)(t^2+1{,}4t+0{,}49)}$.

5.19. По заданному рекуррентному соотношению и начальным условиям найти асимптотическое поведение a_n при $n \to \infty$:

1) $a_{n+2} + 3a_{n+1} + 2a_n = 0$, $a_0 = 1$, $a_1 = 2$;
2) $a_n = qa_{n-1} + p(1-a_{n-1})$, $a_0 = 1$, $p+q = 1$, $p, q > 0$;
3) $a_{n+2} + 2a_{n+1} + 4a_n = 0$, $a_0 = 0$, $a_1 = 2$;
4) $a_{n+3} - 9a_{n+2} + 26a_{n+1} - 24a_n = 0$, $a_0 = a_1 = 1$, $a_2 = -3$;
5) $a_{n+4} - 4a_{n+2} + 4a_n = 2$, $a_0 = 1$, $a_1 = 0$, $a_2 = 2$, $a_3 = 0$.

5.20. Найти предел последовательности $\{a_n\}$, заданной рекуррентными соотношениями:

1) $a_{n+1} = (a_n + b/a_n)/2$, $b > 0$, $a_0 > 0$;
2) $a_{n+1} = (2a_n + b/a_n^2)/3$, $b > 0$, $a_0 > 0$;
3) $a_{n+1} = (b - a_n^2)/2$, $0 < b < 1$, $a_0 = b/2$.

5.21. Пусть a_n удовлетворяет соотношениям

$$\begin{gathered} a_n \geqslant 2^{-n-1} + (n-1)\cdot 4^{-n-1}, \\ a_{n+2} \leqslant 2^{-n-3} + (n+1)\cdot 4^{-n-3} + a_n\Big(\Big(\frac{3}{4}\Big)^{n+2} + \\ + (n+2)\cdot 2^{n+2} + 4a_n\Big), \\ a_1 = 0, \quad a_2 = 1/16. \end{gathered} \tag{4}$$

Показать, что:

1) $a_n \leqslant 1/8$; 2) $a_n \leqslant 9(3/4)^n$; 3) $a_n = 2^{-n-1}(1 + O((3/4)^n))$.

5.22. Пусть последовательность $\{a_n\}$ удовлетворяет условию $a_{n+m} \leqslant a_n + a_m$, $a_1 > 0$. Доказать, что $a_n \leqslant a_1 n$ при $n \geqslant 1$.

5.23. Пусть k, n целые. С точностью до 1 вычислить $k = k(n)$, при котором функция $f(n, k)$ принимает максимальное значение:

1) $f(n, k) = \binom{n}{k} 2^{-2^k}$; 2) $f(n, k) = \binom{n}{k} 2^{n-k-2^k}(1 - 2^{-2^k})^{n-k}$.

5.24. Найти минимальное и максимальное значения выражения

$$f(n, r, k) = \binom{n}{r}\binom{n-r}{k-r}\cdot 2^{-r+2^r}$$

как функции от r $(0 \leqslant r \leqslant k \leqslant n)$; r, k, n целые.

5.25. Найти асимптотическое поведение при $n \to \infty$ величины $g(n) = \min\limits_{0 \leqslant k \leqslant n} f(n, k)$, k целое, если:

1) $f(n, k) = 2^{n-k} + 2^{2^k}$; 2) $f(n, k) = k \cdot 2^k + \dfrac{1}{k}\cdot 2^{2n-k}$.

§ 6. Оценки в теории графов и сетей

Помеченным или нумерованным здесь мы будем называть граф, вершинам которого приписаны пометки (номера). Через $\mathcal{G}_n$ будем обозначать множество всех n-вершинных графов (n-графов), вершины которых помечены числами от 1 до n. Через $\mathcal{G}_{n,m}$ будем обозначать множество тех графов из $\mathcal{G}_n$, которые имеют в точности m ребер. Граф из множества $\mathcal{G}_{n,m}$ будет называться кратко (n, m)-*графом*. Графы G и H из $\mathcal{G}_n$ считаются различными, если существуют две вершины j и k, смежные в одном из графов, но не смежные в другом.

Пусть $\varphi_n(P)$ обозначает число всех графов из $\mathcal{G}_n$, обладающих свойством P. Говорят, что почти все графы обладают свойствами P, если $\lim\limits_{n\to\infty}(\varphi_n(P)/|\mathcal{G}_n|) = 1$. Пусть $m = m(n)$ — целочисленная неотрицательная функция, а $\varphi_{n,m}(P)$ — число всех графов из $\mathcal{G}_{n,m}$, обладающих свойством P. Говорят, что почти все $(n, m(n))$-графы обладают свойством P, если

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\varphi_{n,m}(P)}{|\mathcal{G}_{n,m}|} = 1.$$

6.1. Показать, что: 1) $|\mathcal{G}_n| = 2^{\binom{n}{2}}$; 2) $|\mathcal{G}_{n,m}| = \binom{\binom{n}{2}}{m}$.

6.2. 1) Найти число различных турниров с n вершинами, пронумерованными числами $1, 2, \ldots, n$.

2) Найти число ориентированных псевдографов с n нумерованными вершинами и m дугами.

6.3. 1) Показать, что число графов в $\mathcal{G}_n$, у которых заданные k вершин являются изолированными, равно $2^{\binom{n-k}{2}}$.

2) Показать, что число графов без изолированных вершин в $\mathcal{G}_n$ равно $\sum\limits_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}2^{\binom{n-k}{2}}$.

3) Показать, что почти все n-графы не имеют изолированных вершин.

6.4. Пусть подмножество $\mathcal{G} \subset \mathcal{G}_n$ состоит из N попарно различных графов. Показать, что число попарно неизоморфных графов в $\mathcal{G}$ не меньше $N/n!$.

6.5. Пусть ψ_m — число попарно неизоморфных связных графов с m ребрами. Показать, что:

1) $\psi(m) \leqslant \sum\limits_{\frac{1}{2}(1+\sqrt{1+sm})\leqslant n\leqslant m+1}\binom{\binom{n}{2}}{m}$;

2) $\psi(m) \lesssim (2m)^m$ при $m \to \infty$.

6.6. Показать, что число попарно неизоморфных псевдографов, не имеющих изолированных вершин и обладающих m ребрами, не превосходит $(cm)^m$, где c — константа, не зависящая от m.

6.7. Показать, что число попарно неизоморфных k-полюсных сетей с m ребрами без петель и без изолированных вершин не превосходит $(2m)^k(cm)^{2m}$, где c — константа, не зависящая от m.

Каждому нумерованному дереву T с n вершинами можно взаимно однозначно сопоставить два вектора: $I = I(T) = (i_1, \ldots, i_{n-2})$ и $J = J(T) = (j_1, \ldots, j_{n-2})$, координаты которых принимают значения из множества $\{1, \ldots, n\}$. Эти векторы строятся следующим образом. Координата i_1 есть наименьший из номеров висячих вершин дерева T, а j_1 — номер той вершины, с которой вершина i_1 соединена ребром. Ясно, что числа i_1 и j_1 определены однозначно. Удалим из дерева T вершину i_1 и ребро (i_1, j_1). В оставшемся дереве пусть i_2 — снова наименьший номер висячей вершины, а j_2 — номер той вершины, с которой i_2 соединена ребром, и т. д. до тех пор, пока после удаления ребра (i_{n-2}, j_{n-2}) не останется одно ребро. Положим $I = (i_1, \ldots, i_{n-2})$, $J = (j_1, \ldots, j_{n-2})$.

6.8. 1) Восстановить дерево T по векторам I и J:

а) $I = (3, 5, 6, 2, 4)$, $J = (1, 2, 2, 4, 1)$;

б) $I = (2, 4, 5, 1)$, $J = (3, 1, 1, 3)$;

в) $I = (2, 4, 5, 3, 6, 7, 8)$, $J = (9, 8, 3, 1, 7, 1, 1)$.

2) Доказать, что если I и J — векторы, построенные по произвольному нумерованному дереву T, то вектор I, а значит, и дерево T можно однозначно восстановить по вектору J.

3) Доказать теорему Кэли, утверждающую, что число нумерованных деревьев с n вершинами равно n^{n-2}.

6.9. Используя теорему Кэли (см. предыдущую задачу), показать, что число попарно неизоморфных деревьев с n вершинами не меньше, чем $c_n n^{-2,5} e^n$, где $\lim\limits_{n\to\infty} c_n = 1/\sqrt{2\pi}$.

6.10. Показать, что число попарно различных n-вершинных лесов с нумерованными вершинами не превосходит $2^{n-1}n^{n-2}$.

6.11. Пусть степень каждой вершины связного графа G из $\mathcal{G}_n$ не превосходит s. Доказать, что число попарно различных связных k-вершинных подграфов графа G не превосходит $n(4s)^{k-1}$.

6.12. Показать, что число попарно различных связных подграфов куба B^n, порожденных подмножествами из k вершин, не превосходит $2^n(4n)^{k-1}$. (Считать, что вершины куба B^n пронумерованы числами от 1 до 2^n.)

6.13. Показать, что число несвязных графов в $\mathcal{G}_{n,m}$ не превосходит

$$\sum_{k=1}^{[n/2]} \binom{n}{k} \binom{\binom{n}{2} - k(n-k)}{m}.$$

6.14. Показать, что число графов в $\mathcal{G}_{n,m}$, имеющих ровно две компоненты связности, не превосходит

$$4^{n-2} \sum_{k=1}^{[n/2]} \binom{n}{k} \sum_{j=k-1}^{\binom{k}{2}} \binom{\binom{k-1}{2}}{j-k+1} \binom{\binom{n-k-1}{2}}{m-j-n+k+1}.$$

Плоское ориентированное корневое дерево, в котором дуги ориентированы к корню, называется *дихотомическим*, если степень полузахода каждой вершины либо равна 0 (такие вершины будем называть *висячими*), либо равна 2 (такие вершины будем называть *внутренними*).

6.15. 1) Доказать, что каждое дихотомическое дерево с m внутренними вершинами имеет ровно $m+1$ висячих вершин.

2) Пусть t_m — число попарно различных дихотомических деревьев с m внутренними вершинами. Доказать, что $t_0 = t_1 = 1$, а при $m > 1$

$$t_m = \sum_{k=0}^{m-1} t_k t_{m-k-1}.$$

3) Доказать, что $t_m = \dfrac{1}{m+1}\binom{2m}{m}$.

Плоское ориентированное корневое дерево будем называть *почти дихотомическим*, если все дуги ориентированы к корню, степень полузахода каждой вершины находится в пределах от 0 до 2, каждая вершина с полустепенью захода, равной 1, является концом дуги, исходящей из висячей вершины (т. е. вершины с полустепенью захода, равной 0). Вершина почти дихотомического дерева называется *внутренней*, если степень полузахода отлична от 0. Пусть $t_{m,k}$ — число попарно различных почти дихотомических деревьев с m внутренними вершинами, k из которых имеют полустепень захода, равную 1, и пусть $\widehat{t}_m$ — число попарно различных почти дихотомических деревьев с m внутренними вершинами.

6.16. 1) Доказать, что $t_{m,k} = t_{m-k}\binom{m-k+1}{k}$, где t_m — величина, определенная в предыдущей задаче.

2) Доказать, что $\widehat{t}_m \leqslant 2^{cm}$, где $2 < c < 3$.

Обозначим через Φ_n множество всех попарно различных формул над множеством связок $\{\vee,\ \&\ ,\ -\}$ и множеством переменных $X^n = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Формулы считаются различными, если они представляют собой различные слова в алфавите $\{\vee,\ \&\ ,\ -,\ (,),\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n\}$. Пусть $\Phi_{n,m}$ — подмножество тех формул из Φ_n, которые содержат ровно m связок и в которых отрицания встречаются только над символами переменных. Пусть $T_{n,m}$ — множество почти дихотомических деревьев, имеющих m внутренних вершин, и таких, что каждая висячая вершина помечена символом алфавита $X_n = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, каждая внутренняя вершина, имеющая полустепень захода, равную 1, помечена символом $-$, а каждая из остальных внутренних вершин — символом из алфавита $\{\vee,\ \&\}$.

6.17. 1) Установить изоморфизм между множествами $\Phi_{n,m}$ и $T_{n,m}$.

2) Доказать, что $|\Phi_{n,m}| \leqslant (cn)^m$, где c — константа, не зависящая от n и m.

Пусть $p(G)$ — некоторый числовой параметр графа G. Пусть $\overline{p}(n) = 2^{-\binom{n}{2}} \sum\limits_{C \in \mathcal{G}_n} p(G)$ — среднее значение параметра p, а $Dp(n) = 2^{-\binom{n}{2}} \sum\limits_{C \in \mathcal{G}_n} (p(G) - \overline{p}(n))^2$ — дисперсия параметра p. Аналогично можно определить среднее значение и дисперсию параметров графов из $\mathcal{G}_{n,m}$. Пусть $\theta > 0$, $\delta_n(\theta)$ — доля тех графов G из $\mathcal{G}_n$, для которых $p(G) \geqslant \theta$, а $\Delta_n(\theta)$ — доля таких графов G из $\mathcal{G}_n$, что $|p(G) - \overline{p}(n)| \geqslant \theta$. Для различных оценок и доказательства свойств почти всех графов часто используются следующие неравенства Чебышева:

$$\delta_n(\theta) \leqslant \frac{\overline{p}(n)}{\theta}, \tag{1}$$

$$\Delta_n(\theta) \leqslant \frac{Dp(n)}{\theta^2}. \tag{2}$$

Пусть, например, $p(G)$ — число изолированных вершин графа G. Требуется показать, что $p(G) = 0$ для почти всех n-графов. Пусть $g_n(i)$ — число графов из $\mathcal{G}_n$, у которых вершина с номером i является изолированной. Тогда

$$\overline{p}(n) = 2^{-\binom{n}{2}} \sum_{C \in \mathcal{G}_n} p(G) = 2^{-\binom{n}{2}} \sum_{i=1}^{n} g_n(i).$$

Очевидно, что $g_n(i) = 2^{\binom{n-1}{2}}$ для всех $i = 1, \ldots, n$. Отсюда $\overline{p}(n) = n \cdot 2^{-n}$. Полагая в (1) $\theta = 1/2$, получаем, что доля графов G из $\mathcal{G}_n$, для которых $p(G) \geqslant 1/2$, не превосходит $n \cdot 2^{-n+1}$. Но $\lim\limits_{n \to \infty} n \cdot 2^{-n+1} = 0$. Следовательно, для почти всех n-графов $p(G) < 1/2$, т. е. $p(G) = 0$.

Пусть теперь $p(G)$ — число ребер в графе G. Покажем, что у почти всех n-графов $p(G) = \frac{1}{2}\binom{n}{2}(1 + \varepsilon_n)$, где $\lim\limits_{n \to \infty} \varepsilon_n = 0$. Имеем $\overline{p}(n) = 2^{-\binom{n}{2}} \sum\limits_{G \in \mathcal{G}_n} p(G) = 2^{-\binom{n}{2}} \sum\limits_{(i,\,j)} g_n(i, j)$, где $g_n(i, j) = 2^{\binom{n}{2}-1}$ — число графов, у которых пара вершин (i, j) соединена ребром. Таким образом, $\overline{p}(n) = \frac{1}{2}\binom{n}{2}$. Подсчитаем дисперсию:

$$Dp(n) = 2^{-\binom{n}{2}} \sum_{G \in \mathcal{G}_n} (p(G) - \overline{p}(n))^2 = 2^{-\binom{n}{2}} \sum_{C \in \mathcal{G}_n} p^2(G) - (\overline{p}(n))^2.$$

Пронумеруем все пары вида (i, j), $1 \leqslant i < j \leqslant n$, числами от 1 до $\binom{n}{2}$, и пусть $\widetilde{g}_n(\nu, \mu)$ — число графов G из $\mathcal{G}_n$, у которых пары с номерами ν и μ являются ребрами. Тогда

$$\sum_{G\in\mathcal{G}_n} p^2(G) = \sum_{\nu=1}^{\binom{n}{2}}\sum_{\mu=1}^{\binom{n}{2}} \widetilde{g}_n(\nu,\,\mu) = \sum_{\nu=1}^{\binom{n}{2}} \widetilde{g}_n(\nu,\,\nu) + 2\sum_{\nu<\mu} \widetilde{g}_n(\nu,\,\mu).$$

Но $\widetilde{g}_n(\nu,\,\mu) = 2^{\binom{n}{2}-2}$, если $\nu \neq \mu$. Поэтому

$$Dp(n) = \frac{1}{2}\binom{n}{2} + \frac{1}{4}\binom{n}{2}\left(\binom{n}{2} - 1\right) - \left(\frac{1}{2}\binom{n}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}\binom{n}{2}.$$

Полагая в (2) $\theta = \sqrt{n\overline{p}(n)}$, получаем, что доля тех графов $G \in \mathcal{G}_n$, для которых $\left|p(G) - \frac{1}{2}\binom{n}{2}\right| \geqslant \sqrt{\frac{n}{2}\binom{n}{2}}$, не превосходит $\frac{1}{n}$. Отсюда вытекает, что для почти всех графов $p(G) = \frac{1}{2}\binom{n}{2}(1+\varepsilon_n)$, где $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$.

6.18. Пусть $p(G)$ — число пар различных вершин графа G из $\mathcal{G}_n$, для которых не существует цепи длины меньшей, чем 3, соединяющей эти вершины. Пусть $\overline{p}(n) = 2^{-\binom{n}{2}} \sum\limits_{G\in\mathcal{G}_n} p(G)$.

1) Показать, что $\overline{p}(n) = \frac{1}{2}\binom{n}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-2}$.

2) Показать, что у почти всех n-графов отсутствуют вершины, расстояние между которыми больше 2.

3) Используя результаты задачи 6.18, 2), показать, что у почти всех n-графов радиус и диаметр равны 2.

6.19. Показать, что среднее число гамильтоновых циклов в графах G из $\mathcal{G}_n$ равно $(n-1)!/2^{n+1}$.

6.20. 1) Найти среднее число $\overline{p}(n)$ циклов длины 3 для графов G из $\mathcal{G}_n$.

2) Найти дисперсию $Dp(n)$ числа циклов длины 3 для графов G из $\mathcal{G}_n$.

3) Показать, что для почти всех графов $G \in \mathcal{G}_n$ число $p(G)$ циклов длины 3 удовлетворяет асимптотическому равенству $p(G) \sim \overline{p}(n)$ при $n \to \infty$.

6.21. 1) Найти среднее число $\overline{p}(n,\,m)$ циклов длины 3 для графов G из $\mathcal{G}_{n,m}$.

2) Показать, что дисперсия $Dp(n,\,m)$ числа циклов длины 3 для графов G из $\mathcal{G}_{n,m}$ удовлетворяет неравенству $D(p)(n,\,m) \leqslant n^4(m/n)^5$, где $N = \binom{n}{2}$.

3) Доказать, что если $m = m(n)$ и $\lim\limits_{n\to\infty}(m/n) = \infty$, то для почти всех графов G из $\mathcal{G}_{n,m}$ число $p(G)$ циклов длины 3 удовлетворяет асимптотическому равенству

$$p(G) \sim \frac{4}{3}\left(\frac{m}{n}\right)^3 \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

6.22. Найти среднее число k-вершинных независимых множеств в графах G из $\mathcal{G}_n$.

6.23. Пусть $p(G)$ — целочисленный неотрицательный параметр, а $\overline{p}(n)$ — его среднее значение для графов G из $\mathcal{G}_n$. Показать, что если $\lim\limits_{n\to\infty} \overline{p}(n) = 0$, то для почти всех графов $p(G) = 0$.

6.24. Используя неравенство Чебышева (2), показать, что у почти всех $(n, m(n))$-графов, где $m(n) = [n/\ln(n \ln n)]$, число изолированных вершин равно $n(1 - \varepsilon(n))$, где $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon(n) = 0$.

Глава IX

МИНИМИЗАЦИЯ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ

§ 1. Структура граней n-мерного куба. Покрытия и тесты для таблиц

Гранью единичного n-мерного куба B^n называется множество $B^{n,\,i_1,\,\ldots,\,i_k}_{\sigma_1\ldots\sigma_k} = \{(\alpha_1,\,\ldots,\,\alpha_n) \in B^n\colon\ \alpha_{i_1} = \sigma_1,\,\ldots,\,\alpha_{i_k} = \sigma_k\}$. Множество $\{i_1,\,\ldots,\,i_n\}$ называется *направлением*, число k — *рангом*, а число $n-k$ — *размерностью грани* $B^{n,\,i_1,\,\ldots,\,i_k}_{\sigma_1\ldots\sigma_k}$. *Кодом* грани $G = B^{n,\,i_1,\,\ldots,\,i_k}_{\sigma_1\ldots\sigma_k}$ называется вектор $\widetilde{\gamma}(G)$ длины n, в котором $\gamma_{i_1} = \sigma_1,\,\ldots,\,\gamma_{i_k} = \sigma_k$, а остальные координаты есть —. Например, $\widetilde{\gamma}(B^{n,\,1,\,3}_{01}) = (0\,—\,1\,—)$. Одномерные грани называются *ребрами* куба.

Обозначим множество векторов длины n с координатами из множества $\{0,\,1,\,—\}$ через G^n. На множестве G^n зададим частичный порядок, полагая $\widetilde{\alpha} \leqslant \widetilde{\beta}$, если вектор $\widetilde{\beta}$ может быть получен из $\widetilde{\alpha}$ путем замены некоторых (быть может, ни одной) координат набора $\widetilde{\alpha}$, равных 0 или 1, на —. Отношение $\widetilde{\alpha} \leqslant \widetilde{\beta}$ между кодами граней G и H соответствует отношению $G \subseteq H$ между гранями. Положим $\|\widetilde{\alpha}\|$ равным числу прочерков в наборе $\widetilde{\alpha}$ и $G^n_k = |\widetilde{\alpha} \in G^n\colon\ \|\widetilde{\alpha}\| = k|$. Тогда $G^k_0 = B^n$, G^n_1 соответствует множеству ребер куба B^n, G^n_k — множеству граней куба B^n, имеющих размерность k. *Интервалом* $I(\widetilde{\alpha},\,\widetilde{\beta})$ *куба* B^n называется множество вида $\{\widetilde{\gamma} \in B^n\colon\ \widetilde{\alpha} \leqslant \widetilde{\gamma} \leqslant \widetilde{\beta}\}$, где $\widetilde{\alpha}$, $\widetilde{\beta}$ — вершины из B^n такие, что $\widetilde{\alpha} \leqslant \widetilde{\beta}$. Число $\rho(\widetilde{\alpha},\,\widetilde{\beta})$ называется *размерностью интервала.*

Пусть M — матрица с элементами из множества $\{0,\,1\}$. Будем говорить, что строка $\widetilde{\alpha}$ матрицы M *покрывает* некоторый столбец $\widetilde{\beta}$, если на их пересечении стоит 1. Матрицу с m строками и n столбцами будем называть *матрицей размерности* $m \times n$. Подмножество A строк матрицы M называется *покрытием* (множества столбцов) *матрицы* M, если для каждого столбца матрицы M найдется строка из множества A, покрывающая этот столбец. Покрытие называется *кратчайшим*, если оно имеет минимальную мощность среди всех покрытий матрицы M. Мощность $\xi(M)$ кратчайшего покрытия

называется *глубиной* матрицы M. Пусть каждой строке $\widetilde{\alpha}$ матрицы M приписано неотрицательное число $w(\widetilde{\alpha})$, называемое *весом строки* $\widetilde{\alpha}$. *Весом множества* A строк матрицы M называется число $w(A) = \sum\limits_{\widetilde{\alpha}\in A} w(\widetilde{\alpha})$. Покрытие A матрицы M называется *минимальным* (относительно весовой функции w), если оно имеет минимальный вес среди всех покрытий матрицы M. Покрытие называется *тупиковым*, если удаление из него любой строки приводит к множеству, не являющемуся покрытием. Покрытие называется *градиентным*, если оно может быть получено в результате следующей пошаговой процедуры. На первом шаге выбирается строка $\widetilde{\alpha}_1$, имеющая наибольшее число единиц, а из M вычеркиваются строка $\widetilde{\alpha}_1$ и все столбцы, имеющие в пересечении с $\widetilde{\alpha}_1$ единицу. В результате получается матрица M_1. Пусть сделано k шагов, на которых выбрано множество строк $A_k = \{\widetilde{\alpha}_1, \ldots, \widetilde{\alpha}_k\}$ и получена матрица M_k. На $(k+1)$-м шаге в матрице M_k выбирается строка $\widetilde{\alpha}_{k+1}$ с наибольшим числом единиц и т. п. Процедура заканчивается, если матрица M_k не содержит единиц. Полученное при этом множество A_k и является градиентным покрытием. Результат процедуры неоднозначен, поскольку выбор строки на каждом шаге, вообще говоря, не является однозначным. Через $L_\Gamma(M)$ будем обозначать максимальную мощность градиентного покрытия матрицы M.

Множество A строк матрицы M называется *тестом*, если в подматрице, образованной строками из A, столбцы с номерами i и j различны, когда столбцы с номерами i и j различны в матрице M. Тест называется *минимальным*, если он имеет минимальную мощность среди всех тестов матрицы. Тест называется *тупиковым*, если после удаления любой строки получается множество, не являющееся тестом. Количество строк в тесте называется его *длиной*.

1.1. Показать, что грань куба B^n размерности k является его интервалом размерности k и наоборот.

1.2. Доказать следующие утверждения:

1) число различных граней куба B^n, имеющих заданное направление $\{i_1, \ldots, i_k\}$, равно 2^k;

2) две различные грани одного направления не пересекаются;

3) объединение всех граней куба B^n, имеющих заданное направление, дает весь куб B^n;

4) число всех граней ранга k куба B^n равно $\binom{n}{k} \cdot 2^k$;

5) общее число граней куба B^n равно 3^n;

6) число граней размерности k, содержащих заданную вершину $\widetilde{\alpha} \in B^n$, равно $\binom{n}{k}$;

7) число граней размерности k, содержащих заданную грань размерности l, равно $\binom{n-l}{k-l}$;

8) пересечение двух граней (если оно не пусто) является гранью;

9) число k-мерных граней, пересекающихся с заданной l-мерной гранью куба B^n, равно $\sum\limits_{j=0}^{\min\{k,\,l\}} \binom{l}{j} \cdot 2^{i-j} \binom{n-l}{k-j}$.

1.3. 1) Пусть G, H, F — грани куба B^n. Показать, что если $G \cap H \neq \varnothing$, $G \cap F \neq \varnothing$, $H \cap F \neq \varnothing$, то $G \cap (H \cap F) \neq \varnothing$.

2) Если $\widetilde{\alpha}$, $\widetilde{\beta}$ — вершины из B^n, то пусть $B(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta})$ — грань куба B^n с кодом $\widetilde{\gamma}$, получающимся из набора $\widetilde{\alpha}$ расстановкой прочерков в тех его координатах, которые отличаются от соответствующих координат набора $\widetilde{\beta}$. Доказать, что для трех произвольных вершин $\widetilde{\alpha}$, $\widetilde{\beta}$, $\widetilde{\gamma}$ из B^n множество $B(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}) \cap B(\widetilde{\beta}, \widetilde{\gamma}) \cap B(\widetilde{\gamma}, \widetilde{\alpha})$ состоит из единственного набора $\widetilde{\delta} = (\delta_1, \ldots, \delta_n)$, где $\delta_i = \alpha_i\beta_i \vee \beta_i\gamma_i \vee \gamma_i\alpha_i$ $(i = 1, \ldots, n)$.

3) Пусть $E(A)$ — множество ребер куба B^n, целиком содержащихся в подмножестве $A \subseteq B^n$. Доказать, что для любого целого m такого, что $0 \leqslant m \leqslant 2^{n-1}$, и любого $A \subseteq B^n$ такого, что $|A| = 2^{n-1} + m$, выполнено неравенство $|E(A)| \geqslant mn$.

1.4. Пусть $n_1, n_2, \ldots, n_s$ — целые неотрицательные числа такие, что $\sum\limits_{i=1}^{s} 2^{n_i} = 2^n$. Тогда в B^n существуют попарно непересекающиеся грани $G_1, G_2, \ldots, G_s$ размерностей, соответственно равных $n_1, n_2, \ldots, n_s$, такие, что $\bigcup\limits_{i=1}^{s} G_i \subseteq B^n$.

1.5. Грани G и H куба B^n называются *несравнимыми*, если не выполняется ни одно из включений $G \subseteq H$, $H \subseteq G$.

1) Показать, что существует множество граней куба B^n, состоящее из $\binom{n}{[n/3]} \binom{n-[n/3]}{[n/3]}$ попарно несравнимых граней.

2) Показать, что мощность всякого множества попарно несравнимых граней куба B^n не превосходит $\binom{n}{[n/3]} \cdot 2^{n-[n/3]}$.

1.6. Найти глубину матрицы M:

1) $M = \begin{bmatrix} 0110 \\ 0011 \\ 1001 \\ 1100 \end{bmatrix}$; 2) $M = \begin{bmatrix} 111000 \\ 100100 \\ 010010 \\ 001001 \end{bmatrix}$; 3) $M = \begin{bmatrix} 111100000001111 \\ 001111001111100 \\ 110001111100110 \\ 111111100000000 \\ 000000011111111 \end{bmatrix}$;

4) $M = \begin{bmatrix} 110000 \\ 011000 \\ 001100 \\ 000110 \\ 000011 \\ 100001 \end{bmatrix}$; 5) $M = \begin{bmatrix} 11100 \\ 01110 \\ 00111 \\ 10011 \\ 11001 \end{bmatrix}$; 6) $M = \begin{bmatrix} 1010010 \\ 1001001 \\ 0101010 \\ 0010110 \\ 0100101 \end{bmatrix}$.

1.7. Найти минимальные мощности градиентных покрытий матриц M из задачи 1.6.

1.8. Найти числа кратчайших покрытий матриц M из задачи 1.6.

1.9. Найти числа тупиковых покрытий матриц M из задачи 1.6.

1.10. Пусть M — матрица с n ненулевыми столбцами, а в каждой ее строке не менее k единиц. 1) Показать, что $\xi(M) \leqslant n-k+1$. 2) Показать, что оценка достижима.

1.11. Пусть M — матрица линейного (n, k)-кода. Показать, что $\xi(M) \leqslant k$.

1.12*. Пусть матрица M размерности $m \times n$ имеет не менее s единиц в каждом столбце. Доказать, что:

1) $\xi(M) \leqslant 1 + \dfrac{m}{s} \ln \dfrac{esn}{m}$; 2) $L_\Gamma(M) \leqslant 1 + \dfrac{m}{s} \ln \dfrac{esn}{m}$.

1.13*. Пусть в матрице M с n ненулевыми столбцами существует подматрица M' с m строками такая, что число столбцов подматрицы M', содержащих менее s единиц, не превосходит ε_n. Доказать, что максимальная мощность $L_\Gamma(M)$ градиентного покрытия матрицы M удовлетворяет неравенству

$$L_\Gamma(M) \leqslant 1 + \varepsilon_n + \frac{m}{s} \ln \frac{ens}{m}.$$

1.14. Пусть матрица m имеет n ненулевых столбцов, а ее глубина равна p. Доказать, что

$$L_\Gamma(M) \leqslant 1 + p + \left(\ln \frac{p}{n}\right) \Big/ \ln\left(1 - \frac{1}{p}\right).$$

1.15. Пусть двоичная матрица M имеет $n = 2(2^n - 1)$ столбцов и $q+2$ строк, причем множество E_i номеров единичных координат i-й строки матрицы M имеет вид

$$E_i = \{2^{i-1},\ 2^{i-1}+1,\ \ldots,\ 2^i - 1,\ n - 2^{i-1} + 1,\ n - 2^{i-1},\ \ldots,\ n - 2^i + 2\}$$

при

$$1 \leqslant i \leqslant q, \quad E_{q+1} = \{1, 2, \ldots, 2^n - 1\}, \quad E_{\sigma+2} = \{2^q,\ 2^q + 1,\ \ldots,\ n\}.$$

Найти отношение мощности градиентного покрытия к мощности кратчайшего покрытия.

1.16. Множество $N \subseteq B^n$ называется (n, k)-*протыкающим*, если в каждой k-мерной грани куба B^n находится хотя бы одна вершина множества N. Пусть $L(n, k) = \min |N|$, где минимум берется по всем (n, k)-протыкающим множествам. Доказать, что:

1) $L(n, 1) = 2^{n-1}$; 2) $L(n, n-1) = 2$; 3) $L(n, 2) \leqslant [2^n/3]$;

4) $m \leqslant L(n, n-2) \leqslant m+2$, где m — наименьшее целое, для которого $\dbinom{m}{[m/2]} \geqslant n$;

5) $L(n, k) \leqslant \displaystyle\sum_{i=0}^{[n/k]} \dbinom{n}{(k+1)i}$;

6) $L(n,\,k) \geqslant 2^{n-r}L(r,\,k) \quad (k \leqslant r \leqslant n)$;

7) $L(n,\,k) \leqslant 1 + 2^{n-k}\ln\binom{n}{k} + 2^{n-k}$.

1.17*. Пусть $1 \leqslant l < k \leqslant n$ и $M_{n,k,l}$ — матрица, строки которой соответствуют наборам из B_k^n, а столбцы — наборам из B_l^n, и пусть 1 на пересечении строки и столбца стоит тогда и только тогда, когда набор, соответствующий столбцу, содержит все единицы набора, соответствующего строке.

1) Найти $\xi(M_{n,n-1,l})$.

2) Доказать, что $\xi(M_{n,k,l}) \geqslant \left\rceil \frac{n}{k} \right\rceil \frac{n-1}{k-1} \left\rceil \dots \right\rceil \frac{n-l+1}{k-l+1} \left[\dots \left[\left[\left[.$

3) Доказать, что $\xi(M_{n,n-k,l}) = l+1$ при $n \geqslant (l+1)k$.

4) Доказать, что $\binom{n}{l} \Big| \binom{k}{l} \leqslant \xi(M_{n,k,l}) \leqslant 1 + \binom{n}{l} \Big| \left(1 + \ln \binom{k}{l}\right) \Big| \binom{k}{l}$.

5) Доказать, что $\xi(M_{n,n-2,n-l}) \leqslant r\binom{q+1}{2} + (l-1+r)\binom{q}{2}$, где r — остаток от деления n на $l-1$, а $q = (n-r)/(l-1)$.

1.18. Пусть M — матрица размерности $m \times n$, φ — положительное число. Показать, что в M можно найти множество строк A мощности, не превышающей n/φ, такое, что после вычеркивания всех столбцов, покрываемых строками из A, получается подматрица, в каждой строке которой менее φ единиц.

1.19. Найти длину минимального теста матриц M из задачи 1.6.

1.20. Найти длины минимальных тестов для матрицы M, если:

1) множество столбцов матрицы M есть B^n;

2) множество столбцов матрицы M есть B_k^n;

3) множество столбцов матрицы M есть $\bigcup\limits_{0 \leqslant k \leqslant n/2} B_{2k}^n$;

4) множество столбцов матрицы M есть $B_k^n \cup B_{k+1}^n \quad (k > 0)$.

1.21. Через $M^{(2)}$ будем обозначить матрицу, составленную из сумм по модулю 2 всевозможных неупорядоченных пар столбцов матрицы M. Например, если $M = \begin{bmatrix} 110 \\ 011 \\ 001 \end{bmatrix}$, то $M^{(2)} = \begin{bmatrix} 011 \\ 110 \\ 011 \end{bmatrix}$.

Доказать, что множество строк матрицы M с номерами $i_1, \dots, i_k$ тогда и только тогда является тестом (минимальным, тупиковым тестом), когда множество строк матрицы $M^{(2)}$ с теми же номерами является ее покрытием (кратчайшим, тупиковым покрытием).

1.22. Две матрицы M и L с одинаковым числом строк называются *T-эквивалентными*, если множество строк с номерами $i_1, \dots, i_k$ является тестом тогда и только тогда, когда множество строк матрицы L с теми же номерами является тестом матрицы L.

Выяснить, являются ли T-эквивалентными матрицы M и L, если:

1) M получена из L перестановкой столбцов;

2) M получена из L перестановкой строк;

3) M получена из L удалением всех столбцов, сплошь состоящих из 0 (из 1);

4) M получена из L вычеркиванием $k-1$ столбцов из k одинаковых;

5) M получена сложением по модулю 2 каждого столбца матрицы L с заданным столбцом $\widetilde{\alpha}$;

6) M получена из L сложением по модулю 2 каждой строки матрицы L с заданной строкой $\widetilde{\alpha}$;

7) M получена из L заменой всех 0 на 1 и всех 1 на 0;

8) M состоит из всех линейных комбинаций столбцов матрицы L;

9) $M = L^{(2)}$ (определение см. в задаче 1.21).

1.23. Доказать, что если M имеет n попарно различных столбцов, то длина минимального теста не меньше $\log_2 n$.

1.24. Доказать, что число тупиковых тестов матрицы M с m строками не превосходит $\binom{m}{[m/2]}$.

1.25. Доказать, что число матриц размерности $m \times n$ с попарно различными строками, у которых совокупность строк с номерами $i_1, \ldots, i_k$ является тестом, равна $2^k(2^k+1)\ldots(2^k-n+1)2^{n(m-k)}$.

Универсальный алгоритм построения тестов состоит в построении по заданной матрице M некоторой к. н. ф. и последующем преобразовании ее в д. н. ф., слагаемые которой соответствуют тупиковым тестам.

Пример. Рассмотрим матрицу M. Для построения всех тупиковых тестов этой матрицы построим сначала матрицу $M^{(2)}$

$$M = \begin{bmatrix} 0\,1\,0 \\ 0\,1\,1 \\ 1\,0\,1 \\ 1\,1\,0 \end{bmatrix}; \quad M^{(2)} = \begin{bmatrix} 1\,0\,1 \\ 1\,1\,0 \\ 1\,0\,1 \\ 0\,1\,1 \end{bmatrix}.$$

По матрице $M^{(2)}$ построим к. н. ф. $Q(M)$, переменными которой являются номера строк матрицы $M^{(2)}$, а элементарные дизъюнкции соответствуют ее столбцам и включают в себя номера строк, имеющих единицы на пересечении с данным столбцом. Таким образом, к. н. ф. имеет вид

$$Q(M) = (1 \vee 2 \vee 3)(2 \vee 4)(1 \vee 3 \vee 4).$$

Раскрывая скобки в к. н. ф. $Q(M)$ и используя правило поглощения $(A \vee AB = A)$, получаем д. н. ф. $D(M) = 1 \cdot 2 \vee 1 \cdot 4 \vee 2 \cdot 4 \vee 3 \cdot 4 \vee \vee 2 \cdot 3$.

Тупиковыми тестами являются следующие множества строк: $\{1, 2\}$, $\{1, 4\}$, $\{2, 4\}$, $\{3, 4\}$, $\{2, 3\}$.

1.26. Пользуясь универсальным алгоритмом, построить все тупиковые тесты для матриц из пп. 1), 2), 5), 6) задачи 1.6.

1.27. Доказать, что если в матрице M размерности $m \times n$ расстояние между двумя строками не меньше d, то длина минимального теста не превосходит $1 + \frac{m}{d} \ln \frac{2edm}{n(n-1)}$.

§ 2. Методы построения сокращенной д. н. ф.

Импликантой функции $f(\widetilde{x}^n)$ называется такая элементарная конъюнкция k над множеством переменных $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, что $k \vee f(\widetilde{x}^n) = f(\widetilde{x}^n)$. Импликанта k функции f называется *простой импликантой*, если после отбрасывания любой буквы из k получается конъюнкция, не являющаяся импликантой функции f. Дизъюнкция всех простых импликант функции f называется *сокращенной д. н. ф.* функции f.

Дизъюнктивная нормальная форма называется:

минимальной, если она содержит наименьшее число букв среди всех д. н. ф., эквивалентных ей;

кратчайшей, если она имеет наименьшую длину (число элементарных конъюнкций) среди всех д. н. ф., эквивалентных ей;

тупиковой, если отбрасывание любой элементарной конъюнкции или буквы приводит к д. н. ф., которая не эквивалентна исходной д. н. ф.;

д. н. ф. функции f, если она реализует функцию f.

Конъюнкции, входящие в д. н. ф., называются ее *слагаемыми*, число слагаемых — *длиной д. н. ф.*, а сумма рангов слагаемых — *сложностью д. н. ф.* Говорят, что функция f *поглощает* функцию g (обозначение: $g \leqslant f$), если $g \vee f = f$ (или, что то же самое, $g \,\&\, f = g$). Простая импликанта k функции f называется *ядровой*, если д. н. ф., составленная из всех простых импликант функции f, отличных от k, не поглощает k. Дизъюнкция всех ядровых импликант функции F называется *ядром функции* f.

Если элементарная конъюнкция k является импликантой функции $f(\widetilde{x}^n)$, то множество N_k всех наборов $\widetilde{\alpha}$ из B^n таких, что $f(\widetilde{\alpha}) = 1$, образует грань, содержащуюся в множестве N_f. Эта грань называется *интервалом функции* f, *соответствующим импликанте* k. Интервал функции f, не содержащийся ни в каком другом интервале функции f, называется *максимальным интервалом*. Максимальные интервалы функции f соответствуют ее простым импликантам. Интервалы, соответствующие ядровым импликантам функции f, называются *ядровыми интервалами*.

Метод Блейка для построения сокращенной д. н. ф. из произвольной д. н. ф. состоит в применении правил обобщенного склеивания $xK_1 \vee \overline{x}K_2 = xK_1 \vee \overline{x}K_2 \vee K_1K_2$ и поглощения $K_1 \vee K_1K_2 = K_1$. Подразумевается, что правила применяются слева направо. На первом этапе производится операция обобщенного склеивания до тех пор, пока это возможно. На втором производится операция поглощения.

Пример 1. Построить сокращенную д. н. ф. по д. н. ф. D функции f, где $D = x_1x_2 \vee \overline{x}_1x_3 \vee \overline{x}_2x_3$.

После первого этапа получаем

$$D_1 = x_1x_2 \vee \overline{x}_1x_3 \vee \overline{x}_2x_3 \vee x_2x_3 \vee x_1x_3 \vee x_3.$$

После второго этапа получаем сокращенную д. н. ф.

$$D_f^c = D_2 = x_1x_2 \vee x_3.$$

Метод Нельсона позволяет строить сокращенную д. н. ф. по к. н. ф. Сначала в заданной к. н. ф. раскрываются скобки с использованием закона дистрибутивности. На втором этапе вычеркиваются буквы и конъюнкции с использованием правил $x\overline{x}K = 0$, $xxK = xK$, $K_1 \vee K_1K_2 = K_1$.

Пример 2. Построить сокращенную д. н. ф. по заданной к. н. ф.

$$f = (x_1 \vee x_2)(\overline{x}_1 \vee x_2 \vee x_3).$$

После раскрытия скобок имеем

$$D_1 = x_1\overline{x}_1 \vee x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2\overline{x}_1 \vee x_2x_2 \vee x_2x_3.$$

После второго этапа получаем сокращенную д. н. ф.

$$D_f^c = D_2 = x_1x_3 \vee x_2.$$

Алгоритм Квайна строит сокращенную д. н. ф. по совершенной д. н. ф. На первом этапе к совершенной д. н. ф. применяется операция неполного склеивания ($xK \vee \overline{x}K = K \vee xK \vee \overline{x}K$). После того как такая операция применена к каждой паре конъюнкций из совершенной д. н. ф., к которой она применима, с помощью операции поглощения ($K \vee x^\sigma K = K$) удаляются те конъюнкции ранга n, которые можно удалить таким образом. В результате получается некоторая д. н. ф. D_1. Если проведено $k \geqslant 1$ этапов, то на $(k+1)$-м этапе операции неполного склеивания и поглощения применяются к конъюнкциям ранга $n-k$ д. н. ф. D_k. В результате получается д. н. ф. D_{k+1}. Алгоритм заканчивает работу, если $D_{k+1} = D_k$.

Пример 3. Пусть функция $f(\widetilde{x}^3)$ задана своей совершенной д. н. ф.

$$D_0 = x_1x_2x_3 \vee \overline{x}_1x_2x_3 \vee x_1x_2\overline{x}_3 \vee \overline{x}_1x_2\overline{x}_3 \vee \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3.$$

После первого этапа имеем

$$D_1 = x_2x_3 \vee x_1x_2 \vee \overline{x}_1x_2 \vee x_2\overline{x}_3 \vee \overline{x}_1\overline{x}_3.$$

После второго этапа получаем сокращенную д. н. ф.

$$D_f^c = D_2 = x_2 \vee \overline{x}_1\overline{x}_2.$$

Для небольших значений n сокращенную д. н. ф. функции $f(\widetilde{x}^n)$ можно найти, исходя из геометрического изображения множества N_f в кубе B^n. С этой целью в кубе B^n отыскиваются грани максимальной размерности, целиком содержащиеся в множестве N_f, а затем составляется д. н. ф. из конъюнкций, соответствующих этим граням.

Пример 4. Пусть функция $f(\widetilde{x}^3)$ задана вектором $\widetilde{\alpha}_f =$ $= (00011111)$. Требуется найти ее сокращенную д. н. ф.

Р е ш е н и е. Вершины множества $N_f = \{111, 110, 101, 100, 011\}$ отмечены в кубе B^3 (рис. 9.1) светлыми кружками. Максимальными являются грани $B_1^{3,1}$ и $B_{11}^{3,2,3}$. Коды этих граней суть $(1\,{-}\,{-})$ и $({-}\,1\,1)$. Соответствующие конъюнкции имеют вид x_1, x_2x_3, а сокращенная д. н. ф. есть $D_f^c = x_1 \vee x_2x_3$.

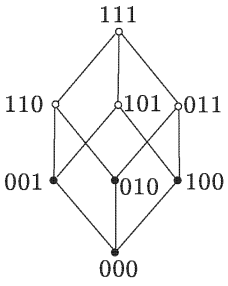


Рис. 9.1

Другой способ построения сокращенных д. н. ф. для функций, зависящих от небольшого числа (не более 4) переменных, состоит в использовании минимизирующих карт (называемых *картами Карно* или *диаграммами Вейча*). При этом функция задается прямоугольной таблицей, в которой наборы значений переменных на каждой из сторон прямоугольника расположены в коде Грея. Нахождение простых импликант сводится к выделению максимальных по включению прямоугольников, состоящих из единиц. Считается, что каждая клетка таблицы, примыкающая к одной из сторон, является соседней к клетке, примыкающей к противоположной стороне и расположенной на той же горизонтали или вертикали. Метод применим также и для не всюду определенных функций. В этом случае выделяются максимальные прямоугольники, содержащие хотя бы одну единицу и не содержащие нулей.

П р и м е р 5. Таблица 9.1 представляет собой минимизирующую карту для функции $f(\widetilde{x}^4)$ с вектором значений $\widetilde{\alpha}_f = (1110010101001101)$. Коды максимальных интервалов имеют вид $(0\,0\,{-}\,0)$, $(0\,0\,0\,{-})$, $({-}\,{-}\,0\,1)$, $({-}\,1\,{-}\,1)$, $(1\,1\,{-}\,0)$. Сокращенная д. н. ф. имеет вид $D_f^c = \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_4 \vee \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3 \vee \overline{x}_3x_4 \vee x_2x_4 \vee x_1x_2\overline{x}_3$.

П р и м е р 6. Таблица 9.2 представляет собой минимизирующую карту для частичной функции f, зависящей от трех переменных. Сокращенная д. н. ф. имеет вид $D_f^c = \overline{x}_1\overline{x}_3 \vee \overline{x}_1x_2 \vee x_2x_3 \vee x_1x_3$.

Таблица 9.1

x_1	x_2 \ x_3	0	0	1	1
	x_4	0	1	1	0
0	0	1	1	0	1
0	1	0	1	1	0
1	1	1	1	1	0
1	0	0	1	0	0

Таблица 9.2

x_1	x_2 \ x_3	0	1	1	0
0		—	0	—	1
1		0	—	1	0

Простая импликанта I функции f называется *ядровой*, если существует набор $\widetilde{\alpha}$ такой, что $I(\widetilde{\alpha}) = 0$, и в то же время $k(\widetilde{\alpha}) = 0$ для любой простой импликанты K функции f, отличной от I. Такой

набор $\widetilde{\alpha}$ называется *собственным* набором ядровой импликанты I (или соответствующего интервала).

2.1. Из заданного множества A элементарных конъюнкций выделить простые импликанты функции f:

1) $A = \{x_1,\ \overline{x}_3,\ x_1x_2,\ x_2\overline{x}_3\}$, $f(\widetilde{x}^3) = (0010\,1111)$;
2) $A = \{x_1\overline{x}_2,\ x_2x_3,\ x_1x_2x_3\}$, $f(\widetilde{x}^3) = (0111\,1110)$;
3) $A = \{x_1,\ \overline{x}_4,\ x_2\overline{x}_3,\ \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_4\}$, $f(\widetilde{x}^4) = (1010\,1110\,0101\,1110)$;
4) $A = \{x_1,\ x_2,\ x_1\overline{x}_2\}$, $f(\widetilde{x}^2) = (1011)$;
5) $A = \{x_1x_3,\ x_1\overline{x}_3,\ x_2\}$, $f(\widetilde{x}^3) = (0011\,1011)$;
6) $A = \{x_1\overline{x}_2,\ x_2\overline{x}_3,\ \overline{x}_2\}$, $f(\widetilde{x}^3) = (0010\,1111)$.

2.2. По заданной д. н. ф. D с помощью метода Блейка построить сокращенную д. н. ф.:

1) $D = \overline{x}_1\overline{x}_2 \vee x_1\overline{x}_2x_4 \vee x_2\overline{x}_3x_4$; 2) $D = x_1\overline{x}_2x_3 \vee \overline{x}_1x_2\overline{x}_4 \vee \overline{x}_2\overline{x}_3x_4$;
3) $D = x_1 \vee \overline{x}_1x_2 \vee \overline{x}_1\overline{x}_2x_3 \vee \overline{x}_1x_2x_3x_4$;
4) $D = x_1\overline{x}_2x_4 \vee \overline{x}_1\overline{x}_2x_3 \vee \overline{x}_3\overline{x}_4$;
5) $D = \overline{x}_3x_4 \vee \overline{x}_2x_4 \vee x_1x_4 \vee x_2x_3\overline{x}_4$;
6) $D = x_1x_2\overline{x}_3 \vee x_3\overline{x}_4 \vee \overline{x}_1x_4 \vee \overline{x}_2x_4$;
7) $D = \overline{x}_3x_4 \vee x_1x_2 \vee x_3\overline{x}_4 \vee \overline{x}_1x_3$;
8) $D = x_1x_2\overline{x}_3 \vee \overline{x}_1x_2x_4 \vee x_2x_3\overline{x}_4 \vee x_2\overline{x}_3\overline{x}_4 \vee x_2x_3x_1$.

2.3. Построить сокращенную д. н. ф. по заданной к. н. ф.:

1) $(x_1 \vee x_2 \vee \overline{x}_3)(\overline{x}_1 \vee x_2 \vee x_3)(\overline{x}_2 \vee \overline{x}_3)$; 2) $(x_1 \vee \overline{x}_2)(x_1 \vee x_2 \vee \overline{x}_3)$;
3) $(x_1 \vee \overline{x}_2 \vee \overline{x}_3)(\overline{x}_1 \vee x_2)(x_1 \vee x_2 \vee x_3)$;
4) $(x_1 \vee x_2 \vee x_3)(\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \vee \overline{x}_3)$; 5) $(x_1 \vee \overline{x}_2)(\overline{x}_2 \vee x_3)(\overline{x}_3 \vee x_1)$;
6) $(x_1 \vee \overline{x}_2)(x_2 \vee \overline{x}_3)(x_3 \vee \overline{x}_4)(x_4 \vee x_1)$;
7) $(x_1 \vee x_2 \vee x_3)(x_1 \vee \overline{x}_2 \vee x_4)(\overline{x}_1 \vee x_2 \vee \overline{x}_4)$;
8) $(x_1 \vee x_2)(x_1 \vee x_3 \vee x_4)(\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \vee \overline{x}_3)(\overline{x}_3 \vee \overline{x}_4)$.

2.4. С помощью алгоритма Квайна построить сокращенную д. н. ф. для функции f, заданной вектором своих значений;

1) $\widetilde{\alpha}_f = (0111\,0110)$; 2) $\widetilde{\alpha}_f = (1011\,1101)$; 3) $\widetilde{\alpha}_f = (0010\,1111)$;
4) $\widetilde{\alpha}_f = (1110\,0100)$; 5) $\widetilde{\alpha}_f = (0001\,1011\,1101\,1011)$;
6) $\widetilde{\alpha}_f = (0000\,1111\,1111\,0110)$; 7) $\widetilde{\alpha}_f = (1111\,1111\,0111\,1110)$;
8) $\widetilde{\alpha}_f = (0000\,1111\,0111\,1111)$.

2.5. Изобразив множество N_f функции $f(\widetilde{x}^n)$ в B^n, найти коды максимальных интервалов и построить сокращенную д. н. ф.:

1) $\widetilde{\alpha}_f = (1111\,0100)$; 2) $\widetilde{\alpha}_f = (0101\,0011)$; 3) $\widetilde{\alpha}_f = (1101\,0011)$;
4) $\widetilde{\alpha}_f = (1110\,0111)$; 5) $\widetilde{\alpha}_f = (1111\,1000\,0100\,1100)$;
6) $\widetilde{\alpha}_f = (0001\,0111\,1110\,1111)$; 7) $\widetilde{\alpha}_f = (1110\,0110\,0000\,0111)$;
8) $\widetilde{\alpha}_f = (1111\,1111\,1111\,1000)$.

2.6. Найти сокращенную д. н. ф. функции f с помощью минимизирующей карты:

1) $\widetilde{\alpha}_f = (0101\,0111)$; 2) $\widetilde{\alpha}_f = (1101\,1011)$; 3) $\widetilde{\alpha}_f = (1011\,0000)$;

4) $\widetilde{\alpha}_f = (1110\,1111)$; 5) $\widetilde{\alpha}_f = (0001\,1011\,1101\,1111)$;
6) $\widetilde{\alpha}_f = (0011\,1101\,1111\,1101)$; 7) $\widetilde{\alpha}_f = (0011\,1101\,1101\,1110)$;
8) $\widetilde{\alpha}_f = (0010\,1011\,1101\,1111)$.

2.7. С помощью минимизирующих карт построить сокращенную д. н. ф. для частичной функции f, заданной векторно (прочерки соответствуют не определенным значениям):

1) $\widetilde{\alpha}_f = (01---01--1)$; 2) $\widetilde{\alpha}_f = (1--01---10)$;
3) $\widetilde{\alpha}_f = (1----0--10)$; 4) $\widetilde{\alpha}_f = (0---10--1-)$;
5) $\widetilde{\alpha}_f = (10--1--011--0---1--01)$;
6) $\widetilde{\alpha}_f = (0---1-----0---1--1--01)$;
7) $\widetilde{\alpha}_f = (---01--1--00-------1--0)$;
8) $\widetilde{\alpha}_f = (-10--1---11--01--0----)$.

2.8. Найти все ядровые импликанты для функций f из задачи 2.6.

2.9. Найти длину сокращенной д.н.ф. функции f:

1) $f(\widetilde{x}^n) = x_1 \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_n$;
2) $f(\widetilde{x}^n) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3)(\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \vee \overline{x}_3) \oplus x_4 \oplus \ldots \oplus x_n$;
3) $f(\widetilde{x}^n) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3)(\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \vee \overline{x}_3)(x_4 \oplus \ldots \oplus x_n)$;
4) $f(\widetilde{x}^n) = (x_1 \vee \ldots \vee x_k)(x_{k+1} \vee \ldots \vee x_n)$;
5) $f(\widetilde{x}^n) = (x_1 \oplus \ldots \oplus x_k)(x_{k+1} \oplus \ldots \oplus x_n)$;
6) $f(\widetilde{x}^n) = (x_1 \vee \ldots \vee x_n)(x_1 \vee \ldots \vee x_k \vee \overline{x}_{k+1} \vee \ldots \vee \overline{x}_n)$;
7) $f(\widetilde{x}^n) = (x_1 \to x_2)(x_2 \to x_3)\ldots(x_{n-1} \to x_n)(x_n \to x_1)$;
8) $f(\widetilde{x}^n) = (x_1 \vee \ldots \vee x_n)(\overline{x}_1 \vee \ldots \vee \overline{x}_n)$;
9) $f(\widetilde{x}^n) = (x_1 \vee x_2)(x_3 \vee x_4)\ldots(x_{2n-1} \vee x_{2n})$.

2.10. Пусть $S_{k,m}(\widetilde{x}^n)$ такова, что $N_{S_{k,m}} = \{\widetilde{\alpha} \in B^n\colon\ k \leqslant \|\widetilde{\alpha}\| \leqslant k+m\}$.

1) Для данного набора $\widetilde{\alpha} \in B_k^n$ найти число максимальных интервалов функции $S_{k,m}$, содержащих набор $\widetilde{\alpha}$.

2) Для $k < l \leqslant k+m$ и $\widetilde{\alpha} \in B_l^n$ найти число максимальных интервалов функции $S_{k,m}$, содержащих набор $\widetilde{\alpha}$.

3) Показать, что число максимальных интервалов $l^c(S_{k,m}(\widetilde{x}^4))$ функции $S_{k,m}$ равно $\binom{n}{k}\binom{n-k}{m}$.

4) Показать, что $\max\limits_{0\leqslant k,m\leqslant n} l^c(S_{k,m}(\widetilde{x}^n)) = \dfrac{n!}{([n/3]!)^2(n-[n/3])!}$.

2.11. Пусть $l^c(f)$ — длина сокращенной д. н. ф. функции f. Показать, что $l^c(f) \leqslant \dfrac{1}{2}\,|N_f|(|N_f|+1)$.

2.12. Найти числа ядровых импликант у функций f из задачи 2.9.

2.13. Показать, что число ядровых импликант функций $f(\widetilde{x}^n)$ не превосходит 2^{n-1}.

2.14. 1) Показать, что всякая простая импликанта функции $f(\widetilde{x}^n)$ ранга n является ядровой.

2) Показать, что всякая простая импликанта функции $f(\widetilde{x}^n)$ ранга меньше 2 является ядровой.

2.15. 1) Показать, что простая импликанта монотонной функции не содержит отрицаний переменных.

2) Показать, что каждая простая импликанта монотонной функции является ядровой.

2.16. Доказать, что сокращенная д. н. ф. функции f реализует f.

§ 3. Методы построения тупиковых, минимальных и кратчайших д. н. ф.

При построении тупиковых д. н. ф. функций, зависящих не более чем от четырех переменных, удобно пользоваться минимизирующими картами. При построении кратчайших д. н. ф. функции на минимизирующей карте отыскивается минимальная по числу элементов совокупность «прямоугольников», соответствующих простым импликантам функции и покрывающих все единицы в минимизирующей карте.

Пример 1. Кратчайшей д. н. ф. функции f, которая задана табл. 9.1, является д. н. ф. $D = \overline{x}_3x_4 \vee x_2x_4 \vee x_1x_2\overline{x}_3 \vee \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_4$. В этой д. н. ф. все конъюнкции ядровые, как это легко усматривается из минимизирующей карты. Отметим, что D является единственной тупиковой и минимальной д. н. ф. функции f.

Для построения тупиковых д. н. ф. функции f часто используется так называемая таблица Квайна Q_f функции f, строки которой соответствуют простым импликантам функции f, а столбцы — наборам из множества N_f. На пересечении строки, соответствующей импликанте I, и столбца, соответствующего набору $\widetilde{\alpha}$, стоит 1, если $I(\widetilde{\alpha}) = 1$, и 0, если $I(\widetilde{\alpha}) = 0$. Минимальное (тупиковое) покрытие столбцов таблицы Q_f строками соответствует кратчайшей (тупиковой) д. н. ф. функции f. Минимальной д. н. ф. отвечает покрытие, обладающее минимальной суммой рангов конъюнкций, соответствующих строкам, вошедшим в покрытие. Для построения всех тупиковых д. н. ф. функции f составим к. н. ф. $\mathcal{K}(f)$ следующим образом: поставим в соответствие столбцу $\widetilde{\alpha}$ таблицы Q_f элементарную дизъюнкцию вида $D_{\widetilde{\alpha}} = K_1 \vee K_2 \vee \ldots \vee K_s$, где K_i $(i = 1, \ldots, s)$ — все такие простые импликанты функции f, что $K_i(\widetilde{\alpha}) = 1$. Полагаем $\mathcal{K}(f) = \mathop{\&}\limits_{\widetilde{\alpha}} D_{\widetilde{\alpha}}$. Раскрывая скобки подобно тому, как это делалось в методе Нельсона (см. пример 2 из предыдущего параграфа), и используя правила $A \cdot A = A$ и $A \vee AB = A$, получаем из к. н. ф. $\mathcal{K}(f)$ д. н. ф. $M(f)$, слагаемые которой соответствуют тупиковым д. н. ф. функции f.

Пример 2. Пусть $f = (x_1 \vee x_2 \vee x_3)(\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \vee \overline{x}_3)$. Сокращенная д. н. ф. функции f имеет вид

$$D_f^c = x_1\overline{x}_2 \vee x_1\overline{x}_3 \vee \overline{x}_1x_2 \vee \overline{x}_3x_2 \vee \overline{x}_3x_1 \vee \overline{x}_2x_3.$$

Таблица Квайна Q_f показана в табл. 9.3.

Таблица 9.3

	001	010	100	011	101	110
$K_1 = x_1\overline{x}_2$	0	0	1	0	1	0
$K_2 = x_1\overline{x}_3$	0	0	1	0	0	1
$K_3 = \overline{x}_1x_2$	0	1	0	1	0	0
$K_4 = x_2\overline{x}_3$	0	1	0	0	0	1
$K_5 = \overline{x}_1x_3$	1	0	0	1	0	0
$K_6 = \overline{x}_2x_3$	1	0	0	0	1	0

К. н. ф. $\mathcal{K}(f)$ имеет вид

$$\mathcal{K}(f) = (K_5 \vee K_6)(K_3 \vee K_4)(K_1 \vee K_2)(K_3 \vee K_5)(K_1 \vee K_6)(K_2 \vee K_4).$$

Далее

$$M(f) = K_1K_4K_5 \vee K_2K_3K_6 \vee K_1K_2K_3K_5 \vee K_1K_3K_4K_5 \vee K_2K_4K_5K_6.$$

Функция f имеет две кратчайшие д. н. ф., которые являются в данном случае и минимальными, и три тупиковые д. н. ф., не являющиеся кратчайшими (и минимальными). Кратчайшая д. н. ф., соответствующая слагаемому $K_1K_4K_5$ д. н. ф. $M(f)$, имеет вид

$$x_1\overline{x}_2 \vee x_2\overline{x}_3 \vee x_3\overline{x}_1.$$

Заметим, что слагаемые д. н. ф. $M(f)$ соответствуют тупиковым покрытиям матрицы Q_f и могли быть получены непосредственно из нее.

Алгоритм упрощения д.н.ф. состоит в применении двух операций.

1. Операция удаления элементарной конъюнкции. Операция удаления конъюнкции K из д. н. ф. D осуществляется лишь в случае, если после удаления K из д. н. ф. D получается д. н. ф. D', эквивалентная д. н. ф. D.

2. Операция удаления буквы. Операция осуществляется, если удаление буквы x_i^α из некоторой конъюнкции K д. н. ф. D приводит к д. н. ф. D', которая эквивалентна д. н. ф. D.

При применении алгоритма упрощения д. н. ф. D рассматривается как слово, в котором задан некоторый порядок следования конъюнкций, а также букв в каждой конъюнкции. Операция 1 (операция 2) применяется к первой конъюнкции (букве), к которой эта операция применима. Если ни одна из операций не применима, то алгоритм заканчивает работу.

Пример 3. Применим алгоритм упрощения к д. н. ф.

$$D = \overline{x}_1x_2x_3 \vee x_1\overline{x}_2x_3 \vee x_2\overline{x}_3 \vee x_3\overline{x}_1 \vee x_1\overline{x}_3.$$

На первом этапе исключается первая конъюнкция

$$D_1 = x_1\overline{x}_2x_3 \vee x_2\overline{x}_3 \vee x_3\overline{x}_1 \vee x_1\overline{x}_3.$$

В D_1 нет конъюнкций, которые можно удалить, но можно удалить букву x_1 в первой конъюнкции. Имеем

$$D_2 = \overline{x}_2x_3 \vee x_2\overline{x}_3 \vee x_3\overline{x}_1 \vee x_1\overline{x}_3.$$

Эта д. н. ф. является тупиковой. Алгоритм заканчивает работу. Заметим, что если на этом этапе удалить из конъюнкции $x_1\overline{x}_2x_3$ не букву x_1, как этого требует алгоритм упрощения, а букву x_3, то процесс упрощения можно продолжить путем удаления конъюнкции $x_1\overline{x}_3$. В результате была бы получена д. н. ф.

$$D_3 = x_1\overline{x}_2 \vee x_2\overline{x}_3 \vee x_3\overline{x}_1,$$

являющаяся кратчайшей и минимальной.

3.1. Выяснить, является ли д. н. ф. D а) тупиковой, б) кратчайшей, в) минимальной:

1) $D = x_1x_2 \vee \overline{x}_2$; 2) $D = x_1x_2 \vee x_2$; 3) $D = x_1 \vee \overline{x}_2$;
4) $D = x_1\overline{x}_2 \vee \overline{x}_1x_2$; 5) $D = x_1x_2x_3 \vee \overline{x}_2x_3 \vee x_2\overline{x}_3$;
6) $D = x_1x_2 \vee \overline{x}_1x_3\overline{x}_4 \vee \overline{x}_2x_3x_4$;
7) $D = x_1\overline{x}_2x_4 \vee \overline{x}_1x_3\overline{x}_4 \vee \overline{x}_2\overline{x}_3\overline{x}_4$;
8) $D = x_1\overline{x}_2\overline{x}_3 \vee \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_4 \vee \overline{x}_1\overline{x}_3x_4 \vee \overline{x}_2\overline{x}_3\overline{x}_4$.

3.2. Применить алгоритм упрощения к д. н. ф.:

1) $D = \overline{x}_1\overline{x}_2 \vee x_2$; 2) $D = x_1x_2 \vee x_1\overline{x}_2$;
3) $D = x_1x_2x_3 \vee x_2\overline{x}_3 \vee \overline{x}_2\overline{x}_3$; 4) $D = x_1x_2 \vee x_1\overline{x}_2 \vee \overline{x}_2\overline{x}_3$;
5) $D = x_1\overline{x}_2 \vee x_2\overline{x}_3 \vee x_1\overline{x}_3 \vee \overline{x}_1x_2 \vee \overline{x}_2x_3$;
6) $D = \overline{x}_1x_2x_2x_4 \vee x_2x_3\overline{x}_4 \vee x_2\overline{x}_3 \vee x_1\overline{x}_3$;
7) $D = \overline{x}_3\overline{x}_4 \vee \overline{x}_2x_3x_4 \vee x_1\overline{x}_2x_4 \vee \overline{x}_1\overline{x}_2x_3 \vee x_1\overline{x}_2\overline{x}_3 \vee \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_4$;
8) $D = \overline{x}_1x_3 \vee x_2x_3 \vee x_1x_2 \vee \overline{x}_1\overline{x}_2x_4 \vee \overline{x}_2x_3x_4 \vee x_1x_3x_4$.

3.3. По заданной сокращенной д. н. ф. D построить д. н. ф. $D_{\Sigma T}$, состоящую из конъюнкций, входящих хотя бы в одну тупиковую д. н. ф.:

1) $D = xy \vee \overline{x}\,\overline{z} \vee y\overline{z}$;
2) $D = \overline{z}\,\overline{w} \vee \overline{y}zw \vee x\overline{y}w \vee \overline{x}\,\overline{y}z \vee x\overline{y}\,\overline{z} \vee \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{w}$;
3) $D = x\overline{y}z \vee x\overline{y}\,\overline{w} \vee \overline{x}y\,\overline{w} \vee \overline{x}\,\overline{z}\,\overline{w} \vee \overline{y}\,\overline{z}\,\overline{w}$;
4) $D = \overline{z}\,\overline{w} \vee \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{w} \vee \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z} \vee xyz \vee xy\overline{w}$;
5) $D = \overline{z}w \vee \overline{y}w \vee xw \vee yz\overline{w} \vee xyz$;
6) $D = xy\overline{z} \vee x\overline{y}z \vee \overline{x}yz \vee \overline{z}w \vee \overline{y}w \vee \overline{x}w$;
7) $D = \overline{x}z \vee yz \vee xy \vee \overline{x}\overline{y}w \vee \overline{y}zw \vee xzw$;
8) $D = \overline{x}z \vee \overline{y}w \vee xy \vee yz \vee xw \vee zw$.

3.4. По заданной сокращенной д. н. ф. D построить д. н. ф. $D_{\Sigma M}$, состоящую из конъюнкций, входящих хотя бы в одну минимальную д. н. ф.:

1) $D = xy \vee \overline{x}\,\overline{z} \vee yz$; 2) $D = x\,\overline{y}\,\overline{z} \vee \overline{x}y\overline{z} \vee \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{w} \vee \overline{x}\,\overline{z}\,\overline{w} \vee \overline{y}zw$;
3) $D = \overline{x}w \vee \overline{y}w \vee zw \vee xz \vee yz$;
4) $D = \overline{x}z \vee yz \vee \overline{x}\overline{y}w \vee xy \vee \overline{y}zw \vee xzw$;
5) $D = yz \vee \overline{x}\overline{z}w \vee \overline{x}yz \vee xzw \vee \overline{x}y\overline{z}$;
6) $D = \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{w} \vee \overline{x}\,\overline{z}\,\overline{w} \vee y\overline{z}\overline{w} \vee \overline{y}z\overline{w} \vee \overline{x}\,\overline{y}\,\overline{z}$;
7) $D = \overline{x}z \vee x\overline{z} \vee xyz \vee xzw$; 8) $D = yzt \vee ywt \vee \overline{x}\overline{y}zt \vee xy\overline{z}w$.

3.5. Для д. н. ф. из предыдущей задачи построить минимальные д. н. ф.

3.6. С помощью таблицы Квайна построить все тупиковые д. н. ф. функции f, заданной вектором своих значений:

1) $\widetilde{\alpha}_f = (0111\,1100)$; 2) $\widetilde{\alpha}_f = (0111\,1110)$; 3) $\widetilde{\alpha}_f = (0001\,1111)$;
4) $\widetilde{\alpha}_f = (1111\,1000\,0100\,1100)$; 5) $\widetilde{\alpha}_f = (1110\,1000\,0110\,1000)$;
6) $\widetilde{\alpha}_f = (1110\,0110\,0001\,0101)$; 7) $\widetilde{\alpha}_f = (0001\,0111\,1010\,1110)$;
8) $\widetilde{\alpha}_f = (0001\,1011\,1110\,0111)$.

3.7. Найти число $\tau(f)$ тупиковых д. н. ф. и число $\mu(f)$ минимальных д. н. ф. функции f:

1) $f(\widetilde{x}^n) = x_1 \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_n \oplus 1$;
2) $f(\widetilde{x}^n) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3)(\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \vee \overline{x}_3) \oplus x_4 \oplus \ldots \oplus x_n$;
3) $f(\widetilde{x}^n) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3)(\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \vee \overline{x}_3)(x_4 \oplus \ldots \oplus x_n)$;
4) $f(\widetilde{x}^n) = (0111\,1111\,1111\,1110)$;
5) $f(\widetilde{x}^n) = (\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \vee \overline{x}_3 \vee \overline{x}_4 \vee x_5 \vee \ldots \vee x_n)\,\&\,(x_1 \vee x_2 \vee \ldots \vee x_n)$;
6) $f(\widetilde{x}^n) = (x_1 \oplus \ldots \oplus x_k)(x_{k+1} \oplus \ldots \oplus x_n)$.

3.8. Показать, что число тупиковых д. н. ф. произвольной булевой функции $f(\widetilde{x}^n)$ не превосходит $\binom{3^n}{2^n}$.

3.9. Пусть $L(f)$ — число букв в минимальной д. н. ф. функции f, а $l(f)$ — число слагаемых в кратчайшей д. н. ф. функции f.

Показать, что:

1) $\max\limits_{f(\widetilde{x}^n)} l(f(\widetilde{x}^n)) = 2^{n-1}$; 2) $\max\limits_{f(\widetilde{x}^n)} L(f(\widetilde{x}^n)) = n \cdot 2^{n-1}$.

3.10. Доказать, что число тупиковых д. н. ф. любой функции $f(\widetilde{x}^n)$, имеющей 2^{n-1} ядровых импликант, равно 1.

3.11. Для скольких функций $f(\widetilde{x}^n)$ справедливы соотношения:
1) $L(f(\widetilde{x}^n)) = n \cdot 2^{n-1}$; 2) $L(f(\widetilde{x}^n)) = n(2^{n-1} - 1)$?

3.12. Функция $f(\widetilde{x}^n)$ называется *цепной*, если множество N_f можно расположить в последовательность $\widetilde{\alpha}_1, \widetilde{\alpha}_2, \ldots, \widetilde{\alpha}_l$ такую, что $\rho(\widetilde{\alpha}_i, \widetilde{\alpha}_{i+1}) = 1$ при всех $1 \leqslant i < l$ и $\rho(\widetilde{\alpha}_i, \widetilde{\alpha}_j) > 1$ при $|i - j| > 1$. Пусть $\eta(l)$ — число тупиковых д. н. ф. цепной функции f такой, что $|N_f| = l$. Показать, что:

1) $\eta(1) = \eta(2) = \eta(3) = \eta(4) = 1$;
2) $\eta(l) = \eta(l-2) + \eta(l-3)$ при $l \geqslant 5$.
3) Найти асимптотическое поведение $\eta(l)$ при $l \to \infty$.

3.13. Пусть $l^*(f)$ — минимально возможное число элементарных дизъюнкций в конъюнктивной нормальной форме функции f, а $\lambda(f) = l(f)/l^*(f)$. Найти $\lambda(f)$ для

$$f = (x_1 \vee x_2)(x_3 \vee x_4)\ldots(x_{2n-1} \vee x_{2n}).$$

3.14. Пусть $D_0 = D_0(\widetilde{x}^n)$ и $D_1 = D_1(\widetilde{x}^n)$ — д. н. ф. такие, что $D_0\,\&\,D_1 \equiv 0$, $D_0 \vee D_1 \equiv 1$, а д. н. ф. $D(\widetilde{y}^m)$ не содержит общих букв с д. н. ф. D_0 и D_1. *Бесповторной суперпозицией* д. н. ф. D, D_0, D_1 по

переменной y_i называется д. н. ф. E, полученная из д. н. ф. D подстановкой вместо каждого вхождения буквы y_i д. н. ф. D_0, а вместо y_1 — д. н. ф. D_1 с последующим раскрытием скобок.

1) Доказать, что бесповторная суперпозиция тупиковых д. н. ф. является тупиковой д. н. ф.

2) Доказать, что бесповторная суперпозиция сокращенных д. н. ф. является сокращенной д. н. ф.

3.15. Пусть функция $w(\widetilde{x}^4)$ такова, что

$$\widetilde{\alpha}_2 = (0101\,1100\,0011\,1010).$$

Доказать, что выполнены свойства 1)–3):

1) $w(x_1, x_2, \overline{x}_3, \overline{x}_4) = w(\widetilde{x}^4)$;

2) минимальными д. н. ф. функции $w(\widetilde{x}^4)$ являются

$$D_1 = x_1x_3\overline{x}_4 \vee \overline{x}_2x_3x_4 \vee \overline{x}_1\overline{x}_3x_4 \vee x_2\overline{x}_3\overline{x}_4,$$
$$D_2 = x_1\overline{x}_2x_3 \vee \overline{x}_1\overline{x}_2x_4 \vee \overline{x}_1x_2\overline{x}_3 \vee x_1x_2\overline{x}_4;$$

3) число тупиковых д. н. ф. равно 10.

4) Доказать, что если $\lambda(\widetilde{x}^m) = x_1 \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_m$, n четно и $f(\widetilde{x}^n) = w(x_1, x_2, \lambda(x_3, \ldots, x_{n/2+1}), \lambda(x_{n/2+2}, \ldots, x_n))$, то существуют тупиковые д. н. ф. E и F функции f такие, что $l(E)/l(F) = 2^{n/2-2}$.

5) Показать, что число тупиковых д. н. ф. функции

$$h(\widetilde{x}^n) = w(\widetilde{x}^4) \oplus x_5 \oplus \ldots \oplus x_n$$

равно $10^{2^{n-4}}$, а число минимальных д. н. ф. равно $2^{2^{n-4}}$.

Глава X

РЕАЛИЗАЦИЯ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ СХЕМАМИ И ФОРМУЛАМИ

§ 1. Схемы из функциональных элементов

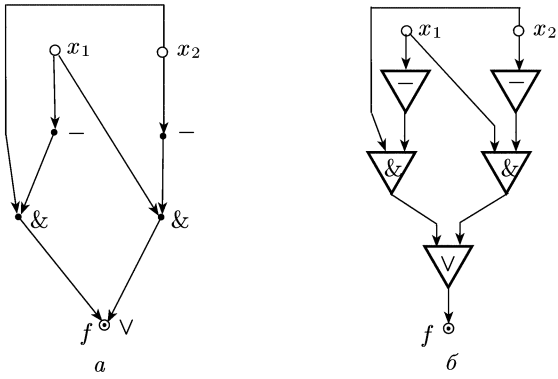
Схемой из функциональных элементов (СФЭ) называется ориентированная бесконтурная сеть с помеченными вершинами. Полюса сети делятся на *входные* (*входы*) и *выходные* (*выходы*). Входные полюса помечаются символами переменных (иногда также символами отрицаний переменных или констант). Каждая вершина, отличная от входа (внутренняя вершина), помечается функциональным символом (или символом логической связки). При этом должны выполняться следующие условия:

1) полустепень захода каждого входного полюса равна нулю;

2) полустепень захода каждой вершины, отличной от входного полюса, равна числу мест функционального символа (или логической связки), которым эта вершина помечена.

Множество функциональных символов или связок, используемых для пометки внутренних вершин СФЭ, называется *базисом схемы*. Термин «базис» употребляется здесь в смысле, отличном от того, который принят в гл. II, поскольку в данном случае не предполагается ни полнота системы функций, составляющих базис, ни ее неизбыточность. Например, принято говорить о схемах в базисе $\{\vee, \&, -\}$ (этот базис будет называться *стандартным*) или в базисе $\{\oplus, \&\}$. На рис. 10.1, *а* представлено изображение СФЭ. Входы помечаются светлыми кружками, внутренние вершины — темными кружками, а выходы — двойными кружками.

Другой способ изображения схем иллюстрируется рис. 10.1, *б*. Здесь входы, как и ранее, изображаются светлыми кружками, каждая внутренняя вершина заменена треугольником, внутрь которого помещена пометка (функциональный символ). К одной из сторон треугольника присоединены входы элемента, а вершина треугольника, противоположная этой стороне, является выходом элемента. Выходы схемы отделены от функциональных элементов и обозначены, как и прежде, двойными кружками. Выходам иногда будут приписываться символы функций, реализуемых в них. Понятие *функции, реализуемой*



а *б*

Рис. 10.1

в вершине схемы, определим по индукции следующим образом. Если СФЭ не содержит функциональных элементов, то каждая ее вершина является входом. В этом случае функция, реализуемая в вершине, тождественно равна переменной (или отрицанию переменной), приписанной соответствующему входу. Пусть для СФЭ, содержащих не более $m \geqslant 0$ элементов, для каждой вершины функция, реализуемая в ней, определена. Рассмотрим произвольную СФЭ Σ с $m+1$ элементами. Поскольку СФЭ является ориентированным бесконтурным графом, то существует вершина с нулевой полустепенью исхода. Удаляя эту вершину, получаем СФЭ с m элементами, в которой по предположению индукции каждой вершине можно однозначно сопоставить функцию, реализуемую в этой вершине. Пусть удаленная вершина v имела полустепень захода, равную k, и вершине был приписан k-местный функциональный символ f. Пусть, кроме того, в k вершинах, из которых дуги выходили в вершину v, реализуются функции $f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_k(x_1, \ldots, x_n)$. Тогда определим функцию φ_v, реализуемую в вершине v, равенством

$$\varphi_v(x_1, \ldots, x_n) = f(f_1(x_1, \ldots, x_n), \ldots, f_k(x_1, \ldots, x_n)).$$

Заметим, что при этом входы функционального элемента считаются упорядоченными.

Будем говорить, что *функция f реализуется схемой* Σ, если в Σ существует выход, в котором реализуется функция f. Сложностью СФЭ будем называть число вершин, не являющихся входами (т. е. число функциональных элементов). СФЭ Σ называется *минимальной*, если она имеет наименьшую сложность среди всех СФЭ, реализующих функции, реализуемые схемой Σ. *Сложностью булевой функции f* (системы функций $A = \{f_1, \ldots, f_m\}$) в классе СФЭ в базисе $Б$ называется сложность минимальной СФЭ в базисе $Б$, реализующей функцию f (систему функций A). Сложность схемы Σ (функции f, системы функций A) в базисе $Б$ обозначается через $L_Б(\Sigma)$, $(L_Б(f)$, $L_Б(A)))$. В дальнейшем, если базис СФЭ не указывается, подразумевается,

что это СФЭ в стандартном базисе $\{\vee,\ \&\ ,\ -\}$. При этом символ $Б$ в обозначении сложности схемы или функции будем опускать и писать $L(\Sigma)$ и $L(f)$. Везде в дальнейшем связки $\vee,\ \&\ ,\ \oplus,\ |,\ \downarrow,\ \to,\ \sim$ являются двухместными.

1.1. Для заданной функции $f(\widetilde{x}^n)$ построить СФЭ в стандартном базисе сложности, не превосходящей m:

1) $f(\widetilde{x}^2) = \overline{x}_1 \cdot \overline{x}_2,\ m = 2$; 2) $f(\widetilde{x}^2) = x_1 \sim x_2,\ m = 4$;
3) $f(\widetilde{x}^3) = x_1x_2 \vee x_2x_3 \vee x_3x_1,\ m = 4$;
4) $f(\widetilde{x}^3) = (0111\,1110),\ m = 6$; 5) $f(\widetilde{x}^3) = (0001\,1111),\ m = 2$;
6) $f(\widetilde{x}^3) = (1000\,1101),\ m = 4$; 7) $f(\widetilde{x}^3) = (0110\,1001),\ m = 8$.

1.2. Для заданной функции $f(\widetilde{x}^n)$ построить формулу в базисе $Б$:

1) $f(\widetilde{x}^2) = x_1 \oplus x_2$; а) $Б = \{|, -\}$, б) $Б = \{\to, -\}$;
2) $f(\widetilde{x}^2) = x_1 \to x_2$; а) $Б = \{\downarrow, -\}$, б) $Б = \{\ \&\ , -\}$;
3) $f(\widetilde{x}^2) = x_1 \vee x_2$; а) $Б = \{-, |\}$, б) $Б = \{\sim,\ \&\ \}$;
4) $f(\widetilde{x}^3) = x_1 \vee x_2 \vee x_3$; а) $Б = \{-, \downarrow\}$, б) $Б = \{\to, -\}$;
5) $f(\widetilde{x}^3) = x_1x_2 \vee x_2x_3 \vee x_3x_1$; а) $Б = \{\ \&\ , \oplus\}$, б) $Б = \{\to, -\}$;
6) $f(\widetilde{x}^3) = x_1x_2x_3 \vee \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3$; а) $Б = \{-, |, \downarrow\}$, б) $Б = \{\ \&\ , \oplus, -\}$;
7) $f(\widetilde{x}^3) = x_1 \oplus x_2x_3$; а) $Б = \{\downarrow, |, -\}$, б) $Б = \{\to, -\}$.

1.3. Для функции, заданной вектором своих значений, построить формулу в базисе $Б$:

1) $f(\widetilde{x}^2) = (1011)$; а) $Б = \{\vee, -\}$, б) $Б = \{|\}$;
2) $f(\widetilde{x}^2) = (1001)$; а) $Б = \{\ \&\ , \to\}$, б) $Б = \{\downarrow\}$;
3) $f(\widetilde{x}^3) = (1000\,0001)$; а) $Б = \{-, |\}$, б) $Б = \{\oplus,\ \&\ , 1\}$;
4) $f(\widetilde{x}^3) = (1110\,1000)$; а) $Б = \{\oplus,\ \&\ , 1\}$, б) $Б = \{\to, -\}$;
5) $f(\widetilde{x}^3) = (1001\,0100)$; а) $Б = \{\oplus, 1\}$, б) $Б = \{-, |\}$;
6) $f(\widetilde{x}^3) = (1010\,1110)$; а) $Б = \{\oplus,\ \&\ , -\}$, б) $Б = \{-, \vee\}$;
7) $f(\widetilde{x}^3) = (0110\,1111)$; а) $Б = \{\oplus,\ \&\ , -\}$, б) $Б = \{-, \downarrow\}$.

1.4. По схемам Σ, изображенным на рис. 10.2, найти функции, реализуемые ими.

1.5. Построить СФЭ в базисе $Б$, реализующую систему функций Φ:

1) $\Phi = \{f_1 = x_1x_2 \vee x_2x_3 \vee x_3x_1,\ f_2 = x_1 \oplus x_2 \oplus x_3\}$;
а) $Б = \{\ \&\ , \vee, -\}$, б) $Б = \{\ \&\ , \oplus\}$, в) $Б = \{\downarrow, |\}$;
2) $\Phi = \{f_1 = \overline{x}_1,\ f_2 = \overline{x}_1\overline{x}_2,\ f_3 = \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3,\ f_4 = 1\}$;
а) $Б = \{\ \&\ , -\}$, б) $Б = \{-, \downarrow\}$;
3) $\Phi = \{f_1 = x_1 \oplus x_2,\ f_2 = \overline{x_1 \vee x_2 \vee x_3} \vee x_1x_2x_3,$
$f_3 = x_1x_2 \vee \overline{x}_1\overline{x}_2\}$;
а) $Б = \{\oplus,\ \&\ , -\}$, б) $Б = \{\ \&\ , \vee, -\}$;
4) $\Phi = \{f_1 = x_1x_2 \vee x_2\overline{x}_3 \vee \overline{x}_1\overline{x}_3,\ f_2 = x_1 \sim x_2,\ f_2 = x_2 \oplus x_3\}$;
а) $Б = \{\ \&\ , \vee, -\}$, б) $Б = \{\downarrow\}$;
5) $\Phi = \{f_1 = \overline{x}_1\overline{x}_2 \vee \overline{x}_2\overline{x}_3 \vee \overline{x}_3\overline{x}_1,\ \overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \vee \overline{x}_3,\ \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3\}$;
а) $Б = \{\ \&\ , \vee, -\}$, б) $Б = \{|\}$;

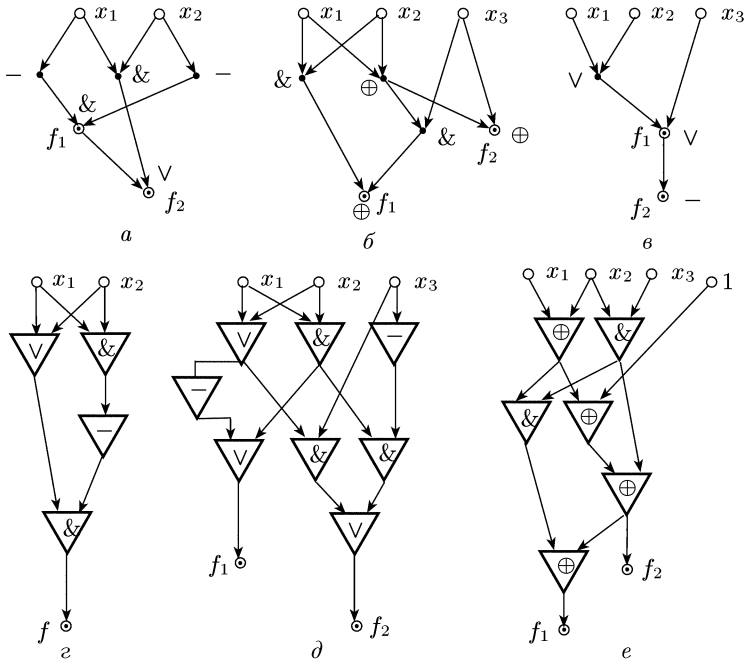


Рис. 10.2

6) $\Phi = \{f_1(\widetilde{x}^4) = x_1x_3\overline{x}_4 \vee \overline{x}_1\overline{x}_3x_4 \vee x_2\overline{x}_3\overline{x}_4 \vee \overline{x}_2x_3x_4,$
$f_2 = f_1(x_1, x_2, \overline{x}_3, \overline{x}_4)\}$;
а) $Б = \{\,\&\,, \vee, -\}$, б) $Б = \{\,\&\,, \oplus, -\}$;

7) $\Phi = \{f_1(\widetilde{x}^4) = x_1\overline{x}_2x_3 \vee \overline{x}_1x_2\overline{x}_3 \vee \overline{x}_1x_2\overline{x}_3 \vee \overline{x}_1\overline{x}_2x_4 \vee x_1x_2\overline{x}_4,$
$f_2 = x_1 \oplus x_2,\ f_3 = x_2 \oplus x_3,\ f_4 = x_1 \oplus x_4\}$;
а) $Б = \{\,\&\,, \vee, -\}$, б) $Б = \{\,\&\,, \oplus, -\}$;

8) $\Phi = \{f_0 = \overline{x}_1, \overline{x}_2, \overline{x}_3,\ f_1 = \overline{x}_1\overline{x}_2x_3,\ f_2 = \overline{x}_1x_2\overline{x}_3,\ f_3 = \overline{x}_1x_2x_3,$
$f_4 = x_1\overline{x}_2\overline{x}_3,\ f_5 = x_1x_2x_3,\ f_6 = x_1x_2x_3,\ f_7 = x_1x_2x_3\}$;
а) $Б = \{\,\&\,, -\}$, б) $Б = \{\vee, \oplus, 1\}$.

1.6. Реализовать функцию $f(\widetilde{x}^n)$ СФЭ в стандартном базисе, предварительно упростив выражение для $f(\widetilde{x}^n)$:

1) $f(\widetilde{x}^3) = x_1x_2x_3 \vee x_1x_2\overline{x}_3 \vee \overline{x}_1x_2x_3 \vee \overline{x}_1x_2\overline{x}_3 \vee \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3$;
2) $f(\widetilde{x}^3) = x_1x_2\overline{x}_3 \vee x_1\overline{x}_2x_3 \vee \overline{x}_1x_2x_3 \vee x_1\overline{x}_2\overline{x}_3 \vee \overline{x}_1x_2\overline{x}_3 \vee \overline{x}_1\overline{x}_2x_3$;
3) $f(\widetilde{x}^3) = x_1\overline{x}_3 \vee x_2\overline{x}_3 \vee \overline{x}_1x_2 \vee \overline{x}_1x_3$;
4) $f(\widetilde{x}^3) = (x_1 \vee \overline{x}_2 \vee x_3)(x_1 \vee \overline{x}_2 \vee \overline{x}_3)(x_1 \vee x_2 \vee \overline{x}_3)(\overline{x}_1 \vee x_2 \vee \overline{x}_3)$;
5) $f(\widetilde{x}^3) = (x_1 \vee x_2)(x_1 \vee \overline{x}_2 \vee x_3) \vee x_1\overline{x}_2x_3 \vee x_2x_3$;
6) $f(\widetilde{x}^3) = (\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2)(\overline{x}_2 \vee x_3)(x_1 \vee x_2 \vee \overline{x}_3)(\overline{x}_1 \vee x_2 \vee \overline{x}_3)$;
7) $f(\widetilde{x}^3) = x_1x_2 \vee x_1\overline{x}_3 \vee x_1\overline{x}_2\overline{x}_3 \vee \overline{x}_1\overline{x}_2 \vee \overline{x}_1\overline{x}_3$.

Метод синтеза СФЭ, основанный на д. н. ф., состоит из двух этапов: 1) представления функции в д. н. ф.; 2) реализации д. н. ф. с помощью СФЭ.

1.7. Реализовать функцию f по методу, основанному на д. н. ф.:
1) $f = (01000110)$; 2) $f = (01111110)$; 3) $f = (00011111)$;
4) $f = (00010111)$; 5) $f = 1 \oplus x \oplus zy$; 6) $f = x \oplus y \oplus z$.

1.8. Доказать, что если f^* — функция, двойственная к f, и f отлична от константы, то $L(f^*) = L(f)$.

Одноразрядным двоичным сумматором называется СФЭ (в произвольном базисе), реализующая систему из двух функций: $m(x, y, p) = xy \vee yp \vee px$ и $l(x, y, p) = x \oplus y \oplus p$.

1.9. Построить одноразрядный двоичный сумматор в базисе со сложностью, не превышающей L:
1) $Б = \{\vee, \&, -\}$, $L = 9$; 2) $Б = \{\oplus, \&\}$, $L = 5$;
3) $Б = \{\downarrow, |, -\}$, $L = 12$.

1.10. Построить СФЭ в базисе $\{\oplus, \&\}$, реализующую такую систему функций $\{f_1(\widetilde{x}^4), f_2(\widetilde{x}^4), f_3(\widetilde{x}^4)\}$, что $\nu(f_1(\widetilde{\alpha}^4), f_2(\widetilde{\alpha}^4), f_3(\widetilde{\alpha}^4))$ равно числу единиц в наборе $\widetilde{\alpha}^4 = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$. Таким образом, искомая СФЭ дает двоичное разложение числа единиц набора $\widetilde{\alpha}^4$. Здесь, как и раньше, $\nu(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \sum\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} \alpha_i \cdot 2^{n-i}$.

Дешифратором называется схема D_n, реализующая систему всех конъюнкций ранга n переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

1.11. 1) Построить D_2 в базисе $\{\&, -\}$ с числом элементов, не превосходящим 6.

2) Построить D_n в базисе $Б = \{\&, -\}$ такую, что

$$L(D_n) \leqslant 2^{n+1} + n - 4.$$

3) Построить D_n в базисе $Б = \{\&, -\}$ такую, что

$$L(D_n) \leqslant 2^n + 2^{(n+3)/2} + n.$$

1.12. *Мультиплексором* от переменных $x_1, \ldots, x_n, y_0, y_1, \ldots, y_{2^n-1}$ называется схема M_n, реализующая функцию

$$f(x_1, \ldots, x_n, y_0, y_1, \ldots, y_{2^n-1}) = \bigvee_{(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)} y_{\nu(\sigma_1, \ldots, \sigma_n)} x_1^{\sigma_1} \ldots x_n^{\sigma_n},$$

где $\nu(\sigma_1, \ldots, \sigma_n) = \sum\limits_{i=1}^{n} \sigma_i \cdot 2^{n-i}$.

1) Построить M_2 в стандартном базисе с числом элементов, не превосходящим 13.

2) Доказать, что $L(M_n) \leqslant 3 \cdot 2^n + 2^{(n+3)/2} + n$.

3) Доказать, что $L(M_n) \geqslant 2^{n-1}$.

1.13. *Универсальным многополюсником* для множества переменных X называется СФЭ $U(X)$, реализующая все булевы функции переменных из X. Если $X^n = \{x_1, \ldots, x_n\}$, то полагаем $U(X^n) = U_n$.

1) Построить СФЭ U_1 сложности 3.

2*) Доказать, что сложность минимального многополюсника U_n равна $2^{2^n} - n$.

1.14. Пусть D_{n-k} — произвольный дешифратор для множества переменных $x_1, \ldots, x_{n-k}$, $X = \{x_{n-k+1}, \ldots, x_n\}$ и U_k — произвольный универсальный многополюсник для множества переменных X.

1) Доказать, что для произвольной булевой функции $f(\widetilde{x}^n)$

$$L(f(\widetilde{x}^n)) \leqslant L(D_{n-k}) + L(U_k) + 2^{n-k+1}.$$

2) Опираясь на результаты задач 1.11 и 1.13, доказать, что для достаточно больших n и любой булевой функции $f(\widetilde{x}^n)$ справедливо неравенство $L(f(\widetilde{x}^n)) \leqslant 2^{n+2}/n$.

3) Доказать, что существует СФЭ в базисе $\{\vee, \&, \oplus, -\}$, реализующая все самодвойственные функции $f(\widetilde{x}^n)$ и имеющая сложность, не превосходящую $2 \cdot 2^{2^{n-1}}$.

Функция $f(\widetilde{x}^n)$ такая, что $N_f = \bigcup\limits_{i=k}^{m} B_i^n$, называется *поясковой* и обозначается через $S^{k,m}(\widetilde{x}^n)$. Функция $S^{k,k}(\widetilde{x}^n)$ называется *элементарной симметрической функцией*. Функция $f(\widetilde{x}^n)$, представимая в виде дизъюнкции элементарных симметрических функций, называется *симметрической*.

1.15. 1) Доказать, что для любой перестановки $\pi = (i_1, \ldots, i_n)$ чисел $1, \ldots, n$ и любой симметрической функции $f(\widetilde{x}^n)$ выполнено равенство

$$f(x_1, \ldots, x_n) = f(x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}).$$

2) Доказать, что для любой поясковой функции существует СФЭ, содержащая не более одного элемента отрицания.

3) Доказать, что для любой симметрической функции $f(\widetilde{x}^n)$ существует СФЭ, содержащая не более $(n+1)/2$ элементов отрицания.

1.16*. Построить СФЭ, реализующую три одноместные функции $\overline{x}_1$, $\overline{x}_2$, $\overline{x}_3$ и содержащую ровно два элемента отрицания.

1.17. Доказать, что $L(x \oplus y) = 4$.

Глубиной СФЭ в базисе $Б$ называется максимальное число внутренних вершин (функциональных элементов) в ориентированных цепях, соединяющих вход с выходом. Например, глубина схемы изображенной на рис. 10.1, *а*, равна 3.

1.18. Построить СФЭ глубины l для функции f_i:

1) $f_1 = x_1x_2x_3x_4$, $l = 2$; 2) $f_2 = x_2x_3 \vee x_1\overline{x}_2x_3$, $l = 2$;

3) $f_3 = x_1 \oplus x_2 \oplus x_3$, $l = 6$;

4) $f_4 = x_1(x_3 \vee x_4)(x_5 \vee x_6) \vee x_2(x_3x_5 \vee x_4x_5 \vee x_4x_6 \vee x_3x_6)$, $l = 3$;

5) $f_5 = x_1 \vee \overline{x}_1x_2 \vee \overline{x}_1\overline{x}_2x_3 \vee \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3x_4$, $l = 2$;

6) $f_6 = (x_1x_2 \vee x_2x_3 \vee x_3x_1) \vee (x_1 \oplus x_2 \oplus x_3)$, $l = 2$.

1.19. СФЭ Σ называется *связной*, если граф, полученный из нее заменой дуг на ребра, является связным. Пусть СФЭ Σ связна и

существует единственная вершина (выход) с нулевой полустепенью исхода.

1) Доказать, что $L(\Sigma) \leqslant 2^{l+1} - 1$, где l — глубина схемы Σ.

2) Доказать, что всякая минимальная СФЭ с одним выходом связна.

1.20. Доказать, что для любого l существует минимальная СФЭ глубины l.

1.21. Доказать, что любая СФЭ, реализующая произвольную функцию $f(\widetilde{x}^n)$, существенно зависящую от всех переменных, имеет глубину не меньшую, чем $\log_2 n - 1$.

§ 2. Контактные схемы и формулы

Сеть Γ с k полюсами, в которой каждое ребро помечено буквой из алфавита $X^n = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, \overline{x}_1, \overline{x}_2, \ldots, \overline{x}_n\}$, называется *$k$-полюсной контактной схемой*, реализующей булевы функции переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, или, короче, *$\langle k, n\rangle$-схемой*. $\langle 2, n\rangle$-схемы будут называться *X^n-схемами*. Сеть Γ называется *сетью контактной схемы*. Контактная схема называется *связной* (*сильно связной*, *параллельно-последовательной*), если таковой является ее сеть. Параллельно-последовательная контактная схема называется кратко *π-схемой*. Ребра схемы, помеченные символами переменных или их отрицаний, называются *контактами*. Контакт называется *замыкающим*, если он помечен символом переменной, и *размыкающим*, если он помечен символом отрицания переменной. Пусть Σ_1 и Σ_2 — две k-полюсные контактные схемы, полюса каждой из которых помечены буквами $a_1, a_2, \ldots, a_k$. Схемы Σ_1 и Σ_2 называются *изоморфными*, если их сети изоморфны и при этом: а) соответствующие ребра помечены одинаково; б) соответствующие полюса помечены одинаково. Пусть a и b — два полюса контактной схемы Σ, $[a, b]$ — некоторая цепь, соединяющая a и b, и $K_{[a,b]}$ — конъюнкция букв, приписанных ребрам цепи $[a, b]$. Функция $f_{a,b}(\widetilde{x}^n)$, определяемая формулой

$$f_{a,b}(\widetilde{x}^n) = \bigvee_{[a,b]} K_{[a,b]},$$

в которой дизъюнкция берется по всем простым цепям схемы, соединяющим полюса a и b, называется *функцией проводимости между полюсами a, b схемы Σ*. Говорят, что *схема Σ реализует функцию $g(\widetilde{x}^n)$*, если в ней существуют полюса a и b такие, что $g(\widetilde{x}^n) = f_{a,b}(\widetilde{x}^n)$.

Контактная схема с $k+1$ полюсами называется *$(1, k)$-полюсником, реализующим функции $g_1(\widetilde{x}^n), \ldots, g_k(\widetilde{x}^n)$*, если существуют полюс a и полюса b_i $(1 \leqslant i \leqslant k)$ такие, что $f_{a,b_i}(\widetilde{x}^n) = g_i(\widetilde{x}^n)$. При изображении $(1, k)$-полюсников полюс a изображается светлым кружком и называется *входом*, полюса b_i изображаются двойными кружками и называются *выходами*, остальные вершины изображаются

темными кружками. В тех случаях, когда число полюсов схемы не указывается, речь всегда будет идти о двухполюсных контактных схемах. Две контактные схемы называются *эквивалентными*, если они реализуют одну и ту же булеву функцию или одну и ту же систему функций. *Сложностью контактной схемы* называется число ее контактов. Контактная схема, имеющая наименьшую сложность среди всех эквивалентных ей схем, называется *минимальной*. *Сложностью булевой функции f в классе контактных схем* (обозначение: $L_k(f)$) называется сложность минимальной контактной схемы, реализующей f. *Сложностью булевой функции f в классе π-схем* называется число контактов в минимальной π-схеме, реализующей f (обозначение: $L_\pi(f)$). Понятие формулы над множеством связок было определено в гл. I. *Сложностью булевой функции f в классе формул* (над множеством связок $\{\vee, \&, -\}$) будет называться число вхождений символов переменных. Сложность функции f в этом классе формул обозначается через $L_\Phi(f)$.

2.1. Найти функции, реализуемые двухполюсными схемами Σ, представленными на рис. 10.3.

Один из способов построения контактных схем, реализующих булевы функции, состоит в том, что функция представляется в д. н. ф.

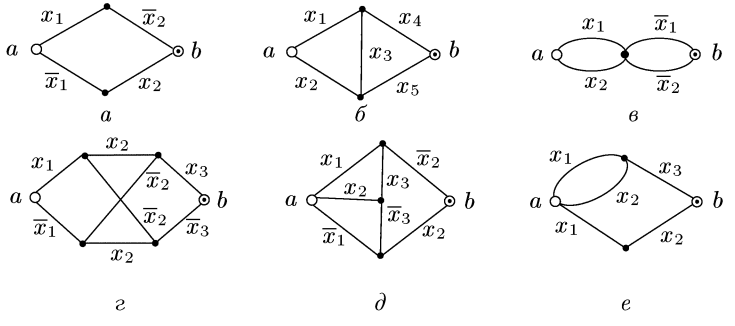


Рис. 10.3

(или к. н. ф.), а затем для каждой элементарной конъюнкции $K = x_{i_1}^{\sigma_1} \& \ldots \& x_{i_k}^{\sigma_k}$ (дизъюнкции $D = x_{i_1}^{\sigma_1} \vee \ldots \vee x_{i_k}^{\sigma_k}$) строим схему, представляющую собой последовательное (параллельное) соединение контактов $x_{i_1}^{\sigma_1}, \ldots, x_{i_k}^{\sigma_k}$, и соединяем полученные схемы параллельно (последовательно).

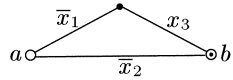


Рис. 10.4

Пример. Пусть (1101 1100) — вектор значений функции $f(\widetilde{x}^3)$. Представим f в совершенной д. н. ф., а затем упростим ее:

$$f(\widetilde{x}^3) = \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3 \vee \overline{x}_1\overline{x}_2x_3 \vee \overline{x}_1x_2x_3 \vee x_1\overline{x}_2\overline{x}_3 \vee x_1\overline{x}_2x_3 = \overline{x}_2 \vee \overline{x}_1x_3.$$

Схема, соответствующая этой д. н. ф., показана на рис. 10.4.

2.2. Представив функцию f в д. н. ф. или к. н. ф., построить π-схему, реализующую f:

1) $f(\widetilde{x}^2) = (1101)$; 2) $f(\widetilde{x}^2) = x_1 \sim x_2$; 3) $f(\widetilde{x}^3) = (1000\,1111)$;
4) $f(\widetilde{x}^3) = (1110\,1000)$; 5) $f(\widetilde{x}^3) = (0100\,0010)$;
6) $f(\widetilde{x}^3) = (x_1 \to x_2)(x_1 \oplus x_3)$; 7) $f(\widetilde{x}^3) = x_1x_2 \oplus x_2x_3 \oplus x_3x_1 \oplus 1$.

2.3. Построить контактную схему, реализующую функцию f:

1) $f(\widetilde{x}^3) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3)(\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \vee \overline{x}_3)$;
2) $f(\widetilde{x}^3) = x_1x_2 \oplus x_2x_3 \oplus x_3x_1$; 3) $f(\widetilde{x}^3) = x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus 1$;
4) $f(\widetilde{x}^3) = (x_1 \vee x_2\overline{x}_3)(\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2)$; 5) $f(\widetilde{x}^3) = (x_1 \mid x_2) \downarrow (x_3 \mid \overline{x}_2)$;
6) $f(\widetilde{x}^3) = x_1 \oplus x_2x_3 \oplus 1$; 7) $f(\widetilde{x}^3) = (x_1 \vee \overline{x}_2x_3)(x_1 \oplus x_3)$.

2.4. Построить контактную схему сложности, не превышающей l, реализующую функцию f:

1) $f(\widetilde{x}^3) = x_1 \oplus x_2x_3$, $l = 6$;
2) $f(\widetilde{x}^3) = x_1\overline{x}_2 \oplus \overline{x}_2x_3 \oplus x_3x_1 \oplus 1$, $l = 5$;
3) $f(\widetilde{x}^3) = x_1\overline{x}_3 \vee x_2x_3 \vee \overline{x}_1x_2\overline{x}_3$, $l = 5$;
4) $f(\widetilde{x}^3) = x_1x_2 \vee x_1\overline{x}_2x_3 \vee \overline{x}_1x_2x_3 \vee \overline{x}_1\overline{x}_2$, $l = 5$;
5) $f(\widetilde{x}^4) = \overline{x}_1x_4 \vee x_2x_3x_4 \vee x_2\overline{x}_3\overline{x}_4 \vee x_1\overline{x}_4$, $l = 7$;
6) $f(\widetilde{x}^3) = (x_1 \oplus x_2 \oplus x_3)(x_1 \vee x_3)$, $l = 5$;
1) $f(\widetilde{x}^4) = (0000\,0001\,0111\,1111)$ $l = 7$.

2.5. Построить контактную схему, реализующую f и имеющую сложность не выше L, упростив предварительно формулу, с помощью которой она задана:

1) $f = ((x_1 \vee x_2)(\overline{x}_2 \vee x_4) \vee (x_3 \vee \overline{x}_4)(\overline{x}_1\overline{x}_2x_3 \vee x_4x_5))(x_1 \vee x_2x_3)$, $L = 5$;
2) $f = x_1 \vee \overline{x}_1x_2 \vee \overline{x}_1\overline{x}_2x_3 \vee \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3x_4$, $L = 4$;
3) $f = (x_1 \vee x_2)((x_1x_2 \vee \overline{x}_2\overline{x}_3)x_6 \vee (\overline{x}_2 \vee \overline{x}_3\overline{x}_5)(\overline{x}_2 \vee \overline{x}_3) \vee \vee(\overline{x}_1\overline{x}_2 \vee x_1x_2 \vee x_6)x_3 \vee x_1x_2 \vee x_5x_6)$, $L = 1$;
4) $f = \overline{x}_1\overline{x}_2x_3((\overline{x}_4 \vee \overline{x}_1\overline{x}_5)(x_5 \vee x_1\overline{x}_4x_7) \vee (x_6x_7 \vee x_2x_4x_5)\,\&\,(\overline{x}_4x_5 \vee \overline{x}_3x_6\overline{x}_7)) \vee (\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2)(\overline{x}_4 \vee x_6)(x_5 \vee x_7)$, $L = 6$;
5) $f = x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus x_4 \oplus x_1x_2x_3x_4 \oplus x_1x_2 \oplus x_1x_3 \oplus x_1x_4 \oplus x_2x_3 \oplus \oplus x_2x_4 \oplus x_3x_4 \oplus x_1x_2x_3 \oplus x_1x_2x_4 \oplus x_1x_3x_4 \oplus x_2x_3x_4$, $L = 4$;
6) $f = x_1x_2x_3x_4 \vee \Big(\bigoplus\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant 4} x_ix_j\Big)$, $L = 6$.

2.6. Построить контактную схему сложности, не превышающей L, реализующую систему функций Φ:

1) $\Phi = \{f_1 = x_1x_2 \vee x_2x_3 \vee x_3x_1,\ f_2 = x_1 \oplus x_2 \oplus x_3\}$, $L = 12$;
2) $\Phi = \{f_1 = (00000001),\ f_2 = (00000011),\ f_3 = (00000111),$
$f_4 = (00001111),\ f_5 = (00011111),\ f_6 = (00111111),$
$f_7 = (01111111)\}$, $L = 11$;

3) $\Phi = \{f_0 = \overline{x}_1 \vee \overline{x}_2,\ f_1 = \overline{x}_1 \vee x_2,\ f_2 = x_1 \vee \overline{x}_2,\ f_3 = x_1 \vee x_2\}$, $L = 6$;

4) $\Phi = \{f_0 = \overline{x}_1\overline{x}_2,\ f_1 = \overline{x}_1 x_2,\ f_2 = x_1\overline{x}_2,\ f_3 = x_1 x_2\}$, $L = 6$;

5) $\Phi = \{f_1 = (00000001),\ f_2 = (00010111),\ f_3 = (01111111)\}$, $L = 9$;

6) $\Phi = \{f_1 = (10010110),\ f_2 = (01101001),\ f_3 = (00111100),\ f_4 = (11000011)\}$, $L = 10$.

2.7. Найти функции, реализуемые контактными схемами, изображенными на рис. 10.5.

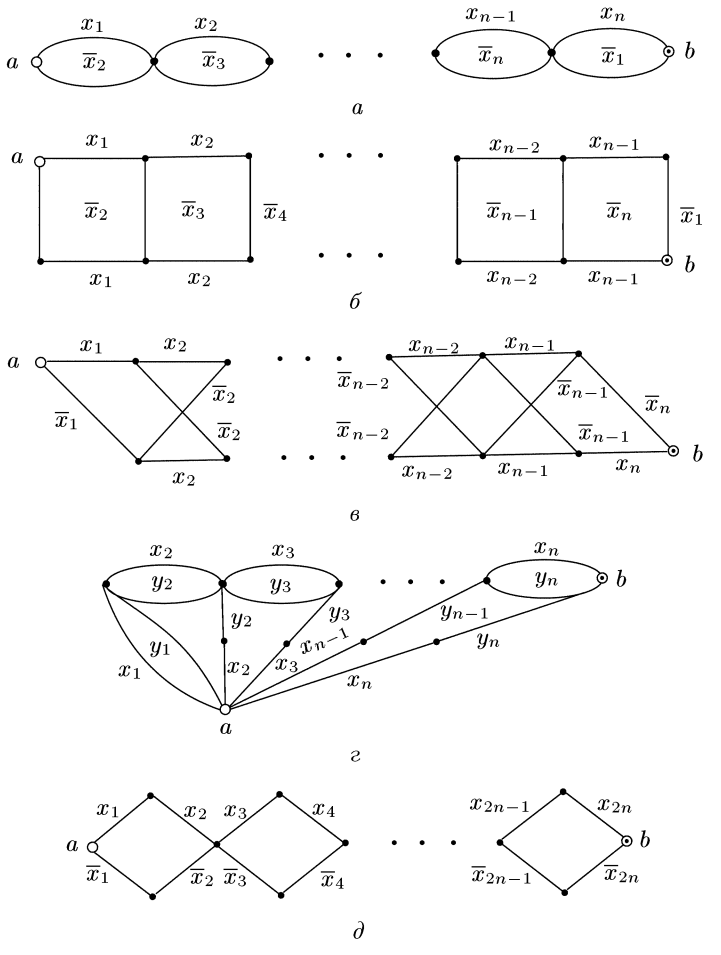


Рис. 10.5

2.8. Пусть $\nu(\widetilde{\alpha}) = \sum_{i=1}^{n} 2^{n-i}\alpha_i$ — номер набора $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$.

Построить контактную схему с не более чем l контактами, реализующую функцию f:

1) $f(\widetilde{x}^4) = \begin{cases} 1, & \nu(\alpha_1, \alpha_2) \leqslant \nu(\alpha_3, \alpha_4), \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$ $l = 7$;

2) $f(\widetilde{x}^4) = \begin{cases} 1, & \nu(\alpha_1, \alpha_2) = \nu(\alpha_3, \alpha_4), \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$ $l = 8$;

3) $f(\widetilde{x}^4) = \begin{cases} 1, & \alpha_1 + \alpha_2 = \alpha_3 + \alpha_4, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$ $l = 12$;

4) $f(\widetilde{x}^4 = \begin{cases} 1, & \alpha_1 + \alpha_2 \equiv \alpha_3 + \alpha_4 \pmod 2, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$ $l = 8$;

5) $f(\widetilde{x}^4) = \begin{cases} 1, & \alpha_1 + \alpha_2 \leqslant \alpha_3 + \alpha_4, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$ $l = 10$;

6) $f(\widetilde{x}^4) = \begin{cases} 1, & (\alpha_1 \leqslant \alpha_3) \,\&\, (\alpha_2 \leqslant \alpha_4); \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$ $l = 4$;

7) $f(\widetilde{x}^4) = \begin{cases} 1, & \text{если наборы } (\alpha_1, \alpha_2) \text{ и } (\alpha_3, \alpha_4) \text{ несравнимы,} \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$ $l = 8$.

2.9. Построить контактную схему для одноразрядного двоичного сумматора.

Контактным X^n-деревом называется контактный $(1, 2^n)$-полюсник D_n^k, индуктивное определение которого дано на рис. 10.6. Очевид-

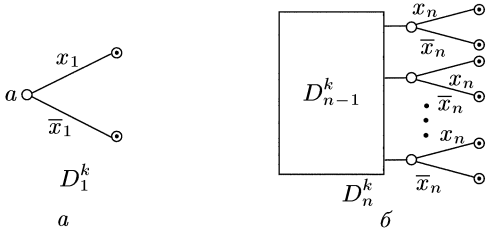


Рис. 10.6

но, что D_n^k реализует все конъюнкции ранга n переменных $x_1, \ldots, x_n$ и что $L_k(D_n^k) = 2^{n+1} - 2$; $(1, m)$-полюсник называется *разделительным*, если для любых его выходов b, c функция проводимости $f_{b,c}(\widetilde{x}^n)$ тождественно равна нулю.

2.10. 1) Построить D_3^k.

2) Доказать, что D_n^k является разделительным $(1, 2^n)$-полюсником.

3) Система функций Ф называется *ортогональной*, если для любых двух функций f и g из Ф выполняется равенство $f \,\&\, g = 0$. Доказать,

что для всякой ортогональной системы функций $\Phi = \{f_1(\widetilde{x}^n), \ldots, f_m(\widetilde{x}^n)\}$ существует контактная схема сложности, не превышающей $2^{n+1} - 2$, реализующая Φ.

2.11. Пусть разделительный $(1, k)$-полюсник A с полюсами a, $b_1, \ldots, b_k$ соединяется с $(m, 1)$-полюсником B с полюсами $a_1, \ldots, a_m$, b так, что каждый выход b_i отождествляется ровно с одним из полюсов a_j. Доказать, что для полученного таким образом двухполюсника Σ выполняется равенство $f_{a,b}(\widetilde{x}^n) = \bigvee\limits_{i=1}^{k} f_{a,b_i}(\widetilde{x}^n) f_{b_i,b}(\widetilde{x}^n)$, где $f_{a,b}(\widetilde{x}^n)$ — функция проводимости между полюсами a, b схемы Σ; $f_{a,b_i}(\widetilde{x}^n)$ — функция проводимости между полюсами a, b_i схемы A; $f_{b_i,b}(\widetilde{x}^n)$ — функция проводимости между полюсом a_j, отождествленным с полюсом b_i схемы A, и полюсом b схемы B.

Универсальным контактным многополюсником называется $(1, 2^{2^n})$- или $(2^{2^n}, 1)$-полюсник, реализующий все булевы функции переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$. На рис. 10.7 представлена схема U_1^k.

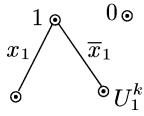


Рис. 10.7

Метод Шеннона для синтеза контактных схем, реализующих булевы функции $f(\widetilde{x}^n)$, состоит в использовании схем D_{n-m}^k и U_m^k.

Пусть $f(\widetilde{x}^n)$ — функция, которую следует реализовать. Для набора $\widetilde{\sigma} = (\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-m})$ из B^{n-m} положим

$$f_{\widetilde{\sigma}}(\widetilde{x}^n) = f(\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-m}, x_{n-m+1}, \ldots, x_n).$$

По формуле разложения имеем

$$f(\widetilde{x}^n) = \bigvee_{\substack{\widetilde{\sigma} \in B^{n-m} \\ \widetilde{\sigma} = (\sigma_1 \ldots \sigma_{n-m})}} x_1^{\sigma_1} \ldots x_{n-m}^{\sigma_{n-m}} f_{\widetilde{\sigma}}(\widetilde{x}^n).$$

Пусть D_{n-m}^k — контактное дерево с полюсами a, b_0, b_1, $\ldots$, $b_{2^{n-m}-1}$, реализующее конъюнкции $K_{\nu_{\widetilde{\sigma}}} = x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \ldots x_{n-m}^{\sigma_{n-m}}$ между полюсами a и b_k, где $k = \nu(\widetilde{\sigma}) = \sum\limits_{i=1}^{n-m} 2^{n-m-i}\sigma_i$. Пусть U_m^k — универсальный контактный $(2^{2^m}, 1)$-полюсник с полюсами $a_0, a_1, \ldots, a_{2^{2^m}-1}$, b, реализующий все функции $f(x_{n-m+1}, \ldots, x_n)$.

Рассмотрим схему Σ_f, полученную отождествлением для каждого $\widetilde{\sigma} \in B^{n-m}$ выхода $b_\nu(\widetilde{\sigma})$ схемы D_{n-m}^k с входом a_r схемы U_n^k таким, что $f_{a_r,b}(x_{n-m+1}, \ldots, x_n) = f_{\widetilde{\sigma}}(\widetilde{x}^n)$ (рис. 10.8).

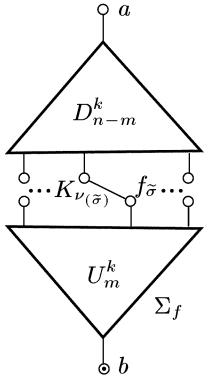


Рис. 10.8

В силу разделительности схемы D_{n-m}^k для полученной таким образом схемы Σ_f с полюсами a и b справедливо равенство

$$f_{a,b}(\widetilde{x}^n) = \bigvee_{(\sigma_1, \ldots, \sigma_{n-m})} x_1^{\sigma_1} \ldots x_{n-m}^{\sigma_{n-m}} f_{\widetilde{\sigma}}(\widetilde{x}^n) = f(\widetilde{x}^n).$$

Заметим, что из построения следует равенство

$$L(\Sigma_f) = L(D^k_{n-m}) + L(U^k_m). \tag{1}$$

2.12. 1) Построить U^k_2 с числом контактов, не превосходящим 16.

2) Доказать индукцией по n существование U^k_n такого, что

$$L(U^k_n) \leqslant 2 \cdot 2^{2^n}.$$

3) Доказать путем выбора подходящего m в равенстве (1), что при достаточно больших n для произвольной булевой функции $f(\widetilde{x}^n)$ справедливо неравенство $L(f(\widetilde{x}^n)) \leqslant 8 \cdot \dfrac{2^n}{n}$.

Метод каскадов для построения контактных схем состоит в следующем. Пусть требуется реализовать контактной схемой булеву функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$ $(n \geqslant 2)$. Обозначим через $\mathfrak{A}_i$ $(i = 1, \ldots, n-1)$ совокупность всех подфункций $f(\sigma_1, \ldots, \sigma_i, x_{i+1}, \ldots, x_n)$, $(\sigma_1, \ldots, \sigma_i) \in B^i$, функции f, и пусть $\mathfrak{A}^*_i$ — множество, составленное из попарно различных функций из $\mathfrak{A}_i$. Каждому множеству $\mathfrak{A}^*_i$ $(i = 1, \ldots, n-1)$ взаимно однозначно сопоставим множество V_i точек плоскости, называемых *вершинами i-го ранга.* Добавим еще три полюса — входной полюс a и выходные полюса b и c. Полюс a является вершиной нулевого ранга, полюса b, c — вершинами n-го ранга. Полюсу a сопоставим функцию $f(x_1, \ldots, x_n)$, полюсам b, c — функции, тождественно равные соответственно единице и нулю. Положим $V = \{a, b\} \cup \bigcup\limits_{i=1} V_i$. Множество V разобьем на классы эквивалентности, отнеся к одному классу вершины разных рангов в том и только том случае, когда они соответствуют равным функциям. Пусть v — произвольная вершина i-го ранга, а $\varphi_v(x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_n)$ — соответствующая ей функция, и пусть $\varphi_v(0, x_{i+2}, \ldots, x_n) \neq \varphi_v(1, x_{i+2}, \ldots, x_n)$. Тогда соединим вершину v контактом x_{i+1} с вершиной u ранга $i+1$, которая соответствует подфункции $\varphi_v(1, x_{i+2}, \ldots, x_n)$, и контактом $\overline{x}_{i+1}$ с вершиной w, соответствующей подфункции $\varphi_v(0, x_{i+2}, \ldots, x_n)$. Если же $\varphi_v(0, x_{i+2}, \ldots, x_n) \equiv \varphi_v(1, x_{i+2}, \ldots, x_n)$, то обе подфункции равны тождественно функции $\varphi_v(x_{i+1}, x_{i+2}, \ldots, x_n)$, и контакты между соответствующими вершинами не проводятся. Все вершины из одного класса эквивалентности отождествляются. В результате получаем схему Σ_f такую, что $f_{a,b}(\widetilde{x}^n) = f(\widetilde{x}^n)$, $f_{a,c}(\widetilde{x}^n) = \overline{f}(\widetilde{x}^n)$. В случае, когда нас интересует только реализация функции f, вершина c может быть удалена вместе с инцидентными ей контактами.

Изложенный метод очевидным образом переносится на реализацию систем.

В дальнейшем под схемой Σ, полученной «*стандартным*» *методом каскадов*, будем понимать схему, в которой вершина c отброшена.

Пример. Реализуем $f(\widetilde{x}^3) = x_1x_2 \oplus x_3$ методом каскадов. Имеем $\mathfrak{A}^*_1 = \{x_3, x_2 \oplus x_3\}$, $\mathfrak{A}^*_2 = \{x_3, \overline{x}_3\}$, $\mathfrak{A}^*_3 = \{0, 1\}$. Полагаем $V_0 = \{a\}$,

$V_1 = \{1, 2\}$, $V_2 = \{3, 4\}$, $V_3 = \{5, 6\}$. Вершины 1 и 4, соответствующие функции x_3, эквивалентны. Способ проведения ребер показан на

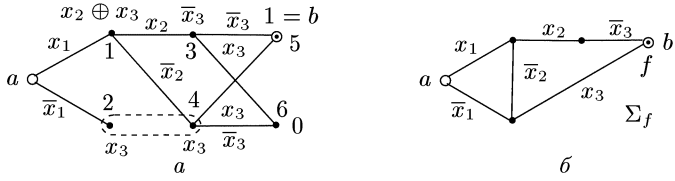


Рис. 10.9

рис. 10.9, *а*. На рис. 10.9, *б* дана схема, полученная отождествлением эквивалентных вершин и удалением вершины 0.

2.13. С использованием метода каскадов построить контактную схему для функции f:

1) $f(\widetilde{x}^3) = x_1x_2x_3 \oplus x_2x_3 \oplus 1$; 2) $f(\widetilde{x}^3) = x_1x_2 \vee x_2x_3 \vee x_3x_1$;

3) $f(\widetilde{x}^3) = x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus 1$; 4) $f(\widetilde{x}^3) = (x_1 \vee x_2 \vee x_3)(\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \vee \overline{x}_3)$;

5) $f(\widetilde{x}^3) = (0110\,1000)$; 6) $f(\widetilde{x}^3) = (0110\,1101)$;

7) $f(\widetilde{x}^4) = (0000\,0001\,0111\,1111)$.

2.14. С использованием метода каскадов построить контактную схему для системы функций Φ:

1) $\Phi = \{xy,\, x \vee y\}$; 2) $\Phi = \{x_2 \oplus x_3,\, x_1 \oplus x_2 \oplus x_3,\, \overline{x}_2\}$;

3) $\Phi = \{x_3, \overline{x}_3,\, x_2 \oplus x_3,\, x_2 \sim x_3,\, x_1 \oplus x_2 \oplus x_3,\, \overline{x_1 \oplus x_2 \oplus x_3}\}$;

4) $\Phi = \{\overline{x}_2 \,\&\, \overline{x}_3,\, \overline{x}_2 \vee \overline{x}_3,\, \overline{x}_3,\, x_1\overline{x}_2 \vee \overline{x}_2\overline{x}_3 \vee \overline{x}_2x_1\}$;

5) $\Phi = \{f_1 = x_1 \oplus x_2 \oplus x_3,\ f_2 = (x_1 \vee x_2)x_3 \vee x_1x_2\}$;

6) $\Phi = \{f_1 = x_1\overline{x}_2x_3 \vee \overline{x}_1x_2\overline{x}_3,\ f_2 = x_1\overline{x}_3 \vee \overline{x}_2\}$;

7) $\Phi = \{x_1 \vee x_2,\, x_1 \vee \overline{x}_2,\, \overline{x}_1 \vee x_2,\, \overline{x}_1 \vee \overline{x}_2\}$;

8) $\Phi = \{x_1x_2,\, x_1\overline{x}_2,\, \overline{x}_1x_2,\, \overline{x}_1\overline{x}_2\}$.

2.15. Показать, что если функция $f(\widetilde{x})$ не равна тождественно константе, то схема Σ_f, построенная по методу каскадов, является сильно связной.

2.16. Доказать, что схема Σ_Φ, реализующая систему функций Φ и построенная по методу каскадов, является разделительной тогда и только тогда, когда система Φ состоит из попарно ортогональных функций.

2.17. 1) Доказать, что схема для универсального многополюсника U_n^k, построенная по методу каскадов, имеет сложность, не превышающую $2 \cdot 2^{2^n}$.

2) Доказать, что для всякой функции f и любой схемы Σ_f, построенной для f по методу каскадов, выполнено неравенство $L(\Sigma_f) \leqslant 8 \cdot \dfrac{2^n}{n}$.

2.18. Доказать, что схема D_n^k для реализации всех элементарных конъюнкций ранга n переменных $x_1, \ldots, x_n$, построенная по методу каскадов, является контактным деревом и имеет сложность $2^{n+1} - 2$.

2.19. Доказать, что схема $D_n^{*,k}$, реализующая все дизъюнкции ранга n переменных $x_1, \ldots, x_n$, имеет сложность $2^{n+2} - 2$.

2.20. Функция $\varphi_m(\widetilde{x}^n)$ $(0 \leqslant m \leqslant 2^n)$ называется *ступенчатой*, если $\varphi_m(\widetilde{\alpha}^n) = 1$ тогда и только тогда, когда $\nu(\widetilde{\alpha}) \geqslant m$.

1) Убедиться в следующих свойствах ступенчатых функций:

а) $\varphi_0(\widetilde{x}^n) \equiv 1$; б) $\varphi_{2^n}(\widetilde{x}^n) \equiv 0$; в) $\varphi_{2^n-1}(\widetilde{x}^n) = x_1 x_2 \ldots x_n$;

г) $\varphi_m(\widetilde{x}^n) = \begin{cases} x_1 \vee \varphi_{m-2^{n-1}}(x_2, \ldots, x_n) & \text{при} \quad 0 < m \leqslant 2^{n-1}, \\ x_1 \cdot \varphi_m(x_2, \ldots, x_n) & \text{при} \quad 2^{n-1} < m \leqslant 2^n; \end{cases}$

д) $\varphi_{2k}(\widetilde{x}^n)$ не зависит существенно от x_n $(k = 1, \ldots, 2^{n-1})$;

е) $\varphi_m(\widetilde{x}^n)$ — монотонная функция.

2) Убедиться в том, что при применении «стандартного» метода каскадов, когда в i-м ярусе разложение ведется по переменной x, сложность получающейся схемы равна $3 \cdot 2^n - 2n - 3$.

3) Убедиться в том, что если в методе каскадов применить обратный порядок разложения, при котором в i-м ярусе разложение ведется по переменной $n - i + 1$, то сложность получающейся схемы равна $2^{n+1} - n - 2$.

2.21. Пусть схема Σ содержит контакт x^α, и пусть Σ' (Σ'') — схема, полученная последовательным (параллельным) соединением этой схемы со схемой из одного контакта x^β, $\alpha, \beta \in \{0, 1\}$. Доказать, что схемы Σ' и Σ'' не являются минимальными.

2.22. Доказать, что всякая минимальная контактная схема, реализующая функцию, отличную от констант, является сильно связной.

2.23. Доказать, что не существует минимальных контактных X^1-схем с двумя контактами и X^2-схем с тремя контактами.

2.24. Доказать, что не существует минимальных контактных X^3-схем сложности 4, содержащих только замыкающие контакты.

2.25. Доказать, что минимальная контактная схема для функции $f = x \oplus y$ содержит четыре контакта.

Контактная схема называется *бесповторной*, если каждая переменная встречается в качестве пометки контакта один раз.

2.26. Доказать, что сильно связная бесповторная схема Σ:

1) реализует функцию, существенно зависящую от каждой переменной, встречающейся в схеме;

2) является минимальной.

2.27. Доказать, что для каждого натурального m существует минимальная схема сложности m.

2.28. Доказать, что если к минимальной схеме присоединить контакт, помеченный новой переменной, так, чтобы получилась сильно связная схема, то построенная схема также будет минимальной.

2.29. Пусть $L_k^+(f)$ — минимальное число контактов в схеме Σ_f, составленной из замыкающих контактов и реализующей монотонную функцию f, и $m(\widetilde{x}^3) = x_1x_2 \vee x_2x_3 \vee x_3x_1$.

1) Привести примеры двух схем сложности 5 из замыкающих контактов, обладающих неизоморфными сетями и реализующих $m(\widetilde{x}^3)$.

2) Доказать, что $L_k^+(m(\widetilde{x}^3)) \geqslant 5$.

3) Доказать, что во всякой схеме Σ из замыкающих контактов, реализующей $m(\widetilde{x}^3)$, найдутся переменные x_i, x_j такие, что для каждой из них в Σ присутствуют не менее чем по два контакта с пометками x_i, x_j.

4) Пусть $k_1 = x_2x_3$, $k_2 = x_4x_5$ и $f(\widetilde{x}^5) = m(x_1, k_1, k_2)$. Доказать, что $L_k^+(f(\widetilde{x}^5)) = 8$.

5) Доказать, что $L_k(f(\widetilde{x}^5)) \leqslant 7$.

Пусть двухсвязная двухполюсная контактная схема Σ является плоской (т. е. ее сеть $\Gamma(a, b)$ является плоской) и ее полюсы a и b лежат в одной грани. Проведем в этой грани ребро (a, b) так, чтобы сеть Γ', полученная из Γ добавлением ребра (a, b), осталась плоской. Выберем в каждой грани сети Γ' по одной вершине. Построим на выбранных вершинах граф G^*, двойственный к графу G сети Γ'. Каждое отличное от (a, b) ребро графа G^* пересекает некоторый контакт схемы Σ. Пометим это ребро той буквой, которой помечен пересекаемый им контакт. Вершины графа G^*, расположенные в гранях

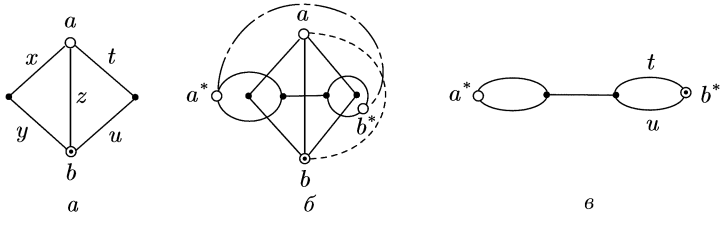


Рис. 10.10

сети Γ', разделенных ребром (a, b), обозначим через a^*, b^* и назовем *полюсами*. Удалим ребро (a^*, b^*) из G^*. В результате получится двухсвязная схема Σ^* с полюсами a^* и b^*. Схема Σ^* называется *схемой, двойственной к* Σ.

На рис. 10.10 проиллюстрирован процесс построения двойственной схемы.

2.30. Для схем, указанных на рис. 10.11, построить двойственные.

2.31*. Доказать, что контактная схема Σ^*, двойственная к Σ, реализует булеву функцию, двойственную к функции, реализуемой схемой Σ.

2.32. Доказать, что для всякой булевой функции f такой, что $l_k(f) \leqslant 7$, выполняются равенства

$$L_k(f) = L_k(f^*) = L_k(\overline{f}).$$

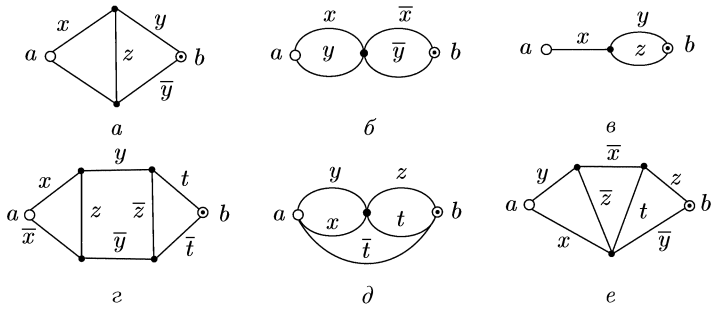


Рис. 10.11

2.33. Доказать, что для всякой булевой функции f выполняется равенство $L_\pi(f) = L_n(f^*)$.

2.34*. Пусть f — функция, реализуемая схемой, указанной на рис. 10.12. Доказать, что функция, двойственная к f, не может быть реализована бесповторной схемой.

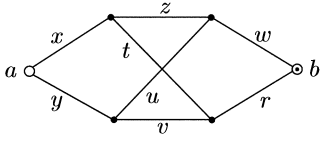


Рис. 10.12

2.35. Верно ли, что для всех булевых функций f выполняется равенство $L_k(f) = L_k(\overline{f})$?

2.36. Доказать, что для всякой формулы Φ в базисе $\{\vee, \&, -\}$ существует эквивалентная ей формула той же сложности, в которой отрицания стоят лишь над переменными.

2.37. Доказать, что для всякой булевой функции f выполняется равенство $L_\Phi(f) = L_n(f)$.

При получении нижних оценок сложности реализации различных классов функций схемами и формулами часто используются так называемые «мощностные соображения». Примером может служить следующее утверждение.

Пусть $S(n, m)$ — число схем из некоторого класса K, каждая из которых реализует булеву функцию, зависящую от переменных x_1, x_2, ..., x_n, и имеет сложность, не большую чем m. Пусть $\varphi(n)$ — число булевых функций $f(\widetilde{x}^n)$ в некотором множестве $\mathfrak{M}$. Тогда если $S(n, m) < \varphi(n)$, то в $\mathfrak{M}$ найдется функция $f(\widetilde{x}^n)$, не реализуемая в классе K схемой сложности, меньшей или равной m.

2.38. Показать, что число $S(n, m)$ связных попарно неизоморфных контактных X^n-схем, имеющих сложность не больше m, не превосходит $(cnm)^m$, где c — константа, не зависящая от n и m.

2.39. Показать, что число $P(n, m)$ связных попарно неизоморфных π-схем сложности не больше m, реализующих булевы функции переменных x_1, x_2, ..., x_n, не превосходит $(cn)^m$, где c — константа, не зависящая от n и m.

2.40. Показать, что число $\Phi(n, m)$ попарно различных формул сложности не большей m над множеством связок $\{\vee, \&, -\}$ и множеством переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ не превосходит $(cn)^m$, где c — константа, не зависящая от n и m.

СФЭ называется *неприводимой*, если каждая ее вершина принадлежит некоторой ориентированной цепи, соединяющей один из входов с выходом схемы.

2.41. 1) Показать, что для каждой булевой функции f существует неприводимая схема, реализующая f.

2) Пусть $N(n, m)$ — число неприводимых СФЭ в стандартном базисе, реализующих функции переменных $x_1, \ldots, x_n$ и имеющих сложность, не превышающую m. Доказать, что

$$N(n, m) \leqslant (c(n + m))^{n+m},$$

где c — константа, не зависящая от n и m.

2.42. 1) Доказать, что для всякого $\varepsilon > 0$ и достаточно больших n существует булева функция $f(\widetilde{x}^n)$ такая, что

$$L(f) \geqslant \frac{2^n}{n}(1 - \varepsilon).$$

2) Доказать, что доля δ_ε тех функций $f(\widetilde{x}^n)$, для которых неравенство из п. 1) не выполняется, стремится к нулю при $n \to \infty$.

2.43. Доказать, что для всякого $\varepsilon > 0$ и достаточно больших n существует самодвойственная функция $f(\widetilde{x}^n)$, для которой:

1) $L_k(f) \geqslant \dfrac{2^{n-1}}{n}(1 - \varepsilon)$; 2) $L_\pi(f) \geqslant \dfrac{2^{n-1}}{\log_2 n}(1 - \varepsilon)$.

2.44. Доказать, что для всякого $\varepsilon > 0$ и достаточно больших n существует функция $f(\widetilde{x}^n)$, являющаяся суперпозицией функции $\varphi(x, y, z) = xy \vee z$ и такая, что

$$L_\Phi(f) \geqslant C_{n-1}^{[(n-1)/2]}(\log_2 n)^{-1}(1 - \varepsilon).$$

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ

Глава I

§ 1

1.1. 3) 205. 5) $2^{m+1}+1$. 7) $2^{3m+1}+2^{2m+1}-2^{m+1}+1$.

1.2. 2) (11100111). 4) Если $m \geqslant 4$, то $n = 2^{m-1}+2^{m-2}-1$, набор имеет вид $(10\underbrace{1\ \ldots\ 11}_{m-2\text{ раз}})$; при $m=2$ имеем (10), а при $m=3$ имеем (101).

1.3. 1) $(00110) \preccurlyeq (00111)$, $(00110) \preccurlyeq (10110)$, $(01010) \preccurlyeq (01011) \preccurlyeq (11011)$, $(01010) \preccurlyeq (11010) \preccurlyeq (11011)$. Шесть пар соседних наборов, противоположных наборов нет.

4) Если $m=2$ и $n=4$, то $A = \{(1011)$, (1101), (1001), (0111), (0100), $(0110)\}$. Четыре пары соседних наборов и две пары противоположных. Если $m=2$ и $n=5$, то $A = \{(10111)$, (11101), (10011), (01111), (01001), $(01110)\}$. Две пары соседних наборов, противоположных наборов нет. Если $m=2$ и $n \geqslant 6$, то $A = \{(10\underbrace{1\ \ldots\ 1}_{n-2})$, $(\underbrace{1\ \ldots\ 1}_{n-2}01)$, $(100\underbrace{1\ \ldots\ 1}_{n-3})$, $(0\underbrace{1\ \ldots\ 1}_{n-1})$, $(0100\underbrace{1\ \ldots\ 1}_{n-4})$, $(0\underbrace{1\ \ldots\ 1}_{n-2}0)\}$. Две пары соседних наборов, противоположных наборов нет. Если $m \geqslant 3$ и $n = m+2$, то $A = \{(1\underbrace{0\ \ldots\ 0}_{m-1}11)$, $(1\underbrace{0\ \ldots\ 0}_{m-2}101)$, $(1\underbrace{0\ \ldots\ 0}_{m}11)$, $(01\underbrace{0\ \ldots\ 0}_{m-2}11)$, $(01\underbrace{0\ \ldots\ 0}_{m})$, $(011\underbrace{0\ \ldots\ 0}_{m-1})\}$. Соседних наборов — три пары, противоположные наборы будут только при $m=3$ (одна пара). Если $m \geqslant 3$ и $n > m+2$, то имеем $(1\underbrace{0\ldots0}_{m}\underbrace{1\ \ldots\ 1}_{n-m-1}) \preccurlyeq (1\underbrace{0\ \ldots\ 0}_{m-1}\underbrace{1\ \ldots\ 1}_{n-m})$, и в тех случаях, когда $n-m=3$ или $n-m=4$, $(01\underbrace{0\ldots0}_{m}\underbrace{1\ \ldots\ 1}_{n-m-2}) \preccurlyeq (0\underbrace{1\ \ldots\ 1}_{n-m-1}\underbrace{0\ldots0}_{m-2}11)$. Соседние наборы $(1\underbrace{0\ldots0}_{m}\underbrace{1\ \ldots\ 1}_{n-m-1})$ и $(1\underbrace{0\ \ldots\ 0}_{m-1}\underbrace{1\ \ldots\ 1}_{n-m})$, противоположные $(1\underbrace{0\ \ldots\ 0}_{m-1}\underbrace{1\ \ldots\ 1}_{n-m})$ и $(0\underbrace{1\ \ldots\ 1}_{m-n}\underbrace{0\ \ldots\ 0}_{m-1})$ при $n=2m-1$ $(m \geqslant 4)$, $(1\underbrace{0\ \ldots\ 0}_{m}\underbrace{1\ \ldots\ 1}_{n-m-1})$ и $(0\underbrace{1\ \ldots\ 1}_{n-m}\underbrace{0\ \ldots\ 0}_{m-1})$ при $n=2m$ $(m \geqslant 3)$.

1.4. 1) $\binom{n}{k}$.

2) 2^{n-1}. Если $\widetilde{\alpha}^n = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ и $\nu(\widetilde{\alpha}^n) \geqslant 2^{n-1}$, то $\alpha_1 = 1$.

3) $n \cdot 2^n$. Число наборов соседних с $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ равно n.

4) $\binom{n}{k} 2^n$. Любой набор $\widetilde{\beta}^n$, отстоящий от фиксированного набора $\widetilde{\alpha}^n$ на расстоянии k, получается из $\widetilde{\alpha}^n$ подходящей заменой некоторых k компонент на противоположные.

5) 2^k.

6) $2^n - 2^l$. Если $\widetilde{\beta}^n$ и $\widetilde{\gamma}^n$ отличаются в компонентах с номерами $i_1, \ldots, i_l$, то число различных наборов $\widetilde{\alpha}^n$, удовлетворяющих условию, равно числу 2^n минус число всех подмножеств множества $\{i_1, \ldots, i_l\}$.

7) 2^m. Справедливы соотношения $0 \leqslant \alpha_{2j+1} \leqslant 1$ и $\alpha_{2j+1} + \alpha_{2j+2} = 1$ $(j = 0, 1, \ldots, m-1)$.

8) $\binom{n - r(k-1)}{k}$. Искомое число равно числу наборов длины $n - r(k-1)$, имеющих вес k.

1.5. 3) Рассмотреть множество $B^n_{[n/2]}$.

4) В таком подмножестве есть наборы одинакового веса.

5) Набор $\widetilde{\beta}^n$ не сравним с набором $\widetilde{\alpha}^n$ тогда и только тогда, когда $\beta_j = 0$ для некоторого $j \in \{i_1, \ldots, i_k\}$ и $\beta_l = 1$ для какого-либо $l \notin \{i_1, \ldots, i_k\}$, где $i_1, \ldots, i_k$ — номера всех единичных компонент набора $\widetilde{\alpha}^n$.

6) Найти число наборов $\widetilde{\gamma}^n$, не сравнимых с наборов $\widetilde{\alpha}^n$, но сравнимых с набором $\widetilde{\beta}^n$. Затем вычесть полученное число из общего числа наборов $\widetilde{\gamma}^n$, не сравнимых с $\widetilde{\alpha}^n$.

1.6. 1) $2^{2^n - l}$. 2) $2^{2^n - \binom{n}{[n/2]}}$. 3) $2^{2^{n-1}}$. 4) 2.

5) $2^{2^n - 1} + \dfrac{1}{2}\binom{2^n}{2^{n-1}}$. 6) $2^{3 \cdot 2^n - 2}$. 7) 2^{n+1}. 8) $\displaystyle\sum_{i=0}^{n} 2^{\binom{n}{i}} - n$.

1.7. 1) $N_f = \{(001), (100), (101), (110), (111)\}$.

4) $N_f = \{(0001), (0011), (0101), (0110), (0111), (1000), (1001), (1010), (1011), (1110)\}$.

5) $f_{H_1}(\widetilde{x}^5) = \overline{x}_1\overline{x}_2(\overline{x}_2 \vee \overline{x}_4 \vee \overline{x}_5) \vee \overline{x}_1\overline{x}_3(\overline{x}_4 \vee \overline{x}_5) \vee \overline{x}_2\overline{x}_3(\overline{x}_4 \vee \overline{x}_5) \vee \overline{x}_4\overline{x}_5(x_1 \vee \overline{x}_2 \vee \overline{x}_3) \vee x_1x_2\overline{x}_4$.

Ситуация, когда будут приняты обе гипотезы, возможна (это соответствует наборам (01100), (10001) и (11001)).

6) Полагая, что $x_i = 1$ тогда и только тогда, когда B_i участвует в заседании комиссии $(i = 1, 2, 3, 4)$, запишем условия а), б) и в) с помощью булевой функции $f(\widetilde{x}^4)$. Имеем $f(\widetilde{x}^4) = \overline{x}_1\overline{x}_2x_3 \vee x_2\overline{x}_3x_4 \vee x_1x_4$. Если B_2 в заседании не участвует (т. е. если $x_2 = 0$), то обязан ли быть на заседании B_3, т. е. будет ли функция $f(x_1, 0, x_3, x_4)$ обращаться в 1 на каком-нибудь наборе вида $(\alpha_1, 0, 0, \alpha_4)$? Так как $f(x_1, 0, x_3, x_4) = \overline{x}_1x_3 \vee x_1x_4$, то $f(x_1, 0, 0, x_4) = x_1x_4$ и, значит, $f(1, 0, 0, 1) = 1$. Следовательно, B_3 также может не участвовать в заседании.

7) При условиях, указанных в задаче, проект может быть не принят.

1.8. 1)–9), 11), 12) Не является. Добавляя скобки, можно превратить в формулы выражения 1), 2), 4), 8), 11) и 12).

1.9. 1)–5), 8)–10) Не является. Добавляя скобки, запятые и переменные в формулы можно превратить только выражения 4) и 5).

1.10. 1) x, y, y, x, z, $(x \sim y)$, $(\neg y)$, $(x \vee z)$, $((\neg y) \to (x \vee z))$, A.
Указание. См. замечание, следующее за определением 2 (в п. 1).
4) $h^{(2)}(1, x)$, 1, $g^{(1)}(x)$, $g^{(1)}(1)$, $\varphi^{(3)}(1, y, g^{(1)}(1))$, $f^{(3)}(h^{(2)}(1, x), \varphi^{(3)}(1, y, g^{(1)}(1)), g^{(1)}(x))$, A.
5) $g^{(1)}(x \to y)$, $h^{(1)}(x \,\&\, y)$, A.

1.11. 1) Пятью способами. 3) Семью способами. 5) Тремя способами. 6) Девятью способами.

1.12. 3) Индуктивный шаг. Для обозначения произвольной двуместной связки из $\mathfrak{S}$ используем символы $\circ$ и $*$. Пусть утверждение верно для формул, сложность которых не превосходит l (где $l \geqslant 1$), и рассмотрим формулу $\mathfrak{A}$, имеющую сложность, равную $l+1$. Тогда либо $\mathfrak{A} = (\neg \mathfrak{B})$, либо $\mathfrak{A} = (\mathfrak{B} \circ \mathfrak{C})$, где $\circ \in \mathfrak{S}\backslash\{\neg\}$ и сложности подформул $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{C}$ меньше l. Если $\mathfrak{A} = (\neg \mathfrak{B})$, то $\mathfrak{B}$ имеет сложность $l \geqslant 1$ и, значит, $\mathfrak{B} = (\neg \mathfrak{B}_1)$ или $\mathfrak{B} = (\mathfrak{B}_2 * \mathfrak{B}_3)$, где $* = \mathfrak{S}\backslash\{\neg\}$, поэтому $\mathfrak{A} = (\neg(\neg \mathfrak{B}_1))$ или $\mathfrak{A} = (\neg \mathfrak{B}_2 * \mathfrak{B}_3))$. По индуктивному предположению в подформулах $(\neg \mathfrak{B}_1)$ и $(\mathfrak{B}_2 * \mathfrak{B}_3)$ двух связок, стоящих рядом, быть не должно. Значит, таких связок нет и в формулах $(\neg(\neg \mathfrak{B}_1))$ и $\neg(\mathfrak{B}_2 * \mathfrak{B}_3))$ (две «внешние» связки $\neg$ в формуле $(\neg(\neg \mathfrak{B}_1))$ разделены скобкой). Если $\mathfrak{A} = (\mathfrak{B} \circ \mathfrak{C})$, то возможны случаи: а) $\mathfrak{B} = x$, $\mathfrak{C} = (\neg \mathfrak{C}_1)$; б) $\mathfrak{B} = x$, $\mathfrak{C} = (\mathfrak{C}_2 * \mathfrak{C}_3)$; в) $\mathfrak{B} = (\neg \mathfrak{B}_1)$, $\mathfrak{C} = x$; г) $\mathfrak{B} = (\neg \mathfrak{B}_1)$, $\mathfrak{C} = (\neg \mathfrak{C}_1)$; д) $(\neg \mathfrak{B}_1)$, $\mathfrak{C} = (\mathfrak{C}_2 * \mathfrak{C}_3)$; е) $\mathfrak{B} = (\mathfrak{B}_2 * \mathfrak{B}_3)$, $\mathfrak{C} = x$; ж) $\mathfrak{B} = (\mathfrak{B}_2 * \mathfrak{B}_3)$, $\mathfrak{C} = (\neg \mathfrak{C}_1)$; з) $\mathfrak{B} = (\mathfrak{B}_2 *_1 \mathfrak{B}_3)$, $\mathfrak{C} = (\mathfrak{C}_2 *_2 \mathfrak{C}_3)$. Здесь x обозначает произвольную переменную и $*$, $*_1$, $*_2$ принадлежат $\mathfrak{S}\backslash\{\neg\}$. Сложности подформул $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{C}$ не превосходят l. Следовательно, в силу индуктивного предположения связок, стоящих рядом, в них нет. Остается показать, что «внешняя» связка $\circ$ формулы $\mathfrak{A} = (\mathfrak{B} \circ \mathfrak{C})$, соединяющая подформулы $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{C}$, также не стоит рядом ни с какой другой связкой. Но это вытекает из того факта, что его подформула $\mathfrak{B}$ (соответственно $\mathfrak{C}$) отлична от переменной, то между любой связкой, содержащейся в подформуле $\mathfrak{B}$ (или $\mathfrak{C}$), и «внешней» связкой $\circ$ находится хотя бы одна скобка.

1.13. 1) Доказательство можно провести индукцией по сложности формулы. Через $\mathrm{ind}\,(\omega, \mathfrak{A})$ обозначим индекс связки ω в формуле $\mathfrak{A}$.

Индуктивный шаг. Пусть утверждение справедливо для формул, имеющих сложность, не превосходящую l $(l \geqslant 1)$. Рассмотрим формулу $\mathfrak{A}$ со сложностью, равной $l+1$. Возможны случаи: а) $\mathfrak{A} = (\neg \mathfrak{B})$; б) $\mathfrak{A} = (\mathfrak{B} \circ \mathfrak{C})$. Разберем случай б). Каждая связка ω из подформулы $\mathfrak{B}$ (если $\mathfrak{B}$ отлична от переменной) имеет в формуле $\mathfrak{A}$ индекс, на единицу больший индекса той же связки в формуле $\mathfrak{B}$, т. е. $\mathrm{ind}\,(\omega, \mathfrak{A}) = 1 + \mathrm{ind}\,(\omega, \mathfrak{B})$, а значит, $\mathrm{ind}\,(\omega, \mathfrak{A}) \geqslant 2$. Далее, так как число левых скобок в любой формуле равно числу правых скобок в ней (см. задачу 1.12, 2)), то «внешняя связка» $\circ$ в формуле $\mathfrak{A}$ имеет индекс 1, а для всякой связки ω из подформулы $\mathfrak{C}$ (если $\mathfrak{C}$ не является переменной) выполняется неравенство $\mathrm{ind}\,(\omega, \mathfrak{A}) > \mathrm{ind}\,(\circ, \mathfrak{A})$, так как подформула $\mathfrak{C}$ начинается с левой скобки.

1.15. 2) См. рис. О.1.1. 4) См. рис. О.1.2. 5) См. рис. О.1.3.
7) См. рис. О.1.4.

1.16. 1) $(((0 \oplus (x \oplus (y \vee x))) \vee x) \,\&\, (y \oplus ((\neg x) \to 1)))$.
3) $f^{(3)}(g^{(3)}(1, h^{(2)}(x, y), \varphi^{(1)}(x)), 2, h^{(2)}(x, \varphi^{(1)}(h^{(2)}(x, \varphi^{(1)}(h^{(2)}(2, x)))))$.
6) $f^{(3)}(((\neg x) \oplus 1), h^{(2)}((\neg x), 1), (\neg\, g^{(2)}(1, f^{(3)}((x \,\&\, y), 1, h^{(2)}(x, x)))))$.

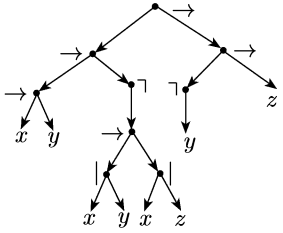


Рис. О.1.1

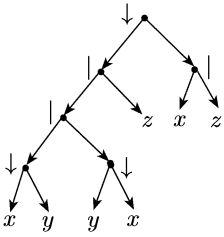


Рис. О.1.2

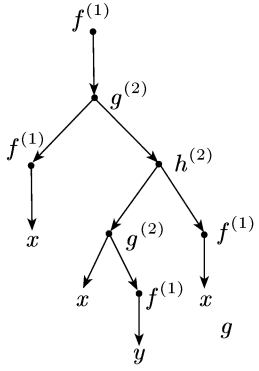


Рис. О.1.3

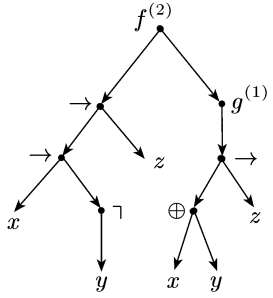


Рис. О.1.4

1.17. 2) Вектор значений функций имеет вид (11111110).
3) Вектор значений функций таков: (10000100).
6) Вектор значений функции выглядит так: (01111111).

1.18. 2) $\widetilde{\alpha}_h = (0101)$. 4) $\widetilde{\alpha}_h = (10010011)$. 6) $\widetilde{\alpha}_h = (1100011011000101)$.

1.19. 2), 6), 9), 10) Эквивалентны. 3), 7) Не эквивалентны.

1.21. 4) $\mathfrak{A} = (\overline{\overline{x} \vee \overline{y} \vee (x \sim z)}) \cdot (x \sim (\overline{y} \vee z \vee \overline{x} \vee y)) = (x \vee y \vee xz \vee \overline{x}\,\overline{z})$ &
& $(x \sim 1) = (x \vee y \vee \overline{z}) \cdot x = x$; $\mathfrak{B} = \overline{\overline{x} \vee \overline{y} \vee z} \vee x = xy\overline{z} \vee x = x$.

9) $\mathfrak{A} = \overline{(x \vee \overline{y}\,\overline{z}} \vee \overline{\overline{x} \vee \overline{y}z}) \cdot (\overline{x} \vee (y \sim z)) = (\overline{x}(y \vee z) \vee \overline{x}(y \vee \overline{z})) \cdot (\overline{x} \vee yz \vee$
$\vee\, \overline{y}\,\overline{z}) = (\overline{x}y \vee \overline{x}z \vee \overline{x}\,\overline{z}) \cdot (\overline{x} \vee yz \vee \overline{y}\,\overline{z}) = \overline{x} \cdot (\overline{x} \vee yz \vee \overline{y}\,\overline{z}) = \overline{x}$;
$\mathfrak{B} = ((\overline{x} \vee y) \sim (\overline{y} \vee \overline{x} \vee z)) \oplus xyz = ((\overline{x}y \oplus \overline{x} \oplus y) \oplus xy\overline{z}) \oplus xyz =$
$= xy \oplus y \oplus \overline{x} \oplus y \oplus xy = \overline{x}$.

1.22. 1) При решении задач такого типа (связанных с полным или частичным перебором элементов некоторого множества) бывает удобно (и даже необходимо) упорядочить и просматривать элементы данного множества по возрастанию (или убыванию) какого-либо подходящего параметра. Перебор можно уменьшить путем выявления дополнительных свойств исследуемых элементов. В нашей задаче перебор можно вести по сложности суперпозиций (формул) над заданным множеством P. Под сложностью суперпозиции можно понимать, например, число связок в ней или число «шагов» в ее построении. Булевы функции, зависящие от переменных из множества $\{x, y\}$ и являющиеся суперпозициями над множеством $\{u_1 \to u_2,\ u_1 \cdot u_2\}$, исчер-

пываются функциями: $f_1(x) \equiv 1$, $f_2(x) \equiv x$, $f_3(y) \equiv 1$, $f_4(y) \equiv y$, $x \to y$, $y \to x$, $x \cdot y$, $f_8(x, y) \equiv 1$, $f_9(x, y) \equiv x$, $f_{10}(x, y) \equiv y$, $x \vee y$, $x \sim y$.

2) Функции такие же, как в задаче 1).

3) Все функции, кроме одной, порождаются за «два шага». Всего 16 функций. «Три шага» требуются для построения функции $f(x, y) \equiv 1$.

4) Все функции (их восемь) порождаются за «два шага».

5) Все функции (их 12) строятся за «два шага».

6) $f_1(x) \equiv x$, $f_2(y) \equiv y$, $f_3(x, y) \equiv x$, $f_4(x, y) \equiv y$, $f_5(x, y) = x \cdot y$, $f_6(x, y) = x \vee y$. «Два шага» нужно только для порождения функции $f_6(x, y)$.

7) $f_1(x) \equiv x$, $f_2(y) \equiv y$, $f_3(x, y) \equiv x$, $f_4(x, y) \equiv y$, $f_5(x, y) = x \cdot y$. Все функции порождаются за «один шаг».

1.23. 1) Глубина формулы $\mathfrak{A}$ равна 3, но формула $(x \to x) \oplus (x \oplus y)$ реализует ту же функцию и имеет глубину 2.

2) Рассмотреть формулу $(x \vee y) \sim (x \sim y)$.

3) Рассмотреть формулу $(x \mid x) \mid (y \mid y)$.

4), 5), 7), 8), 10) Глубина минимально возможная.

6) Рассмотреть формулу $x \sim (x \to y)$.

9) Глубина формулы равна 2.

1.24. 1) Предполагая, что $f(0, 0) = 0$ и беря $x = y = x = 0$, имеем $f(f(0, f(0, 0)), f(f(0, 0), f(0, 0))) = f(f(0, 0), f(0, 0)) = f(0, 0) = 0$. Это противоречит условию задачи. Значит, $f(0, 0) = 1$. Полагая затем, что $f(0, 1) = 0$, и беря $x = y = z = 0$, получаем

$$f(f(0, f(0, 0), f(f(0, 0), f(0, 0))) = f(f(0, 1), f(1, 1)) = f(0, f(1, 1)).$$

Отсюда, принимая во внимание условие задачи, выводим, что $f(1, 1)$ должно быть равно 0. Но взяв $x = 0$ и $y = z = 1$, имеем

$$f(f(0, f(1, 1)), f(f(0, 1), f(0, 1))) = f(f(0, 0), f(0, 0)) = f(1, 1) = 0.$$

Это противоречит условию задачи. Следовательно, $f(0, 1) = 1$. Аналогично доказывается, что и $f(1, 1) = 1$. Значит, $f(x, y) = x \to y$ или $f(x, y) \equiv 1$. Далее соотношения а)–д) проверяются непосредственно (например, с использованием основных эквивалентностей).

2) Не вытекают. Достаточно рассмотреть функцию $f(x, y) = x \sim y$.

1.25. 4) $f^* = \overline{(\overline{\overline{x}} \to \overline{\overline{y}})} \to (\overline{y} \to \overline{x}) = \overline{\overline{x \vee y} \vee (y \vee \overline{x})} = \overline{1} = 0$; $g = (\overline{x} \vee y)$ & & $(y \vee \overline{x}) = x \to y \not\equiv 0$. Значит, g не двойственна к f.

6) Не является. 8), 9), 11) Является.

1.26. 2) Пусть формулы $\mathfrak{A}$ и $\mathfrak{B}$ (над множеством S) эквивалентны. Тогда в силу определения эквивалентности формул реализуемые ими функции равны, т. е. $f_{\mathfrak{A}} = f_{\mathfrak{B}}$. Значит, $f^*_{\mathfrak{A}} = f^*_{\mathfrak{B}}$. Применяя утверждение 1) данной задачи, имеем $f^*_{\mathfrak{A}} = f_{\mathfrak{A}^*}$ и $f^*_{\mathfrak{B}} = f_{\mathfrak{B}^*}$. Следовательно, $f_{\mathfrak{A}^*} = f_{\mathfrak{B}^*}$, т. е. $\mathfrak{A}^*$ и $\mathfrak{B}^*$ — эквивалентные формулы.

1.27. 1) $f^* = (x \cdot 1 \vee y \cdot (z \vee 0) \vee \overline{x} \cdot \overline{y} \cdot \overline{z})^* =$

$$= (x \vee 0) \cdot (y \vee z \cdot (\overline{x} \vee \overline{y} \vee \overline{z}) = x \cdot ((y \vee z) \cdot (\overline{y} \vee \overline{z})) = x \cdot (y \oplus z).$$

2) $f^* = \overline{x}y \vee x\overline{y} \vee \overline{y}z$. 5) $f^* = (x \oplus y) \cdot z$. 10) $f^* = (x \vee (z \oplus t)) \cdot \overline{y}$.

1.28. 1) Две фиктивные переменные. 3) Одна фиктивная переменная. 5) Фиктивные переменные x_1 и x_3.

1.29. 4) $f \equiv 1$. 8) $f \equiv 1$. 9) $f \equiv 0$. 10) $f \equiv 1$.

1.30. 1) Существенных переменных нет. 3) Только x_2.
9) Переменные x_1 и x_2. 10) Переменные x_2, x_3 и x_4.

1.31. 2) Достаточно рассмотреть функцию $x_1 \oplus x_2$.
3) Возможно m фиксированных переменных.

1.33. 1) У функции нечетное число значений, равных 1. Значит, все ее переменные существенные.
2) Все переменные существенные (так как, например, $\alpha_0 \neq \alpha_1$, $\alpha_0 \neq \alpha_2$, $\alpha_3 \neq \alpha_{11}$ и $\alpha_3 \neq \alpha_7$).
5) Две существенные переменные — x_2 и x_3 ($\alpha_i = \alpha_{i+1}$ $(i = 0, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14)$; $\alpha_j = \alpha_{8+j}$ $(j = 0, 1, \ldots, 7)$; $\alpha_0 \neq \alpha_2$ и $\alpha_0 \neq \alpha_4$).
9) Три существенные переменные — x_1, x_2 и x_4 ($\alpha_i = \alpha_{i+4}$ $(i = 0, 1, 2, 3, 8, 9, 10, 11)$).

1.34. 1) При $n \geqslant 3$. 2) При $n \neq 3$. 3) При $n = 2m + 1$ $(m \geqslant 1)$.
4)–6) При $n \geqslant 3$.

1.37. Имеем $N_{f\oplus g} = (N_f \backslash (N_f \cap N_g)) \cup (N_g \backslash (N_f \cap N_g))$. Значит,

$$|N_{f\oplus g}| = |N_f| + |N_g| - 2|N_f \cap N_g|.$$

Так как $|N_{f\oplus g}|$ — нечетное число (см. условие задачи), то одно из чисел $|N_f|$ и $|N_g|$ нечетное. Например, число $|N_f|$. Тогда функция f обращается в единицу на нечетном числе наборов, и в силу задачи 1.31, 1) каждая переменная у f существенная.

1.38. 1) x_1x_2, $x_1 \vee x_2$, $x_1 \to x_2$, $x_2 \to x_1$, $\overline{x_1 \to x_2}$, $\overline{x_2 \to x_1}$, $x_1 \oplus x_2$, $x_1 \sim x_2$, $x_1 \mid x_2$, $x_1 \downarrow x_2$.
2) $|P^c(X^3)| = 218$.

1.39. 1), 2), 5), 7)–10) Можно. 3), 4), 6) Нельзя.

1.40. 2) Достаточно рассмотреть одну из функций — $m(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 \vee x_1x_3 \vee x_2x_3$ или $x_1 \oplus x_2 \oplus x_3$.

1.41. Если при отождествлении некоторой пары переменных x_j и x_k $(1 \leqslant j < k \leqslant n)$ получается функция, тождественно равная 0, то $f(\widetilde{x}^n)$ должна обращаться в 0 на всяком наборе вида $(\alpha_1, \ldots, \alpha_{j-1}, \alpha, \alpha_{j+1}, \ldots, \alpha_{k-1}, \alpha, \alpha_{k+1}, \ldots, \alpha_n)$. Но число таких наборов 2^{n-1}. Значит, выполнялось бы неравенство $|N_f| \leqslant 2^n - 2^{n-1} = 2^{n-1}$, что противоречит условию задачи.

1.42. 2) Тот факт, что $\oplus$ нельзя заменить на $\&$ и $\vee$, обосновывается, например, с использованием функций $f(\widetilde{x}^n) = x_3 \ldots x_n$ $(n \geqslant 3)$.

1.46. Наборы $\widetilde{\beta}_j$ и $\widetilde{\beta}_{j+1}$ соседние при всяком $j = 0, 1, \ldots, k-1$. Пусть i_j — номер той компоненты, в которой наборы $\widetilde{\beta}_j$ и $\widetilde{\beta}_{j+1}$ отличаются друг от друга. Если $f(\widetilde{\beta}_j) \neq f(\widetilde{\beta}_{j+1})$, то x_{i_j} — существенная переменная функции $f(\widetilde{x}^n)$. Докажем, что числа $i_0, i_1, \ldots, i_{k-1}$ (номера соответствующих компонент) все разные. Предположим противное, т. е. что для некоторых p и q $(0 \leqslant p < q \leqslant k-1)$ выполняется равенство $i_p = i_q$. Тогда имеем $\rho(\widetilde{\beta}_p, \widetilde{\beta}_q) = \rho(\widetilde{\beta}_{p+1}, \widetilde{\beta}_q) - 1$. Используя это соотношение и «свойство треугольника» для расстояния Хэмминга, получаем

$$k = \rho(\widetilde{\beta}_0, \widetilde{\beta}_k) \leqslant \rho(\widetilde{\beta}_0, \widetilde{\beta}_p) + \rho(\widetilde{\beta}_p, \widetilde{\beta}_q) + \rho(\widetilde{\beta}_q, \widetilde{\beta}_k) \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{l=0}^{p-1} \rho(\widetilde{\beta}_l, \widetilde{\beta}_{l+1}) + \rho(\widetilde{\beta}_{p+1}, \widetilde{\beta}_q) - 1 + \sum_{l=q}^{k-1} \rho(\widetilde{\beta}_l, \widetilde{\beta}_{l-1}) \leqslant$$

$$\leqslant p + \sum_{l=p+1}^{q-1} \rho(\widetilde{\beta}_l, \widetilde{\beta}_{l+1}) - 1 + k - q = p + (q - p - 1) - 1 + k - q = k - 2.$$

Это противоречие показывает, что наше предположение ложно. Следовательно, все номера i_0, i_1, ..., i_{k-1} разные, а поэтому число существенных переменных у функции $f(\widetilde{x}^n)$ не меньше числа перемен ее значений на рассматриваемой цепи, т. е. не меньше m.

§ 2

2.1. 3) (10001000). 4) (01110111). 7) (1111111111001100).
10) (1111111100000000).

2.2. 1) $f(\widetilde{x}^3) = \overline{x}_1(x_2 \to x_3) \vee x_1\overline{x}_2$; $f_0^3(\overline{x}^3) = \overline{x}_2 = (11001100)$.
3) $f(\widetilde{x}^3) = (01111000)$; $f_0^2(\widetilde{x}^3) = (01011010)$.
7) $f(\widetilde{x}^4) = \overline{x}_1(x_2x_3 \oplus x_4) \vee x_1f_1^1(\widetilde{x}^4)$; $f_0^3(\widetilde{x}^4) = (0101010110011001)$.

2.3. 2) $x_1\overline{x}_2\overline{x}_3 \vee x_1\overline{x}_2x_3 \vee x_1x_2x_3$.
4) $\overline{x}_1x_2x_3 \vee \overline{x}_1x_2\overline{x}_3 \vee \overline{x}_1x_2x_3 \vee x_1\overline{x}_2\overline{x}_3$.
7) $\overline{x}_1x_2\overline{x}_3\overline{x}_4 \vee \overline{x}_1x_2\overline{x}_3x_4 \vee x_1\overline{x}_2\overline{x}_3\overline{x}_4 \vee x_1\overline{x}_2\overline{x}_3x_4 \vee x_1\overline{x}_2x_3x_4$.

2.4. 1) $(x_1 \vee x_2)(\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2)$. 2) $(x_1 \vee \overline{x}_2)(\overline{x}_1 \vee x_2)(\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2)$.
6) $(x_1 \vee x_2 \vee x_3)(x_1 \vee x_2 \vee \overline{x}_3)(x_1 \vee \overline{x}_2 \vee \overline{x}_3)(\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \vee \overline{x}_3)$.
8) $(\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \vee x_3 \vee x_4)(\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \vee x_3 \vee \overline{x}_4)(\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \vee \overline{x}_3 \vee x_4)$.

2.5. 2) $f_0^3(x_1, x_2) = x_1 \mid x_2 = \overline{x}_1\overline{x}_2 \vee \overline{x}_1x_2 \vee x_1\overline{x}_2$.
5) $f_1^3(x_1, x_2) = (1101) = \overline{x}_1 \vee x_2$;
7) $f_1^2(x_1, x_3, x_4) = x_1 \to \overline{x_3 \to x_4} =$

$$= (\overline{x}_1 \vee x_3 \vee x_4)(\overline{x}_1 \vee x_3 \vee \overline{\overline{x}_4})(\overline{x}_1 \vee \overline{x}_3 \vee \overline{x}_4).$$

9) $f_{01}^{2,4}(x_1, x_3) = x_1 \sim x_3 = \overline{x}_1\overline{x}_3 \vee x_1x_3$.

2.6. 2) Пусть $g(x_1, x_2, \ldots, x_n) = f(x_1^{\sigma_1}, x_2^{\sigma_2}, \ldots, x_n^{\sigma_n})$, где $x_1^{\sigma_i} = \overline{x}_i$ при $\sigma_i = 0$ и $x_i^{\sigma_i} = x_i$ при $\sigma_i = 1$. Подходящее взаимно однозначное соответствие между подфункциями функций g и f задается так: подфункции $g_{\tau_{k_1}\ldots\tau_{k_m}}^{k_1,\ldots,k_m}(\widetilde{x}^n)$ сопоставляется подфункция $f_{\omega_{k_1}\ldots\omega_{k_m}}^{k_1,\ldots,k_m}(\widetilde{x}^n)$, где $\omega_{k_j} = \tau_{k_j}^{\sigma_{k_j}}$ $(0 \leqslant m \leqslant n;\ f = 1, \ldots, m)$.
4) Вытекает из 2) и 3).

2.7. 1) $f(\widetilde{x}^n) = x_1 \vee x_2 \vee \ldots \vee x_n$. Число разных подфункций равно $2^n + 1$.
2), 3) Разных подфункций $2^{n+1} - 1$.
4) При $n = 2$ число разных подфункций равно 5, а при $n \geqslant 3$ их число $3 \cdot 2^{n-1}$.
5) $3 \cdot 2^{n-1} + 1$. 6) $2^n + 1$.
7) При $n = 3$ число разных подфункций 9, а при $n \geqslant 4$ их $3 \cdot 2^{2n-2} + 5$.
8) $2^n + 7$ при $n \geqslant 4$; 12 при $n = 3$.

2.8. При $n = 2$, используя прямой перебор, легко находим, что таких функций 8. (Это $f_0(x_1, x_2) \equiv 0$, $f_1(x_1, x_2) \equiv 1$, $x_1 \oplus x_2$, $x_1 \sim x_2$, $\overline{x_1 \to x_2}$, $x_1 \to x_2$, $x_2 \to x_1$ и $\overline{x_2 \to x_1}$.) При $n \geqslant 3$ сначала следует доказать, что функция $f(\widetilde{x}^n)$ обладает таким свойством: если веса наборов $\widetilde{\alpha}^n$ и $\widetilde{\beta}^n$ либо одновременно четные, либо одновременно нечетные, то $f(\widetilde{\alpha}^n) = f(\widetilde{\beta}^n)$. Значит, при $n \geqslant 3$ функция $f(\widetilde{x}^n)$ однозначно определяется значениями на

наборах $\widetilde{0}^n$ и $(1, \underbrace{0, \ldots, 0}_{n-1 \text{ раз}})$. Следовательно, таких функций 4 (это $f_0(\widetilde{x}^n) \equiv 0$, $f_1(\widetilde{x}^n) \equiv 1$, $f_2(\widetilde{x}^n) = x_1 \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_n$ и $f_3(\widetilde{x}^n) = x_1 \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_n \oplus 1$).

2.10. 4) $f(\widetilde{x}^3) = \overline{\overline{x_1 \vee x_2 x_3} \cdot \overline{\overline{x_1 x_2} \vee x_3}} = (x_1 \vee x_2 x_3) \vee (\overline{\overline{x_1 x_2}} \vee x_3) =$
$= x_1 \vee x_2 x_3 \vee x_1 \vee \overline{x}_2 \vee x_3 = x_1 \vee \overline{x}_2 \vee x_3.$

10) $f(\widetilde{x}^4) = \overline{x_1 \vee x_2}(\overline{x_2 x_3} \vee x_1 \overline{x}_4) x_1 \vee \overline{x_3 x_4} =$
$= \overline{x}_1 \overline{x}_2 (\overline{x}_2 \vee \overline{x}_3 \vee x_1 \overline{x}_4) \overline{x}_1 x_3 x_4 = \overline{x}_1 \overline{x}_2 x_3 x_4.$

2.11. 1) $f(\widetilde{x}^2) = ((\overline{x}_1 \vee x_2) \oplus \overline{\overline{x}_1 x_2})(x_1 \sim x_2(\overline{x}_1 \vee x_2)) =$
$= (\overline{x_1 \overline{x}_2} \oplus \overline{\overline{x}_1 x_2})(x_1 \sim x_2) = (x_1 \oplus x_2)(x_1 \sim x_2) = 0 =$
$= (\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2)(\overline{x}_1 \vee x_2)(x_1 \vee \overline{x}_2)(x_1 \vee x_2).$

3) $f(\widetilde{x}^3) = x_1 \overline{x}_2 \vee \overline{x}_2 x_3 \vee \overline{x}_1 \vee x_2 x_3 = \overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \vee x_3.$

6) $f(\widetilde{x}^4) = (\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \vee \overline{x}_3 \vee \overline{x}_4)(x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4).$

2.12. 2) $f(\widetilde{x}^3) = \overline{x}_1 \overline{x}_2 x_3 \vee \overline{x}_1 \overline{x}_2 x_3 \vee \overline{x}_1 x_2 \overline{x}_3 \vee x_1 x_2 \overline{x}_3 \vee x_1 \overline{x}_2 \overline{x}_3 \vee x_1 x_2 \overline{x}_3 =$
$= \overline{x}_1 \overline{x}_2 \overline{x}_3 \vee \overline{x}_1 \overline{x}_2 x_3 \vee \overline{x}_1 x_2 \overline{x}_3 \vee x_1 x_2 \overline{x}_3 \vee x_1 \overline{x}_2 \overline{x}_3.$

5) $f(\widetilde{x}^3) = x_1 \overline{x}_2 \vee x_1 x_2 \vee \overline{x}_1 \overline{x}_2 \vee x_1 \overline{x}_2 \vee \overline{x}_1 \overline{x}_2 x_3 \vee \overline{x}_1 x_2 x_3 =$
$= x_1 \overline{x}_2 \overline{x}_3 \vee x_1 \overline{x}_2 x_3 \vee x_1 x_2 \overline{x}_3 \vee x_1 x_2 x_3 \vee \overline{x}_1 \overline{x}_2 \overline{x}_3 \vee \overline{x}_1 \overline{x}_2 x_3 \vee \overline{x}_1 x_2 x_3.$

2.13. 1) $f(\widetilde{x}^3) = (x_1 \vee \overline{x}_2 \vee x_3)(x_1 \vee \overline{x}_2 \vee \overline{x}_3)(x_1 \vee x_3)(\overline{x}_1 \vee x_3) =$
$= (x_1 \vee \overline{x}_2 \vee x_3)(x_1 \vee \overline{x}_2 \vee \overline{x}_3)(x_1 \vee x_2 \vee x_3)(\overline{x}_1 \vee x_2 \vee x_3)(x_1 \vee \overline{x}_2 \vee \overline{x}_3).$

5) $(\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \vee x_3)(\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \vee \overline{x}_3)(x_1 \vee x_2 \vee x_3)(x_1 \vee x_2 \vee \overline{x}_3)$ &
$\&\ (\overline{x}_1 \vee x_2 \vee x_3)(\overline{x}_1 \vee x_2 \vee x_3)\,\&\,(x_1 \vee \overline{x}_2 \vee \overline{x}_3)(x_1 \vee \overline{x}_2 \vee x_3).$

2.14. 3) $f(\widetilde{x}^3) = (x_1 \vee \overline{x}_2 x_3)(\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \vee x_3) =$
$= x_1 \overline{x}_2 \vee x_1 x_3 \vee \overline{x}_1 \overline{x}_2 \overline{x}_3 \vee \overline{x}_2 \overline{x}_3 = x_1 \overline{x}_2 \vee x_1 x_3 \vee \overline{x}_2 \overline{x}_3 = x_1 x_3 \vee \overline{x}_2 \overline{x}_3.$

6) $f(\widetilde{x}^4) = (x_1 x_2 \vee x_1 \overline{x}_3 \vee \overline{x}_2 \overline{x}_3)(x_2 x_3 \vee x_2 \overline{x}_4 \vee x_3 x_4) =$
$= x_1 x_2 x_3 \vee x_1 x_2 \overline{x}_4 \vee x_1 x_2 x_3 x_4 \vee x_1 x_2 \overline{x}_3 \overline{x}_4 = x_1 x_2 x_3 \vee x_1 x_2 \overline{x}_4.$

2.15. 2) $f(\widetilde{x}^3) = (x_1 \vee x_2)(\overline{x}_2 \vee x_2)(x_1 \vee \overline{x}_3)(\overline{x}_2 \vee \overline{x}_3) \vee \overline{x}_2 x_3 =$
$= (x_1 \vee x_2 \vee \overline{x}_2)(x_1 \vee \overline{x}_2 \vee \overline{x}_3)(x_2 \vee \overline{x}_3 \vee \overline{x}_2)(x_1 \vee x_2 \vee x_3)\ \&$
$\&\ (x_1 \vee \overline{x}_3 \vee x_3)(\overline{x}_2 \vee \overline{x}_3 \vee x_3) = (x_1 \vee \overline{x}_2 \vee \overline{x}_3)(\overline{x}_2 \vee \overline{x}_3)(x_1 \vee x_2 \vee x_3) =$
$= (\overline{x}_2 \vee \overline{x}_3)(x_1 \vee x_2 \vee x_3).$

5) $f(\widetilde{x}^3) = (\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2)(\overline{x}_2 \vee \overline{x}_2) \vee x_2 \overline{x}_3 = (\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2)\overline{x}_2 \vee x_2 \overline{x}_3 =$
$= \overline{x}_2 \vee x_2 \overline{x}_3 = (\overline{x}_2 \vee x_2)(\overline{x}_2 \vee \overline{x}_3) = \overline{x}_2 \vee \overline{x}_3.$

2.17. 1) $2^{2^n - 1}$, если n нечетное, и $2^{2^n - \binom{n}{[n/2]}} - 1$, если n четное.

2) $2^{2^n - n - 1} - 1$. 3) $2^{2^n - 1} - 1$.

4) $2^L - 1$, где $L = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n/2} = 2^{n-1} + \frac{1}{2}\binom{n}{n/2}$, если n четное, и $L = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{(n-1)/2} = 2^{n-1}$, если n нечетное.

5), 6) $2^{2^n - 1} - 1$.

2.18. 1) $2^n - n - 1$. 2) $n + 1$. 3), 5) $(2^{n+1} + (-1)^n)/3$. 4) $2^n - 1$.

6) $2^{n-1} + 2$. 7) $2^{n-1} - 1$, если n нечетное, и $2^{n-1} + 1$, если n четное.

8) 2^{n-1}, если n нечетное, и $2^{n-1} + 1$, если n нечетное.

2.19. 1) $2^n \cdot k + 2^m \cdot l - k \cdot l$. 2) $k \cdot l$. 3) $(2^n - l) \cdot k + (2^m - k) \cdot l$.

4) $(2^m - k) \cdot 2^n + k \cdot l$.

2.20. 1) $l_1 - l_2$, где l_1 и l_2 — длины совершенных д. н. ф. функций $f \vee g$ и $f \cdot g$ соответственно.

2) $2^{n+1} - l_1 - l_2$, где l_1 и l_2 — длины совершенных д. н. ф. функций $f(\widetilde{x}^n) \to g(\widetilde{x}^n)$ и $g(\widetilde{x}^n) \to f(\widetilde{x}^n)$ соответственно.

2.21. 1) Всего имеется 10 булевых функций, зависящих от переменных x_1 и x_2, причем от каждой из них существенным образом.

2) Функции $x_1 \oplus x_2$ и $x_1 \sim x_2$ имеют минимальные д. н. ф. сложности 4.

2.22. 1) $x_1x_2 \oplus 1$. 3) $x_1x_2x_3 \oplus x_1x_3 \oplus x_1$.

6) $x_1x_2 \oplus x_1x_3 \oplus x_2x_3 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus 1$.

10) $x_1x_2x_3x_4 \oplus x_2x_3x_4 \oplus x_1x_3 \oplus x_1x_4 \oplus x_2x_3 \oplus x_2x_4 \oplus x_1 \oplus x_2$.

2.23. 1) $x_1x_2 \oplus x_1 \oplus x_2 \oplus 1$. 4) $x_1x_2x_3 \oplus x_1x_3 \oplus x_2x_3 \oplus x_2 \oplus x_3$.

7) $x_1x_2x_4 \oplus x_2x_3x_4 \oplus x_1x_3 \oplus x_1x_4 \oplus x_2x_4$.

2.24. 1) $f(\widetilde{x}^2) = \overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 \vee \overline{x}_1x_2 = \overline{x}_1 \vee \overline{x}_2 = \overline{x_1x_2} = x_1x_2 \oplus 1$.

3) $f(\widetilde{x}^3) = \overline{\overline{x_1 \vee x_2} \cdot \overline{x_2 \vee x_3}} = \overline{\overline{x}_1 \cdot \overline{x}_2 \cdot \overline{x}_3} = (x_1 \oplus 1)(x_2 \oplus 1)(x_3 \oplus 1) \oplus 1 =$
$= x_1x_2x_3 \oplus x_1x_2 \oplus x_1x_3 \oplus x_2x_3 \oplus x_1 \oplus x_2 \oplus x_3$.

9) $f(\widetilde{x}^4) = x_1 \vee \overline{x}_2 \vee \overline{x_2 \vee \overline{x}_3}x_4 = x_1 \vee \overline{x}_2 \vee x_4 = \overline{\overline{x}_1x_2\overline{x}_4} =$
$= (x_1 \oplus 1)x_2(x_4 \oplus 1) \oplus 1 = x_1x_2x_4 \oplus x_1x_2 \oplus x_2x_4 \oplus x_2 \oplus 1$.

2.25. Достаточность. Пусть x_i содержится в полиноме Жегалкина $P(\widetilde{x}^n)$ функции $f(\widetilde{x}^n)$. Представим полином $P(\widetilde{x}^n)$ в виде $x_iP_1(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n) \oplus P_2(x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)$. Здесь $P_1 \not\equiv 0$, так как иначе переменная x_i не входила бы явно в $P(\widetilde{x}^n)$. Возьмем набор $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n)$ такой, что $P_1(\widetilde{\alpha}) = 1$. Тогда имеем

$$f(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, 0, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n) = 0 \cdot P_1(\widetilde{\alpha}) \oplus P_2(\widetilde{\alpha}) = P_2(\widetilde{\alpha}),$$

$$f(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, 1, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_n) = 1 \cdot P_1(\widetilde{\alpha}) \oplus P_2(\widetilde{\alpha}) = 1 + P_2(\widetilde{\alpha}) \neq P_2(\widetilde{\alpha}).$$

Значит, x_i — существенная переменная функции $f(\widetilde{x}^n)$.

2.26. 1) $\binom{n}{r}$.

2) 1 при $r = 0$ и $2^L\left(2^{\binom{n}{r}} - 1\right)$ при $r \geqslant 1$, где

$$L = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{r-1}.$$

3) 1 при $r = 0$ и $\left(2^{\binom{n}{r}} - 1\right) \cdot 2^{L-1}$ при $r \geqslant 1$, где

$$L = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{r-1}.$$

4) $\binom{m}{k}$, где $m = 2^n - 1$ и k четное. При k нечетном таких полиномов нет.

5) 1 при $r = 0$, $\binom{n}{r} \prod\limits_{i=0}^{r-1}\left(1 + \binom{n}{i}\right)$ при $r \geqslant 1$.

2.27. 1) 2^{n-2}. 2)–4) 2^{n-1}. 5) $2^k + 2^{n-k} - 2$. 6) $(2^{n+1} + (-1)^n)/3$.

7) $n + 1$, если n нечетное, и n, если n четное.

8) 1 при $n = 2$, 2 при $n = 3$ и

$$\sum_{k=0}^{p} \binom{n-1}{4k} + \sum_{l=0}^{q} \binom{n-1}{4l+2} + 2 \sum_{m=0}^{r} \binom{n-1}{4m+3}$$

при $n \geqslant 4$, где $p = [(n-1)/4]$, $q = [(n-3)/4]$ и $r = [(n-4)/4]$.

9) $\sum\limits_{k=0}^{p} \binom{n}{4k+2} + \sum\limits_{l=0}^{q} \binom{n}{4l+1}$, где $p = \left[\dfrac{n-2}{4}\right]$ и $q = \left[\dfrac{n-1}{4}\right]$.

2.28. $\overline{x}_1\overline{x}_2 \ldots \overline{x}_n$.

2.29. Применить индукцию по n.

2.30. Для $n = 1$ утверждение очевидно (соответствующими полиномами являются 0, x_1 и 1). Пусть утверждение верно для $n = k$ $(k \geqslant 1)$. Докажем его для $n = k+1$. Если $l \leqslant 2^k$, то по индуктивному предположению существует полином $P(\widetilde{x}^k)$, длина которого не превосходит k и такой, что $|N_P| = l$. Но тогда полином $x_{k+1}P(\widetilde{x}^k)$ обращается в 1 в l вершинах куба B^{k+1}. Если $2^k < l \leqslant 2^{k+1}$, то рассмотрим полином $P(\widetilde{x}^k)$, обращающийся в 1 на $2^{k+1} - l$ наборах из B^k. Полином $x_{k+1}P(\widetilde{x}^k) \oplus 1$ является искомым.

Глава II

§ 1

1.1. 1) $\{x_1, \overline{x}_1, x_2, \overline{x}_2\}$. 2) $\{0, x_1, x_2, x_1 \oplus x_2\}$.

3) $\{0, 1, x_1, x_2, \overline{x}_1, \overline{x}_2\}$. 4) $\{x_1, x_2, x_1x_2\}$. 5) $\{x_1, x_2\}$.

6) $\{1, x_1, x_2, \overline{x}_1 \vee x_2, x_1 \vee \overline{x}_2, x_1 \vee x_2\}$.

1.2. 1) $f = x \to 0$, 2) $f = ((x \downarrow x) \downarrow (y \downarrow y)) \downarrow (x \downarrow y)$.

3) $f = (x \oplus x) \oplus x$. 4) $f = (x \sim y) \sim z$. 5) $f = xx \oplus x$. 6) $f = x\overline{(y\overline{x})}$.

7) $f = (\overline{x} \vee \overline{x}) \vee (\overline{y} \vee \overline{y})$.

1.3. 1) $\{0, 1, x, \overline{x}\}$. 2) $\{x, xy, xyz\}$. 3) $\{1, x, x \sim y, x \oplus y \oplus z\}$.

4) $\{x, xy \vee yz \vee zx\}$. 5 $\{x, \overline{x}, x \oplus y \oplus z, x \oplus y \oplus z \oplus 1\}$.

1.4. 1) $\{0, \overline{x}\}$. 2) $\{x \oplus y, 1\}$. 3) $\{x \oplus y\}$. 4) $\{xy, x \vee y\}$. 5) $\{x \to y\}$.

1.5. 1), 3), 7) Множество является замкнутым.

2), 4)–6), 8) Множество не является замкнутым.

1.7. Пусть A — предполный класс замкнутого класса K. Это означает по определению, что $[A] \neq K$ и $[A \cup \{f\}] = K$ для всякой функции $f \in K \backslash A$. Предположив, что A не является замкнутым, имели бы $[A] \backslash A \neq \varnothing$. Но тогда, с одной стороны, $[A \cup ([A] \backslash A)] = K$, а с другой стороны, $A \cup ([A] \backslash A) = [A]$ и $[[A]] = [A]$ в силу замкнутости $[A]$. Пришли к противоречию.

1.9. 1), 3), 5), 7), 8), 10) Множество A является замкнутым.

2), 4), 6), 9) Множество A не является замкнутым.

1.10. 1) $\{0\}$, $\{1\}$, $\{1, 0\}$.

2) Кроме классов п. 1) еще $[0, x]$, $[1, x]$, $[0, 1, x]$, $[x]$, $[0, \overline{x}]$, $[\overline{x}]$.

3) а) $[xy]$; б) $x \oplus y$, $x \sim y]$.

1.12. 1) Система $\{\overline{x}, xy, x \vee y\}$ является полной в P_2, поскольку всякая $f \in P_2$ может быть представлена в виде д. н. ф. или к. н. ф. С другой стороны, $\overline{x} = x \downarrow x$, $xy = (x \downarrow x) \downarrow (y \downarrow y)$, $x \vee y = (x \downarrow y) \downarrow (x \downarrow y)$.

2) Имеем $0 = xx \oplus x$, $xy = xy \oplus 0$, $x = (x \sim x) \oplus x$. Система $\{\overline{x}, xy\}$ полна, поскольку $x \vee y = \overline{\overline{x} \cdot \overline{y}}$.

3) Имеем $\overline{x} = \overline{x \oplus x \oplus x}$, $x \vee y = \overline{x} \to y$, $xy = \overline{\overline{x} \to \overline{y}}$.

4) Имеем $0 = f(x, x, x)$, $\overline{x} = x \to 0$, $xy = \overline{x \to \overline{y}}$.

5) Имеем $\overline{x} = x \oplus 0 \oplus 1$, $xy = m(x, y, 0)$.

1.13. 1) $K_1 \subseteq K_2$.

2) Вообще говоря, $K_1 \not\subset K_2$. Рассмотреть $A_1 = \{\overline{x}, xy\}$, $A_2 = \{\overline{x}, x \oplus y\}$.

1.14. 1) Например, $K_1 = \{0\}$, $K_2 = \{1\}$.

2) Например, $K_1 = [x, 0]$, $K_2 = [x, 1]$. 3) $K_1 = [0, \overline{x}]$, $K_2 = [0, 1, x]$.

1.15. 1) $M_1 = [0, 1, x]$, $M_2 = [\overline{x}]$ предполные в K.

2) $M_1 = \{0\}$, $M_2 = \{1\}$. 3) $[x]$. 4) $[x \oplus y \oplus z]$.

1.17. Пусть K — предполный класс в P_2. Если $x \neq K$, то в силу предполноты K имеем $[K \cup \{x\}] = P_2$. Но в силу 1.7 и 1.16 имеем $[K \cup \{x\}] = K \cup \{x\}$. По условию $x|y \notin [K]$, а значит, $x \mid y \notin K \cup \{x\} = P_2$. Противоречие.

1.18. Пусть $f(\widetilde{x}^n)$ не является константой. Если $f(x, x, \ldots, x) \subseteq \{x, \overline{x}\}$, то на f, очевидно, можно получить x. В противном случае $f(x, x, \ldots, x) \in \{0, 1\}$. Пусть для определенности $f(x, x, \ldots, x) = 0$. Поскольку $f(\widetilde{x}^n) \not\equiv 0$, то существует набор $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ такой, что $f(\widetilde{\alpha}) = 1$. Заменим в f переменную x_i на x, если $\alpha_i = 1$, и на y, если $\alpha_i = 0$. Тогда получим функцию $g(x, y)$. Ясно, что $g(x, y) \in \{x\overline{y}, x \oplus y\}$ и что $x \in [g(x, y)]$.

1.19. Предположим, что $P_2 = K_1 \cup K_2 \cup \ldots \cup K_s$, где K_i — непустые попарно непересекающиеся замкнутые классы. Тогда существует i такое, что $x \mid y \in K_i$. Но тогда $K_i = P_2$ в противоречии с тем, что $s > 1$.

1.21. Утверждение вытекает из 1.18 и из того, что система, содержащая функцию x, не может быть расширена до базиса.

1.22. Указание. Провести индукцию по числу вхождений связки $\to$ в формулу, реализующую функцию $f \in [x \to y]$.

1.23. Указание. Использовать задачу 1.22.

§ 2

2.1. В задачах 1), 3), 4), 8), 10) функция f самодвойственна. В задачах 2), 5)–7), 9) функция f на является самодвойственной.

2.2. В задачах 1), 3), 5)–8) $f \in S$. В задачах 2), 4), 9), 10) $f \notin S$.

2.3. 1) (1100). 4) (01101001). 8) (1001000011110110).

2.4. 1) $f(x, \overline{x}, x) = f(\overline{x}, x, \overline{x}) = 1$. 2) $f(\overline{x}, x, x) = 1$.

2.6. Куб B^n разбивается на 2^{n-1} непересекающихся пар противоположных вершин. В каждой такой паре самодвойственная функция $f(\widetilde{x}^n)$ обращается в 1 ровно один раз. Контрпримером к обратному утверждению является функция $x_1 \oplus x_2$.

2.8. 1), 3) $f(\widetilde{x}^n) \in S$ при нечетных n.

2), 4), 5) $f(\widetilde{x}^n) \notin S$ при всех $n \neq 3$, $f(\widetilde{x}^3) \in S$.

6) $f(\widetilde{x}^n) \notin S$ при всех $n = 3k$.

2.10. Необходимость. Пусть $f = x_1 f_1^1 \vee \overline{x}_1 f_0^1$. Тогда

$$f^* = (x_1 f_1^1 \vee \overline{x}_1 f_0^1)^* = (x_1 \vee (f_1^1)^*) \,\&\, (\overline{x}_1 \vee (f_0^1)^*) =$$
$$= x_1 (f_0^1)^* \vee \overline{x}_1 (f_1^1)^* \vee (f_0^1)^* (f_1^1)^* = x_1 (f_0^1)^* \vee \overline{x}_1 (f_1^1)^*.$$

В силу того, что $f \in S$, имеем $f^* = f$, и, следовательно,

$$x_1(f_0^1)^* \vee \overline{x}_1(f_1^1)^* = x_1 f_1^1 \vee \overline{x}_1 f_0^1.$$

Полагая $x_1 = 1$, а затем $x_1 = 0$, получаем отсюда, что $(f_0^1)^* = f_1^1$ и $(f_1^1)^* = f_0^1$.

Достаточность. Пусть $(f_1^1)^* = f_0^1$. Отсюда вытекает, что $f_1^1 = ((f_1^1)^*)^* = (f_0^1)^*$, и, следовательно,

$$f = x_1 f_1^1 \vee \overline{x}_1 f_0^1 = x_1(f_0^1)^* \vee \overline{x}_1(f_1^1)^* = (x_1 f_1^1 \vee \overline{x}_1 f_0^1)^* = f^*.$$

2.11. Верно. Вытекает из задачи 2.10.

2.13. f является суперпозицией самодвойственных функций $m(\widetilde{x}^3)$, φ и ψ.

2.14. Пусть $f \notin S$. Требуется доказать, что $[\{f\} \cup S] = P_2$. Имеем $\{x, \overline{x}\} \subset S$. Из леммы о несамодвойственной функции вытекает тогда, что $\{1, 0\} \subseteq [\{x, \overline{x}, f\}]$. Известно, что $[\overline{x}, xy, x \vee y] = P_2$. Отсюда следует, что $[0, 1, x \oplus y \oplus z, m(x, y, z)] = P_2$, ибо $\overline{x} = x \oplus 1 \oplus 0$, $xy = m(x, y, 0)$, $x \vee y = m(x, y, 1)$. Имеем

$$P_2 \subseteq [0, 1, x \oplus y \oplus z, m(xyz)] \subseteq [\{x, \overline{x}, f\} \cup S] = [\{f\} \cup S].$$

2.15. Верно для $n = 1$, 3 и не верно для остальных натуральных n.

2.16. 1) Из условий этой задачи и из задачи 2.10 следует, что $f_0^1 = f_1^1$. Но тогда f не зависит существенно от x_1.

2) Утверждение остается верным.

2.18. 1) Нетрудно получить все функции $f \in S$, зависящие не более чем от трех переменных (см. задачу 2.9). Если для некоторого n все самодвойственные функции $f(\widetilde{x}^{n-1})$ получены, то с помощью представления из задачи 2.17 получим любую функцию $f(\widetilde{x}^n)$ из S.

2.19. В задачах 1), 3), 5)–7), 10) множества M являются самодвойственными. В задачах 2), 4), 8), 9) множества M не являются самодвойственными.

§ 3

3.1. 1), 4), 7), 10) $f \notin L$. 2), 3), 5), 6), 8), 9) $f \in L$.

3.2. 1), 3)–5), 7)–10) $f \in L$. 2), 6) $f \notin L$.

3.3. 1) Имеем $f = ax_1 \oplus bx_2 \oplus c$, $f(00) = c = 1$, $f(01) = b \oplus c = 0$, $f(11) = a \oplus b \oplus c = 1$. Отсюда $f = x_1 \oplus x_2 \oplus 1$, $\widetilde{\alpha}_f = (1001)$.

2) $f = x_1$. 3), 4) $f = x_1 \oplus x_2 \oplus x_3 \oplus 1$. 5) $f = x_3 \oplus 1$.

6) $f = x_1 \oplus x_2$. 9) $f = x_1 \oplus x_2 \oplus x_4 \oplus 1$. 10) $f = x_1 \oplus x_3 \oplus x_4 \oplus 1$.

3.4. 1) $f(x, y, y) = f(x, y, 1) = xy$. 2) $f(x, y, y) = xy$.

3) $f(x, y, 0) = \overline{x}\,\overline{y}$. 4) $f(x, 1, y) = x\overline{y}$. 5) $f(y, 0, 1, x) = x\overline{y}$.

6) $f(y, x, y, y) = x\overline{y}$. 11) $f(x, x, x, y) = xy$. 12) $f(x, 1, y, 1) = xy$.

3.5. 1), 4), 7), 9) Нельзя, так как $|N_{\overline{f}}| \leqslant 2$.

2) $xy = f(\overline{x}, \overline{y}, 1)$. 3), 8), 11) Нельзя, так как $f \in L$.

5), 6) Нельзя. Указание. Подстановка констант и любое отождествление переменных приводит к уменьшению числа нулей.

3.6. 1) Пусть $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$ — произвольный набор значений переменных $x_1, \ldots, x_{n-1}$. Тогда $f(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, x_n) = x_n \oplus \varphi(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})$. Отсюда ясно, что $f(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, 0) \neq f(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, 1)$.

2) Представим функцию в виде $x_n h(\widetilde{x}^{n-1}) \oplus g(\widetilde{x}^{n-1})$. Так как f существенно зависит от x_n, то $h \not\equiv 0$. Предположим, что $h \not\equiv 1$. Тогда существует набор $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1})$ такой, что $h(\widetilde{\alpha}) = 0$. Но тогда $f(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, 0) = f(\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, 1) = g(\widetilde{\alpha})$, что противоречит условию. Таким образом, $h \equiv 1$, что и требовалось доказать.

3) Указание: Значение $f(\widetilde{0})$ и условия однозначно определяют ее значения на B^n. При этом на наборах четного веса значение функции совпадает с $f(\widetilde{0})$, а на наборах нечетного веса противоположно ему. Такова функция $x_1 \oplus \ldots \oplus x_n \oplus f(\widetilde{0})$. Представление единственно.

3.7. 1), 2) Вытекает из задачи 3.6), 1).

3.10. $2\binom{n}{k}$.

3.11. 2^{n-1}.

3.12. Функция $x_1 \to x_2$ нелинейна. Если $f \in L$, то $x_1 \to x_2 = f(x_1, x_2, 0, \ldots, 0) \in L$. Пришли к противоречию.

3.13. Предположим, что $f \in L$. Тогда $f = x_1 \oplus \ldots \oplus x_n \oplus \sigma$, $\sigma \in \{0, 1\}$. Из условия $f(x_1, 0, \ldots, 0) \neq f(x_1, 1, \ldots, 1)$ следует, что n четно. Пришли к противоречию с условием.

3.14. В силу нелинейности функции f существуют такие i и j, что $f = x_i x_j \varphi_1 \oplus x_i \varphi_2 \oplus x_j \varphi_3 \oplus \varphi_4$, где функции φ_m $(m = 1, \ldots, 4)$ не зависят от i и j и $\varphi_1 \not\equiv 0$. Пусть $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_{j-1}, \alpha_{j+1}, \ldots \ldots, \alpha_n)$ — набор такой, что $\varphi_1(\widetilde{\alpha}) = 1$. Тогда $\psi(x_i, x_j) = f(\alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}, x_i, \alpha_{i+1}, \ldots, \alpha_{j-1}, x_j, \alpha_{j+1}, \ldots, \alpha_n)$ нелинейна.

3.15. Достаточность. Пусть функция $f(\widetilde{x}^n)$ такова, что в B^n найдется специальная четверка наборов $\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}, \widetilde{\gamma}, \widetilde{\delta}$ такая, что функция f принимает на этих наборах значение 1 нечетное число раз. Положим $x_m = \alpha_m$, если $m \in A_2$. Если же $m \in A_1$, то пусть $x_m = x$ при $\gamma_m = 1$ и $x_m = y$ при $\gamma_m = 0$. В результате такой подстановки из f получается функция $\varphi(x, y)$ такая, что $\varphi(11) = f(\widetilde{\alpha})$, $\varphi(00) = f(\widetilde{\beta})$, $\varphi(10) = f(\widetilde{\gamma})$, $\varphi(01) = f(\widetilde{\delta})$. Ясно, что $\varphi(x, y) \notin L$.

Необходимость. Вытекает из 3.14.

3.16. Указание. Используя 3.14, доказать существование грани размерности 2, на которой функция обращается в 1 нечетное число раз. Из того, что $|N_f| = 2^{n-1}$, вывести существование двух граней таких, что на одной из них функция обращается в 1 один раз, а на другой три раза.

3.18. 1) С помощью суперпозиции из функции $x_1 \oplus x_2$ можно получать любую функцию вида $x_{i_1} \oplus x_{i_2} \oplus \ldots \oplus x_{i_k}$, путем подстановки 1 — любую функцию вида $x_{i_1} \oplus x_{i_2} \oplus \ldots \oplus x_{i_k} \oplus 1$. Система A является базисом.

2)–5), 7)–9) A является базисом. 6), 10) A не является базисом.

3.19. Пусть $f \in L$. Если f зависит существенно от нечетного числа переменных, то $f \in S \cap L$. Если f зависит существенно от четного числа переменных, то либо $f(\widetilde{0}) = 0$ и $1 \notin [\{f\}]$, либо $f(\widetilde{0}) = 1$, $f(\widetilde{1}) = 1$ и $0 \notin [\{f\}]$.

3.21. Среди функций f_1, f_2, f_3 хотя бы одна является нелинейной, поскольку существуют лишь две линейные функции, существенно зависящие от x_1 и x_2. Кроме того, каждая из этих функций не является самодвойственной. Подстановкой x и $\overline{x}$ на места переменных несамодвойственной функции f получаем константу. С помощью отрицания получаем вторую

константу. Подстановкой 0, 1, x, $\overline{x}$, y, $\overline{y}$ из нелинейной функции получаем функцию вида $xy \oplus \sigma$. Имеем $[\{\overline{x},\, xy \oplus \sigma\}] = P_2$.

3.23. Функция представима в виде $f = xyz \oplus \alpha xy + \beta xz \oplus \gamma zx \oplus l(x, y, z)$, где α, β, γ принадлежат множеству $\{0, 1\}$, а $l(x, y, z) \in L$. Если $\alpha = \beta = \gamma = 1$, то $f(x, y, y) = xy \oplus l_1(x, y)$, где $l_1 \in L$. Если $\alpha + \beta + \gamma = 2$ и, например, $\alpha = 0$, то $f(x, x, y) = xy \oplus l_2(x, y)$, $l_2 \in L$. Если $\alpha + \beta + \gamma \leqslant \leqslant 1$ и, например, $\alpha = \beta = 0$, то $f(x, y, y) = xy \oplus l_3(x, y)$, $l \in L$.

§ 4

4.1. 1), 3), 4), 6), 8), 9) $f \in T_1 \backslash T_0$. 2), 5), 7), 10) $f \notin T_1 \backslash T_0$.

4.2. 1), 2) При четных $n \geqslant 2$. 3), 4) При $n \equiv 2, 3 \pmod 4$.

5), 8) При всех $n \geqslant 2$. 6), 7) При всех четных n.

9), 10) При всех натуральных $n \not\equiv 3 \pmod 4$.

Указание. $\binom{n}{3}$ нечетно при $n \equiv 3 \pmod 4$.

4.3. 1) 2^{2^n-2}. 2) $\frac{3}{4}\,2^{2^n}$. 3) 2^n. 4) $2^{2^{n-1}-1}$. 5) $2^{2^{n-1}} + 2^n$. 6) 2^n.

7) $2^{2^{n-1}} + 2^{n-1}$. 8) 2^{n-1}. 9) $2^{2^n-1} + 2^{2^{n-1}-1} + 2^{n-1}$.

10) $\frac{1}{2}\,(2^{2^{n-1}} + 2^n)$. 15) 0.

4.4. Указание. Если $f \in T_\sigma \cap S$, $\sigma \in \{0, 1\}$, то $f \in T_{\overline{\sigma}} \cap S$; если $f \in L \cap Y_0 \cap T_1$, то $f \in S$.

4.5. 1) $xy = (x \vee y) \oplus x \oplus y$. Далее см. пример 3.

2) Указание. Использовать пример 3 и то, что $T_0^* = T_1$.

3) Указание. Свести к 2).

4) Указание. $x \oplus y = xx \oplus y$, $xy = (xy \oplus z) \oplus z$. Далее см. пример 3.

5) Полином всякой функции из $T_0 \cap T_1$ содержит нечетное число слагаемых и не содержит 1 в качестве свободного члена. С помощью функций xy, $x \oplus y \oplus z$ любой такой полином можно построить.

6) См. 5).

7) Указание. Всякий многочлен не выше первой степени и не содержащий слагаемых, равных 1, является суперпозицией функции $x \oplus y$.

4.6. 1) Да. Имеем $1 = xx \sim x$, $x \sim y = xx \sim y$, $x \oplus y \oplus z = (x \sim y) \sim z$, $xy = xy \sim 1$. Далее см. задачу 4.5, 5).

2) A не является базисом в T_0, так как $A \subseteq T_0 \cap T_1$.

3) A не является базисом в T_1, так как $[\{xy,\, x \sim y\}] = T_1$.

4) A не является базисом в $T_0 \cap T_1$, так как $A \subseteq S$.

5) Нет, так как $[\{xy,\, x \oplus y \oplus z\}] = T_0 \cap T_1$.

6) A — базис в $T_0 \cap T_1$, см. задачу 4.5, 5) и задачу 1.2, 12).

4.7. 1) $\widetilde{\alpha}_f = (0110)$, $f = x_1 \oplus x_2$.

Решение. $f(\widetilde{x}^2) \in L$ существенно зависит от x_1 и x_2 и $f(00) = 0$. Отсюда $f = x_1 \oplus x_2$. Утверждение о том, что $[\{x_1 \oplus x_2\}] = T_0 \cap L$, доказано в задаче 4.5, 7).

2) $\widetilde{\alpha}_f = (10010110)$. 3) $\widetilde{\alpha}_f = (01100110)$. 4) $\widetilde{\alpha}_f = (1001)$.

6) $\widetilde{\alpha}_f = (0110\,0110\,0110\,1001)$. 7) $f = 1 \oplus x_1 \oplus x_2 \oplus x_4$.

8) $\widetilde{\alpha}_f = (00101011)$.

4.8. Пусть $f \notin T_1$. Тогда либо а) $f(x, \ldots, x) \equiv 0$, либо б) $f(x, \ldots, x) = \overline{x}$. В случае а) имеем $P_2 = [\{0, 1, xy \oplus z\}] \subseteq [\{0\} \cap T_1] \subseteq [\{f\} \cup T_1]$. В случае б) $P_2 = [\{\overline{x}, xy\}] \subseteq [\{f\} \cup T_1]$.

4.9. 1) Пусть $f \in L \backslash A$. Тогда f существенно зависит более чем от одной переменой. Подстановкой константы 0 из f можно получить функцию вида $x \oplus y \oplus \sigma$, $\sigma \in \{0, 1\}$. Но $[\{x \oplus y \oplus \sigma, \overline{x}\}] = L$.

3) Пусть $f \in L \backslash A$. Тогда $f(x, \ldots, x) \in \{1, \overline{x}\}$. Далее утверждение следует из полноты в L систем $\{1, x \oplus y\}$, $\{\overline{x}, x \oplus y\}$.

4.10. 1) Пусть $f \in T_0 \backslash L$. Из f отождествлением переменных можно получить функцию φ, которая имеет вид либо $xy \oplus l_1(x, y)$, либо $m(x, y, z) \oplus l_2(x, y, z)$, где l_1, l_2 — линейные функции (см. задачу 3.24). В обоих случаях $T_0 = [\{x \oplus y, \varphi\}] \subseteq [T_0 \cap L \cap \{f\}]$.

2) $A = T_0 \cap S$ не является предполным в T_0, так как $A \subset T_0 \cap T_1$.

3) Да. 4) Нет. 5) Нет, так как, например, $[\{0\} \cup A] \neq T_0$.

§ 5

5.1. 1), 4), 6), 7) $f \notin M$. 2), 3), 5), 8) $f \in M$.

5.2. 1) Да, $f \equiv 0$. 2) Да, $f \equiv 1$. 3) Нет, $f(x, 0) = \overline{x}$.

4) Да, $f = x_1 \vee x_2 x_3$. 5) Нет, $f(1, 0, z) = \overline{z}$. 6), 7) Да. 8) Нет.

5.3. 1) $\widetilde{\alpha} = (010)$, $\widetilde{\beta} = (110)$. 2) $\alpha = (001)$, $\widetilde{\beta} = (011)$.

5.4. 1), 3) Два вектора. 2), 5)–7) Три вектора. 8) 18.

5.5. 1), 2), 4)–6) Один вектор. 3), 7) Два вектора. 8) Три вектора.

5.6. 1) При $n = 1$ $f(\widetilde{x}^n) \in M$. Если же $n \geqslant 2$, то $f(x_1, 1, 0, \ldots, 0) = \overline{x}_1$, и, следовательно, $f \notin M$.

2) $f(\widetilde{x}^n) \in M$ при $n = 2, 3$, $f(\widetilde{x}^n) \notin M$ при $n \geqslant 4$.

3) $f(\widetilde{x}^n)$ монотонна при четных n и немонотонна при нечетных n.

4) При $n = 1$ и $n = 3$ функция монотонна, а при других n — нет.

5.7. При $n = 1$ такой функцией является $\overline{x}_1$. При $n > 1$ таких функций не существует (см. задачу 5.9).

5.8. Если $f \neq M$, то существуют наборы $\widetilde{\sigma} = (\sigma_1, \ldots, \sigma_n)$ и $\widetilde{\tau} = (\tau_1, \ldots, \tau_n)$ такие, что $\widetilde{\sigma} < \widetilde{\tau}$, но $f(\widetilde{\sigma}) > f(\tau)$. Если $\rho(\widetilde{\sigma}, \widetilde{\tau}) = 1$, то утверждение доказано. Пусть $\rho(\widetilde{\sigma}, \widetilde{\tau}) = k > 1$. Рассмотрим произвольную последовательность вида $\widetilde{\gamma}_0, \widetilde{\gamma}_1, \ldots, \widetilde{\gamma}_k$, где $\widetilde{\gamma}_0 = \widetilde{\sigma}$, $\widetilde{\gamma}_k = \widetilde{\tau}$, $\widetilde{\gamma}_{i-1} < \widetilde{\gamma}_i$ (а значит, $\rho(\widetilde{\gamma}_{i-1}, \widetilde{\gamma}_i) = 1$). Имеем $f(\widetilde{\gamma}_0) = 1$, $f(\widetilde{\gamma}_k) = 0$. Ясно, что существует такое i, $0 < i \leqslant k$, что $f(\widetilde{\gamma}_{i-1}) > f(\widetilde{\gamma}_i)$. Остается положить $\widetilde{\alpha} = \widetilde{\gamma}_{i-1}$, $\widetilde{\beta} = \widetilde{\gamma}_i$.

5.9. Вытекает из задачи 5.8.

5.11. Докажем первое из разложений. С использованием задачи 5.10 имеем $f(\widetilde{x}^n) = x_i f_1^i \vee \overline{x}_i f_0^i = x_i (f_1^i \vee f_0^i) \vee \overline{x}_i f_0^i = x_i f_1^i \vee f_0^i$.

5.12. Следует из задачи 5.11 по индукции.

5.13. Предположим противное. Пусть $K = \overline{x}_1 L$ — простой импликант функции $f \in M$. Тогда по определению $K \vee f = f$, $L \vee f \neq f$. Из последнего соотношения вытекает существование набора $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$ такого, что $L(\widetilde{\alpha}) = 1$, $f(\widetilde{\alpha}) = 0$. Заметим, что $\alpha_1 = 1$, так как иначе $K(\widetilde{\alpha}) = 1$, $f(\widetilde{\alpha}) = 0$, что противоречит условию. Положим $\widetilde{\beta} = (0, \alpha_2, \ldots, \alpha_n)$. Имеем

$L(\widetilde{\alpha}) = L(\widetilde{\beta}) = K(\widetilde{\beta}) = f(\widetilde{\beta}) = 1$. Из $\widetilde{\beta} < \widetilde{\alpha}$ и $f \in M$ следует, что $f(\widetilde{\alpha}) \geqslant f(\widetilde{\beta}) = 1$. Пришли к противоречию.

5.14. 1) $e(f) = n(f) = 3$. 2) $e(f) = 2$, $n(f) = 1$. 3) $e(f) = n(f) = 4$.

4) $e(f) = 2^k$, $n(f) = k$.

5.16. Пусть $\widetilde{\alpha}$ и $\widetilde{\beta}$ — нижние единицы функции $f(\widetilde{x}^n)$ из M $(n \geqslant 2)$. Тогда $|N_f| = 2^{\|\widetilde{\alpha}\|} + 2^{\|\widetilde{\beta}\|} - 2^{\|\widetilde{\alpha} \cap \widetilde{\beta}\|}$. Ясно, что $|N_f|$ не является степенью двойки при $\widetilde{\alpha} \not< \widetilde{\beta}$ и $\widetilde{\beta} \not< \widetilde{\alpha}$, а значит, $f \notin S$.

5.17. 1) Рассмотреть $B^n_{[n/2]}$.

2) Пусть $M_1^n = \Big\{ f \in P_n \colon \bigcup\limits_{K > [n/2]} B_k^n \subseteq N_f, \ \bigcup\limits_{K < [n/2]} B_k^n = N_{\overline{f}} \Big\}$. Показать, что $M_1^n \subseteq M^n$ и $|M_1^n| = 2^{\binom{n}{[n/2]}}$.

5.18. В любой возрастающей цепи длины n куба B^n для каждого $i = 0, 1, \ldots, n$ имеется вершина $\widetilde{\alpha}_i \in B_i^n$. Ясно, что всегда $\widetilde{\alpha}_0 = \widetilde{0}$. Для выбора $\widetilde{\alpha}_1$ имеется n возможностей, для выбора $\widetilde{\alpha}_2$ при выбранной вершине $\widetilde{\alpha}_1$ имеется $n-1$ возможностей и т. д. Всего $n!$ возможностей.

2) Если $\widetilde{\alpha} \in B_k^n$, то число возрастающих цепей длины n, содержащих ее, равно произведению числа возрастающих цепей длины k, соединяющих $\widetilde{0}$ с $\widetilde{\alpha}$, и числа возрастающих цепей длины $n-k$, соединяющих $\widetilde{\alpha}$ с $\widetilde{1}$. В силу задачи 1) это число равно $k!\,(n-k)!$.

5.19. 1) Пусть A — множество попарно несравнимых наборов из B^n и $A_i = A \cap B_i^n$, а $Z(\widetilde{\alpha})$ — множество цепей длины n, содержащих вершину $\widetilde{\alpha}$. Имеем

$$n! \geqslant \Big| \bigcup_{\widetilde{\alpha} \in A} Z(\widetilde{\alpha}) \Big| = \sum_{\widetilde{\alpha} \in A} |Z(\widetilde{\alpha})| = \sum_{0 \leqslant i \leqslant n} |A_i| i! (n-i)! \geqslant$$

$$\geqslant \Big[\frac{n}{2}\Big]! \Big(\Big]\frac{n}{2}\Big[\Big)! \sum_{0 \leqslant i \leqslant n} |A_i| = |A| \Big[\frac{n}{2}\Big]! \Big(\Big]\frac{n}{2}\Big[\Big)!.$$

Отсюда $|A| \leqslant \binom{n}{[n/2]}$.

2) Указание. При $i \leqslant k \leqslant n/2$ справедливо неравенство $i!(n-i)! \geqslant k!(n-k)!$.

5.21. 1) 0. 2) 2. 3) $n+2$. 4) n. 5) $2^n - 2$.

5.22. 1) Если $f \in S \cap M^n$, то $f = x_n f_1^n \vee \overline{x}_n (f_1^n)^*$ и $f_1^n \in M^{n-1}$. Отсюда вытекает оценка.

2) Если $f \in M^n$, то $f = x_n f_1^n \vee f_0^n$, где $f_0^n \in M$, $\sigma \in \{0, 1\}$. Функция f полностью определяется парой (f_1^n, f_0^n).

5.25. При $n = 4$ в силу задачи 5.23 имеем $|M^4| = 168$, а $|S^4| = 256$. Далее утверждение вытекает из того, что $|M^n| \leqslant |M^{n-1}|^2$, а $|S^n| = |S^{n-1}|^2$.

5.26. Для определенности пусть $k > l$. Для произвольного $\widetilde{\beta} \in A$ имеется ровно $\binom{n-l}{k-l}$ наборов $\widetilde{\alpha}$ из C таких, что $\widetilde{\beta} < \widetilde{\alpha}$. Для всякого $\widetilde{\alpha} \in C$ существует не более $\binom{k}{l}$ наборов $\widetilde{\beta}$ из A таких, что $\widetilde{\beta} < \widetilde{\alpha}$. Отсюда $|A| \binom{n-l}{k-l} \leqslant |C| \binom{k}{l}$. С учетом тождества $\binom{k}{l}\binom{n}{k} = \binom{n}{l}\binom{n-l}{k-l}$ получаем требуемое неравенство.

5.27. Вытекает из задачи 5.26.

5.28. С использованием задачи 1) имеем

$$q_k(\varphi) = \binom{n}{k}^{-1} \sum_{\widetilde{\alpha} \in B_k^n} \left(c + \sum_{f \in M^n} a_f f(\widetilde{\alpha}) \right) =$$

$$= c + \sum_{f \in M^n} a_f q_k(f) \geqslant c + \sum_{f \in M} a_f q_{k-1}(f) = q_{k-1}(\varphi).$$

5.29. 1) Привести индукцию по числу переменных.

2) Провести индукцию по s с использованием задачи 1).

5.30. Вообще говоря, неверно. Рассмотреть $f(\widetilde{x}^3) = x_3$ и наборы (110) и (001).

2) Предположим противное. Пусть условия выполнены, но $f \notin M$. Тогда существуют соседние наборы $\widetilde{\alpha}$, $\widetilde{\beta}$ такие, что $\widetilde{\alpha} < \widetilde{\beta}$ и $f(\widetilde{\alpha}) > f(\widetilde{\beta})$. Пусть наборы $\widetilde{\alpha}$, $\widetilde{\beta}$ различаются в $(n-k)$-м разряде. Тогда $\nu(\widetilde{\beta}) = \nu(\widetilde{\alpha}) + 2^k$ и по условию $f(\widetilde{\alpha}) \leqslant f(\widetilde{\beta})$. Пришли к противоречию.

5.31. Заметим, что $F(\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{2^n-1}) = 1$ тогда и только тогда, когда выполнены условия задачи 5.30, 2), т. е. если вектор $(\alpha_0, \ldots, \alpha_{2^n-1})$ является вектором значений некоторой монотонной функции.

5.32. 1) Нельзя, так как $f \in T_0$, а $\overline{x} \notin T_0$.

2), 3) Нельзя, так как $f \in S$, а $\overline{x}z \notin S$. 4) Можно, $f(x, 0, 1, 0) = \overline{x}$.

5) Можно, $f(x, 0, z, 0) = \overline{x}z$. 6) Можно, $f(x, y, z, z) = z$.

5.33. Если $f \equiv 1$, то $f \in T_1 \cap L$. Если $f \equiv 0$, то $f \in T_0 \cap L$. Если $f \notin \{0, 1\}$, то $f \in T_0 \cap T_1$.

5.34. $1 \in M \backslash T_0$, $0 \in M \backslash T_1$, $xy \in M \backslash S$, $xy \in M \backslash L$.

5.35. Нельзя, так как $\{xy, x \vee y, 1\} \subseteq T_1$, а $0 \notin T_1$.

5.36. Полнота системы $\{0, 1, xy, x \vee y\}$ вытекает из задачи 5.12.

5.37. $\{0, 1, xy, x \vee y\}$, $\{0, 1, xy \vee z\}$, $\{0, 1, xy \vee yz \vee zx\}$.

5.40. 1) $\{0, xy, x \vee y\}$. 2) $\{1, xy, x \vee y\}$. 3) $\{0, 1, x\}$.

5.41. Следует из задачи 5.36 и того, что $1^* = 0$, $0^* = 1$, $(xy)^* = x \vee y$, $(x \vee y)^* = xy$.

5.42. Нельзя, так как $f \in S$, $g \notin S$.

5.46. 2) Функции из $M^n \cap S$ для $n \leqslant 3$ получаются из $m(\widetilde{x}^3)$ отождествлением переменных. Функции из $M^n \cap S$ при $n > 3$ можно получать из функций, зависящих от $n-1$ переменных, с помощью разложения из задачи 2.17.

5.47. Покажем, например, что $T_0 \cap M$ является предполным в M. Заметим, что $M \backslash T_0 = \{1\}$ и $\{0, xy, x \vee y\} \subseteq T_0 \cap M$. Теперь $[\{1\} \cup (M \cap T_0)] = M$ вытекает из задачи 5.36.

§ 6

6.1. 1) Нет, $A \subseteq T_0$. 2) Да. 3) Нет, $A \subseteq L$. 4) Да.

5) Нет, $A \subseteq S$. 6) Да.

6.2. 1) Нет, $A \subseteq L$. 2) Нет, $A \subseteq T_0$. 3), 5) Да. 4) Нет, $A \subseteq S$.

6) Нет, $A \subseteq M$.

6.3. 1), 4), 6) Да. 2) Нет, $A \subseteq S$. 3) Нет, $A \subseteq T_1$. 5) Нет, $A \subseteq L$.

6.4. 1) Нет, так как подсистема $\{x \to y, x \oplus y\}$ полна.

2) Да. 3) Нет, $A \subseteq T_1$. 4) Нет, можно удалить $xy \vee z$.

6.5. 1) $B_1 = \{1, \overline{x}, f\}$, $B_2 = \{\overline{x}, xy(x \oplus y), f\}$, где $f = x \oplus y \oplus xy \oplus$ $\oplus yz \oplus zx$.

2) $B_1 = \{0, x \to y\}$, $B_2 = \{x \oplus y, x \to y\}$, $B_3 = \{0, xy \sim xz\}$, $B_4 =$ $= \{x \oplus y, xy \sim xz\}$.

6.6. 1) P_2. 2) $M \cap T_1$. 3) $(M \cap L) \backslash S$. 4) $T \cap S$. 5) S. 6) $L \cap S$.

6.7. 1) а) $\{x \mid y\}$, $\{x \downarrow y\}$;

б) $\{x \oplus y, x \to y\}$, $\{x \sim y, \overline{x}y\}$, $\{x\overline{y}, x \to y\}$ и еще четыре базиса, получающиеся из них перестановкой переменных в функциях $x\overline{y}$, $x \to y$;

в) $\{x_1 \oplus x_2, x_1 \sim x_2, xy\}$, $\{x \oplus y, x \sim y, x \vee y\}$.

2) Указание. С использованием критериальной таблицы убедиться, что нет базисов, отличных от перечисленных в задаче 1).

6.8. 1) Да, $A \cup \{0\}$ — базис.

2) Нет, функция x входит во все предполные классы.

3) Да, $A \cup \{1\}$ — базис.

4) Нет, функции xy и $x \vee y$ принадлежат одним и тем же предполным классам.

6.9. 1) Вообще говоря, нет. Рассмотреть $f_1 = x \oplus y \oplus z$, $f_2 = x_1 \vee x_2 \vee x_3$.

2) Да, имеем $f_2 \equiv 1 \notin S$, $f_1 \notin M \cup L \cup T_0 \cup T_1$. Система полна.

3) Вообще говоря, нет. Рассмотреть $f_1 = x \to y$, $f_2 \equiv 1$.

4) Вообще говоря, нет. Например, $f_1 = \overline{x}$, $f_1 = 1$.

6.10. 1) $f(\widetilde{x}^n)$ не является шефферовой ни при каких n. Если n четно, то $f \in T_1$. Если n нечетно, то $f \in S$.

2) При четных n функция шефферова, при нечетных $f \in T_1$.

3) $f(\widetilde{x}^n)$ шефферова при $n = 2$ и $n > 3$.

4) $f(\widetilde{x}^n)$ шефферова при $n = 4k + 1$.

5) $f(\widetilde{x}^n)$ шефферова при $n = 2k$ и $f(\widetilde{x}^n) \in S$ при $n = 2k + 1$.

6.11. Имеем $0 \notin T_1 \cup S$, $\overline{f} \notin T_0 \cup M \cup L$.

6.12. Указание. Среди трех функций, существенно зависящих от x_1, x_2, нет самодвойственных и есть хотя бы одна нелинейная.

6.13. Ясно, что $f \notin T_0 \cup T_1 \cup S$. Далее см. задачу 6.15.

6.14. В силу задачи 5.16 имеем $f \notin S$. Ясно также, что $\overline{f} \notin T_0 \cup T_1$. Далее см. задачу 6.15.

6.15. Из $f \notin T_0 \cup T_1$ следует, что $f \in M$. Если бы $f \in L$, то из $f \notin T_0 \cup$ $\cup T_1$ следовало бы, что $f \in S$, а это противоречит условию.

6.16. Пусть $S(n)$ — число шефферовых функций $f(\widetilde{x}^n)$. В силу задачи 6.15 $S(n) = |P_2^n \backslash (T_0 \cup T_1 \cup S)| = 2^{2^n - 2} - 2^{2^{n-1}-1}$.

6.17. См. задачи 2.7 и 6.15.

6.18. Поскольку $f \notin S$, найдутся наборы $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ и $\widetilde{\beta} = (\overline{\alpha}_1, \ldots$ $\ldots, \overline{\alpha}_n)$ такие, что $f(\widetilde{\alpha}) = f(\widetilde{\beta})$. Ясно, что $\widetilde{\alpha} \notin \{\widetilde{0}, \widetilde{1}\}$, ибо $f(\widetilde{0}) = 1$, $f(\widetilde{1}) =$ $= 0$. Заменим в $f(x_1, \ldots, x_n)$ x_i на x, если $\alpha_i = 1$, и на y, если $\alpha_i = 0$. Полученная таким образом функция $g(x, y)$ шефферова.

6.19. 2) а) $1 \in A$; б) $\overline{x} \in A$.

6.21. 1) $A \not\subseteq T_0$, ибо $|A| > |T_0|$. Аналогично $A \not\subseteq T_1$, $A \not\subseteq S$, $A \not\subseteq L$.

6.22. В силу задачи 3.24 из нелинейной функции f с помощью отождествления переменных можно получить функцию $F(x, y, z)$ вида $xy \oplus l_1(x, y)$ или вида $m(x, y, z) \oplus l_2(x, y, z)$, где l_1, l_2 линейны. Поскольку $f \in S$, то осуществима лишь вторая возможность. Ясно, что $F \in S \backslash (T_0 \cup T_1)$. Тогда с точностью до перестановки переменных либо $F = m(x, \overline{y}, \overline{z})$, либо

$F = \overline{m(x, y, z)}$. В обоих случаях в силу задачи 2.18 функция F, а значит, и $f(\widetilde{x}^n)$, образует базис в S.

6.23. Неверно. Например, $x\overline{y} \in T_0 \setminus (T_1 \cup L \cup M \cup S)$, но в $[\{x\overline{y}\}]$ не входит ни одна функция $f(\widetilde{x}^n)$ такая, что $|N_f| > 2^{n-1}$, например, $x_1 \vee x_2$.

6.24. 1) Неверно, рассмотреть $f = x \vee y$. 2) Верно.

6.25. Да, например, $f = x_1 \oplus x_2 \oplus x_2x_3 \oplus x_3x_4$ удовлетворяет условию задачи и при этом $f \notin S \cup M \cup L$.

6.26. 1), 2) $\mathfrak{N}(f) = \{x\}$. 3) $\mathfrak{N}(f) = \{x \oplus y, 0\}$. 4) $\mathfrak{N}(f) = \{x, x \vee y\}$.

6.27. 1) $1, x, \overline{x}, x\overline{y}, x \oplus y$. 2) $1, \overline{x}$. 3) $x, \overline{x}, x\overline{y}, x \oplus y, x \sim y, x \to y$.

4) $x^\alpha y^\beta$, $x^\alpha \vee y^\beta$, $\alpha, \beta \in \{0, 1\}$, $\alpha \leqslant \beta$, $m(x^\gamma, y, z) \oplus \delta$, $\gamma, \delta \in \{0, 1\}$.

5) $0, 1, xy, x \vee y, \overline{x}\,\overline{y}, \overline{x} \vee \overline{y}$.

6.28. 1), 2), 4) Да. 3), 5) Нет.

6.29. 1) Да. 2) Нет, поскольку $\{xy \oplus y, 1\}$ — также базис в P_2. 3) Да. 4) Нет, ибо $\{x \vee y, xy\} \subseteq \mathfrak{N}(xy \vee zt)$ и $\{0, 1, xy, x \vee y\}$ — базис в M. 5) Да.

6.30. Если $\{f\}$ — простой базис, то функция f шефферова и не может зависеть существенно более чем от двух переменных, так как в противном случае в силу задачи 6.18 имели бы $[\mathfrak{N}(f)] = P_2$.

Глава III

§ 1

1.1. 1) Рассмотреть два случая: $x = k - 1$ и $x \neq k - 1$.
2)–7) Рассмотреть два случая: $x \geqslant y$ и $x < y$.
12) Рассмотреть два случая: $x = k - 2$ и $x \neq k - 2$.
13) Рассмотреть два случая: $x = k - 1$ и $x \neq k - 1$.
14) Рассмотреть пять случаев:
а) $x = y = k - 1$; б) $x = k - 1$, $y \neq k - 1$; в) $x \neq k - 1$, $y = k - 1$;
г) $x \neq k - 1$, $y \neq k - 1$, $x \leqslant y$; д) $x \neq k - 1$, $y \neq k - 1$, $x > y$.
15) Рассмотреть четыре случая:
а) $x = y = k - 1$; б) $x = k - 1$, $y \neq k - 1$; в) $x \neq k - 1$, $y = k - 1$;
г) $x \neq k - 1$, $y \neq k - 1$.
16), 17) Рассмотреть три случая:
а) $x = k - 1$; б) $x \neq k - 1$, $x \geqslant y$; в) $x \neq k - 1$, $x < y$.
20) Рассмотреть три случая: $x = 0$, $x = 1$ и $x \geqslant 2$.
23) Рассмотреть три случая: $x = k - 1$, $x = k - 2$ и $x \geqslant k - 3$.

1.2. 2) $\sim x = \max(J_0(x), \min(x, J_1(x)))$.

3) $f_1(x) = \max(1, J_1(x^2))$, $f_2(x) = J_1(f_1(x))$, $f_2^2(x) = j_0(x)$ и $\overline{x} = \max(j_0(x), J_1(x))$.

5) Пусть $x \cdot y + x - y^2 + 1 = \varphi(x, y)$. Имеем $\varphi(x, x) = \overline{x}$, $\varphi(x, \overline{x}) = 0$. Далее получаем все константы и а) при $k = 3$ $\varphi(2, x) = j_1(x)$;
б) при $k = 5$ $\varphi(0, x) = 1 - x^2$, а значит, можно построить функции $-x^2$, x^4, $x + 4 (= x - 1)$ и $j_1(x) = 1 - (x - 1)^4$.

8) $\sim x = \max(J_0(x), J_0^2(x + 2), 2J_1(x))$.

9) $j_4(x) = (((J_2((x \dot{-} 1) \dot{-} 1) \dot{-} 1) \dot{-} 1) \dot{-} 1) \dot{-} 1$.

12) $J_{k-1}(x) = (\dots((x \dot{-} (\sim x)) \dot{-} (\sim x)) \dot{-} \dots \dot{-} (\sim x)) \dot{-} (\sim x)$ ($\sim x$ вычитается $k-2$ раз).

15) $\overline{x} = (\sim((\sim x) \dot{-} 1)) \dot{-} J_{k-1}(x)$, а $J_{k-1}(x)$ можно представить формулой над множеством $\{\sim x,\ x \dot{-} y\}$ (см. 12)).

1.4. 1) Взять $y = m-1$. 2) Рассмотреть функцию $1 \dot{-} 2x$.

1.5. Полезно воспользоваться соотношением $x \supset y = \min(k-1,\ y - x + k - 1)$, где в выражении $y - x + k - 1$ сложение и вычитание обычные, а не по модулю k. Индукцией по i можно доказать, что $h_i(x) = \min(k-1,\ i(k-1-x))$, $i = 1, 2, \dots, k-1$.

1.6. $k \neq 3, 4, 6, 12$.

1.7. При $k = 4, 6, 8, 9, 10$ число различных функций указанного вида равно соответственно 3, 2, 4, 7, 4.

1.8. $j_{k-1}(x) = J_{k-1}(x) + \dots + J_{k-1}(x)$ ($k-1$ слагаемых); $j_i(x) = j_{k-1}(x-i-1)$, $0 \leqslant i \leqslant k-2$. Если $g(x) \in P_k^{(1)}$, то $g(x) = g(0)j_0(x) + \dots + g(i)j_i(x) + \dots + g(k-1)j_{k-1}(x)$. Остается учесть, что $lj_i(x) = j_i(x) + \dots + j_i(x)$ (l слагаемых).

1.10. a_2 произвольное и (1), если $a_1 = 0$, то a_0 произвольное, (2), если $a_1 \neq 0$, то либо $a_0 = a_1$, либо $a_0 = 2a_1$ (т.е. если $a_1 \neq 0$, то $a_0 \neq 0$).

1.11. 1) $\overline{x} = \max(\min(1,\ J_0(x)),\ J_1(x)) = j_0(x) + 2j_1(x)$.

5) $J_2(x^2 + x) = \max(J_1(x),\ J_3(x)) = 4j_1(x) + 4j_3(x)$.

10) $x \dot{-} y^2 = \max(\min(1,\ J_1(x),\ J_0(y)),\ \min(1,\ J_2(x),\ J_1(y)),$
$\min(1,\ J_2(x),\ J_2(y)),\ \min(J_2(x),\ J_0(y))) =$
$= j_1(x)j_0(y) + j_2(x)j_1(y) + j_2(x)j_2(y) + 2j_2(x)j_0(y)$.

§ 2

2.1. 1) Положим $T(\{0, 2\}) = T$ и $\mathcal{U}(\{0, 1\},\ \{2\}) = \mathcal{U}$;
а) $\sim x \in T$ и $\neq \mathcal{U}$; в) $J_2(x) \in T \cap \mathcal{U}$; д) $x + y \notin T$ и $\notin \mathcal{U}$.

2) Положим $T(\{1, 3\}) = T$, $\mathcal{U}(\{0, 1\},\ \{2\},\ \{3\}) = \mathcal{U}_1$, $\mathcal{U}(\{0, 3\},\ \{1, 2\}) = \mathcal{U}_2$; в) $j_0(x) \neq T$, $\in \mathcal{U}_1$ и $\neq \mathcal{U}_2$; д) $\max(x, y) \in T \cap \mathcal{U}_1$ и $\notin \mathcal{U}_2$; е) $x^2 \cdot y \in T$, $\neq \mathcal{U}_1$ и $\neq \mathcal{U}_2$.

2.2. 3) $\mathfrak{E} = \{1\}$, $D = \{\{0\},\ \{1, 2\}\}$.
4) $\mathfrak{E} = \{2\}$, подходящее разбиение подобрать нельзя.
8) $\mathfrak{E} = \{0\}$, $D = \{\{0, 1, 4\},\ \{2, 3\}\}$.
11) $\mathfrak{E} = \{0, 1\}$, $D = \{\{0, 1\},\ \{2, \dots, k-1\}\}$.
12) $\mathfrak{E} = \{0,\ k-1\}$; $D = \{\{0, 2\},\ \{1\}\}$ при $k = 3$ и $D = \{\{0, k-1\},\ \{1, 2, \dots, k-2\}\}$ при $k \geqslant 4$.

2.3. 2) $2^k - 1$.

3) Если $\mathfrak{E} = \varnothing$, то $|(T(\mathfrak{E}))^{(n)}| = k^{k^n}$. Если $1 \leqslant m = |\mathfrak{E}| \leqslant k-1$, то $|(T(\mathfrak{E}))^{(n)}| = m^{m^n} k^{k^n - m^n}$.

2.4. 2) В P_3 существует 4 различных класса типа $\mathcal{U}(D)$, если считать и все множество P_3. В P_4 их 14, а в P_5 их 51.

3) Пусть $(i_1, i_2, \dots, i_n)$ — набор чисел из множества $\{1, 2, \dots, s\}$. Всего таких наборов s^n. Упорядочим их в лексикографическом порядке и перенумеруем, приписав номера от 1 до s^n. Набор $(1, 1, \dots, 1, 1)$ будет иметь номер 1, набор $(1, 1, \dots, 1, 2)$ — номер 2, набор $(1, 1, \dots, 1, 2, 1)$ — номер $s+1$ и т.д. Если набор $(i_1, i_2, \dots, i_n)$ имеет номер m, то

число $|\mathfrak{E}_{i_1}| \cdot |\mathfrak{E}_{i_2}| \cdot \ldots \cdot |\mathfrak{E}_{i_n}|$ обозначим через d_m. Число функций в множестве $P_k(X^n)$, сохраняющих разбиение $D = \{\mathfrak{E}_1, \mathfrak{E}_2, \ldots, \mathfrak{E}_s\}$, равно $\sum\limits_{(j_1, j_2, \ldots, j_r)} |\mathfrak{E}_{j_1}|^{d_1} \cdot |\mathfrak{E}_{j_2}|^{d_2} \cdot \ldots \cdot |\mathfrak{E}_{j_r}|^{d_r}$, где $r = s^n$ и суммирование ведется по всем наборам длины s^n, составленным из чисел, принадлежащих множеству $\{1, 2, \ldots, s\}$.

2.5. 1) Пусть d_m обозначает число $|\mathfrak{E}_{i_1}| \cdot \ldots \cdot |\mathfrak{E}_{i_n}|$, где m — номер набора $(i_1, \ldots, i_n)$ в лексикографическом упорядочении множества всех наборов длины n, состоящих из чисел 1 и 2 (как в задаче 2.4, 3), если $s = 2$). Число функций из $P_k(X^n)$, входящих в $T(\mathfrak{E}) \backslash \mathcal{U}(D)$, при $n \geqslant 1$ равно $l^{l^n} \left(k^{k^n - l^n} - \sum\limits_{(j_2, \ldots, j_r)} |\mathfrak{E}_{j_2}|^{d_2} \cdot \ldots \cdot |\mathfrak{E}_{j_r}|^{d_r} \right)$, где $\mathfrak{E}_1 = \mathfrak{E}$, $\mathfrak{E}_2 = E_k \backslash \mathfrak{E}$, $l = |\mathfrak{E}|$, $r = 2^n$ и сумма берется по всем наборам длины $2^n - 1$, составленным из чисел 1 и 2. Если $n = 0$, то таких функций нет.

2) $|(\mathcal{U}(D) \backslash T(\mathfrak{E}))^{(0)}| = |E_k \backslash \mathfrak{E}| = k - l$, где $l = |\mathfrak{E}|$. Если $n \geqslant 1$, то $|(\mathcal{U}(D) \backslash T(\mathfrak{E}))^{(n)}| = (k-l)^{l^n} \sum\limits_{(j_2, \ldots, j_r)} |\mathfrak{E}_{j_2}|^{d_2} \cdot \ldots \cdot |\mathfrak{E}_{j_r}|^{d_r}$ (l, r, j_i и d_m такие же, как в задаче 1)).

3) k, если $n = 0$, и $l^{l^n} k^{k^n - l^n} + (k-l)^n \sum\limits_{(j_2, \ldots, j_r)} |\mathfrak{E}_{j_2}|^{d_2} \cdot \ldots \cdot |\mathfrak{E}_{j_r}|^{d_r}$, если $n \geqslant 1$.

2.6. 2) $(2!)(k-3)!$.

2.7. 3) $x + x^3 - x^4$. 6) $x^2 y^2$. 7) $xy^2 + xy + 2x$.

9) $(k-1)(1 - (x+2)^{k-1}) = \sum\limits_{i=0}^{k-2} \binom{k-1}{i} 2^i x^{k-1-i}$.

10) $1 - (x - x^2 - 2)^{k-1} = \sum\limits_{i=0}^{k-2} (-1)^{i+1} \binom{k-1}{i} 2^i x^{k-1-i} (1-x)^{k-1-i}$.

2.8. 1) Достаточно реализовать полиномом функцию $2j_0(x)$, ибо $2j_i(x) = 2j_0(x-i)$ $(i = 1, 2, 3)$, $2j_0(x) = 2 + x + x^3 = 2 + 3x + 3x^3 = 2 + x + 2x^2 + 3x^3 = 2 + 3x + 2x^2 + x^3$.

2) Если $f(x) \in P_4$ и $f(E_4) \subseteq \{0, 2\}$, то $f(x)$ можно представить в виде $\sum\limits_{i=0}^{3} b_i \cdot 2j_i(x)$, где $b_i \in \{0, 1\}$ $(i = 0, 1, 2, 3)$. Если $f(E_4) \subseteq \{1, 3\}$, то рассмотреть функцию $g(x) = f(x) - 1$.

2.9. Функции $f(x) - f^2(x)$ и $f(x) - f^3(x)$ принимают значения только из множества $\{0, 2\}$.

2.10. 64. В P_4 справедливы соотношения $2x^3 = 2x^2 = 2x$ и $3x^3 = 2x + x^3$.

2.11. 1) Сравнить друг с другом функции x, x^2 и x^3 из P_6.

2) В P_6 выполняется соотношение $3x^2 = 3x$.

3) Либо $b = 2$ и $a = 2, 5$, либо $b = 4$ и $a = 1, 4$.

2.12. 1), 2), 4) Не представима. 3), 5) Представима.

2.13. 2) $T(\{1, 2\})$. 3) $\mathcal{U}(\{0, 1\}, \{2, \ldots, k-1\})$. 5) $T(\{0, k-1\})$.

9) $T(\{1, k-1\})$. 13) $\mathcal{U}(\{0\}, \{1, 2, \ldots, k-1\})$. 15) $T(\{1, k-2\})$.

2.14. 1) Такой подсистемой является множество $\{j_0(x),\ x+y\}$.

2) $\{0,\ x+y,\ x\cdot y\}\subset T(\{0\}),\quad \{j_0(x),\ j_1(x),\ \ldots,\ j_{k-1}(x)\}\subseteq T(\{0,\ 1\}),$ $\{1,\ 2,\ \ldots,\ k-1\}\subset T(\{1,\ 2,\ \ldots,\ k-1\})$.

2.15. 1) $A_1\backslash\{i\}\subset T(E_k\backslash\{i\}),\ i=1,\ \ldots,\ k-2$.

2) $A_1\backslash\{0,\ k-1,\ J_0(x),\ J_{k-1}(x)\}$.

2.16. 1) Полна. 2)–4) Не полна.

2.17. 1) Полноту в S_k данной системы можно доказать так: индукцией по i $(i\geqslant 1)$ установить, что любая функция g из S_k, удовлетворяющая условию $g(x)\equiv x$ при $x>i$, порождается функциями из множества $\{h_{01}(x),\ \ldots,\ h_{0i}(x)\}$; затем положить $i=k-1$.

2) Так как $h_{0i}(h_{i,i+1}(h_{0i}(x)))=h_{0,i+1}(x)$ $(i=1,\ 2,\ \ldots,\ k-2)$, то данная система порождает каждую функцию из задачи 1).

3) Принять во внимание, что $h_{i,i+1}(x+(k-1))+1=h_{i+1,i+2}(x)$ $(i=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ k-3)$.

2.18. Данная система порождает множество S_k. Используя функцию $x+j_0(x)$, можно построить любую функцию, выпускающую ровно одно значение (из E_k). Затем, предполагая, что имеются все функции, выпускающие не более i значений $(1\leqslant i\leqslant k-2)$, продемонстрировать, как строится произвольная функция из $P_k^{(1)}$, выпускающая $i+1$ значений.

2.19. 1), 4), 13) Породить систему Россера–Туркетта.

2), 11) Породить систему Поста.

3) Если k нечетное, то породить систему Поста. При четном k породить систему Россера–Туркетта.

5), 8)–10), 12), 15) Породить заведомо полную систему $\{j_0(x),\ x+y\}$ — см. задачу 2.14, 1).

6) Полноту этой системы можно установить методом, подобным методу доказательства полноты системы Поста.

7), 14), 16) Породить систему $\{\overline{x},\ \min(x,\ y)\}$.

2.20. 2) Функции $x+y^2$ и $xy+1$ существенные. Строим функции $\overline{x}$, $h_{01}(x)$ и $x+j_0(x)$: $j_2(j_2(x))\equiv 0,\quad x\cdot 0+1\equiv 1,\quad x\cdot 1+1=\overline{x},\quad j_2(\overline{\overline{x}})=$ $=j_2(x+2)=j_0(x),\quad x+(j_0(x))^2=x+j_0(x)\,(((x+1)+1)+\ldots+1)=x-1$ (единица прибавляется $k-1$ раз), $j_0(x-1)=j_1(x)$, $h_{01}(x)=x+j_0(x)+$ $+\underbrace{(j_1(x))^2+\ldots+(j_1(x))^2}_{k-1\text{ раз}}$.

8) Исходная функция, очевидно, существенная. Обозначим ее через $\psi(x,\ y)$. Имеем $\psi(x,\ x)=\overline{x},\ \psi(\overline{x},\ x)=\overline{\overline{x}}\cdot j_0(\overline{x}-x)+(\overline{x}-j_1(\overline{x}))j_0(x)+$ $+x\cdot j_0(\overline{x})=J_{k-1}(x),\quad J_{k-1}(\overline{J_{k-1}(x)})\equiv 0,\quad \psi(0,\ x)=j_0(x)+x,\quad \psi(x,\ 0)=$ $=h_{01}(x)$. Далее применяем теорему С. Пикар.

2.21. 1), 3), 5), 8), 10) Полна при нечетных k и не полна при четных k.

2), 4), 6), 7), 9), 14) Не полна.

11) Полна при четных k и не полна при нечетных k.

12), 13) Полна при $k=3$, не полна при $k\geqslant 4$. 15) Полна.

2.22. 2) При k простом достаточно построить систему $\{j_0(x),\ x+y\}$ — см. задачу 2.14, 1). Имеем $x-x+1\equiv 1,\ 1^2-1=0,\ x-0+1=x+1,$ $x-(y+1)+1=x-y,\quad 1\cdot x^2=x^2,\quad x^2\cdot x^2=x^4,\quad \ldots,\quad x^{k-3}\cdot x^2=x^{k-1}$ ($k-1$ — четное число, ибо k — простое число, не меньшее 3), $1-x^{k-1}=$ $=j_0(x),\ 0-x=-x,\ x-(-y)=x+y$.

9) При k простом строим функции $1,\ x+y,\ x\cdot y$. Имеем $x\cdot x-x^2=0$, $0+0+1=1,\ x+0+1=x+1,\ (x+1)+1+\ldots+1=x-1$ (единица прибавляется $k-1$ раз), $x+(y-1)+1=x+y,\ x(x+y)-x^2=x\cdot y$.

2.23. 2) Рассмотреть систему Поста.

4) Добавляя, например, функцию $\overline{x}$, легко получить систему Поста.

7) Непосредственно применить критерий полноты класса полиномов в P_k.

2.24. 1) При $k=4$, 6 можно рассмотреть функцию $f(x+1,\ x)$.

3) При $k=4$ можно рассмотреть любую из функций $(f(0,\ x))^2$, $(f(x+1,\ x))^2$ или $1-f(2,\ x)$, а при $k=6$ — функцию $1-f(4,\ x)$.

2.25. 1) $\{k-1,\ j_0(x),\ x\dot{-}y\}$. 2) $|J_0(x),\ x\dot{-}y^2\}$.

3) $\{\sim x,\ \min(x,\ y),\ x+y\}$.

4) Если k — нечетное число, то базисами являются, например, подсистемы $\{x+2,\ \max((x,y)\}$ и $\{x+2,\ x\dot{-}y\}$. Если k — четное число, то базисом является множество $\{k-1,\ x+2,\ x\dot{-}y\}$.

5) $\{j_0(x),\ x+y^2\}$.

2.26. Учесть, что $\{0,\ 1,\ \ldots,\ k-1,\ J_{k-1}(x),\ \min(x,\ y),\ \max(x,\ y)\}\subset$ $\subset {}^{Q}\mathcal{U}(\{0,\ 1,\ \ldots,\ k-2\},\ \{k-1\})$, $\min(J_i(x),\ J_{k-1}(x))\equiv 0$ $(0\leqslant i\leqslant k-2)$ и $\max(J_0(J_0(x)),\ J_0(x))\equiv k-1$.

2.28. 2) Из задачи 1) вытекает, что число таких предполных классов в P_k не больше, чем число всех подмножеств множества $P_k^{(1)}$. Но $|P_k^{(1)}|=k^k$. Значит, мощность множества всех подмножеств из $P_k^{(1)}$ равна 2^{k^k}.

2.29. 2) Обозначим функцию $j_1(x)\cdot j_2(y)$ через $\varphi(x,\ y)$. Имеем $\varphi(x,\ x)=0,\ \varphi(0,\ x)=\varphi(x,\ 0)=\varphi(0,\ 0)=0$. Значит, в K_2 содержится только одна функция, зависящая не более чем от одной переменной, и эта функция — тождественный 0.

2.32. Подсчитать число несущественных функций в $P_k^{(n)}$ и полученное выражение вычесть из k^{k^n}. Число несущественных функций в $P_k^{(n)}$ равно $(k!)\cdot n+\sum\limits_{i=1}^{k-1}(-1)^{i+1}\binom{k}{k-i}(k-i)^{k^n}$.

Глава IV

§ 1

1.1. 1), 3), 4), 9), 11), 12) Является. 2), 5)–8), 10) Не является.

13) Является, так как при $7\leqslant t\leqslant 13$ выполняются неравенства $1\leqslant$ $\leqslant 20t-t^2-90\leqslant t$.

14) Не является, ибо $y(9)=x(10)$.

1.2. 1) Не является, так как $f(\widetilde{0}^{\omega})=\widetilde{0}^{\omega}$, но $f(01\,[0]^{\omega})=\widetilde{1}^{\omega}$, т. е. первый символ выходного слова не определяется однозначно первым символом входного слова.

2) Является; $f(\widetilde{x}^{\omega})=\overline{x}(1)\,\overline{x}(2)\ldots\,\overline{x}(t)\ldots$

3) Не является. Рассмотреть $f(\widetilde{0}^{\omega})$ и $f(0\,[1]^{\omega})$.

4), 7), 10), 12) Является.

5), 6), 8), 9), 11) Не является.

13) Является; $f(\widetilde{x}^{\omega}) = 1x(1)\,1x(3)\,1x(5)\ldots$
14) Является; $f(\widetilde{x}^{\omega}) = x(1)\,0x(3)\,0x(5)\ldots$, ибо $1/3 = 0,$
$(01) = 0{,}010101\ldots$
15) Является; $f(\widetilde{x}^{\omega}) = \widetilde{0}^{\omega}$, так как $1/7 = 0,\ (001) = 0{,}001001001\ldots$
16) Является.

1.3. 1) Можно; $g(\widetilde{x}^{\omega}) = \widetilde{0}^{\omega}$. 2) Можно; $g(\widetilde{x}^{\omega}) = \overline{x}(1)\,\overline{x}(2)\ldots\overline{x}(t)\ldots$
3) Можно; $g(\widetilde{x}^{\omega}) = 0\widetilde{x}^{\omega}$. 4), 5), 9) Можно.
6), 8) Нельзя; рассмотреть входные слова $\widetilde{x}_1^{\omega} = 1\,[0]^{\omega}$ и $\widetilde{x}_2^{\omega} = \widetilde{1}^{\omega}$.
7) Можно; $g(\widetilde{x}^{\omega}) = 0[x(1)\,\&\,x(2)]^{\omega}$.
10) Можно; $g(\widetilde{x}^{\omega}) = 0x(1)\,y(3)\ldots\,y(t),\ldots$, где $y(t) =$
$= x(t-1) \oplus x(1)\cdot x(2) \oplus 1.$

1.4. 1) $r(f) = 1,\ r(g) = 4$. 2) $r(f) = 1,\ r(g) = 5$. 3) $r(f) = 4,\ r(g) = 5$.
4) $r(f) = 2,\ r(g) = 3$.
5) $r(f) = 2,\ r(g) = 3$, ибо $2/3 = 0,(10) = 0,101010\ldots$
6) $r(f) = r(g) = \infty$, так как $1/\sqrt{2}$ — иррациональное число и его двоичное разложение является непериодической дробью.
9) $r(f) = 2,\ r(g) = 4$.

1.5. 1) Пусть $v_0,\ e_1,\ v_1,\ e_2,\ \ldots,\ e_{j-1},\ v_{j-1}\ e_j$ — вершины и ребра ориентированной цепи Z, начинающейся в корне дерева и заканчивающейся тем ребром, где изменена метка. Если вершина дерева не принадлежит этой цепи, то после изменения метки на ребре e_j она (и растущее из нее поддерево) останется в том же классе эквивалентности, в котором находилась раньше. Новые классы эквивалентности могут возникнуть только при «распределении» вершин, содержащихся в цепи Z. Следовательно, вес первоначальной функции может измениться не более чем на j. Достижимость указанной оценки вытекает, например, из рассмотрения дерева, соответствующего функции $f(\widetilde{x}^{\omega}) = \widetilde{0}^{\omega}$.
2) $|r(f) - r(g)| \leqslant 2j - 1$.

1.6. 1), 2), 4)–6), 8)–10) Эквивалентны. 3), 7) Не эквивалентны.

1.7. 1) а) Не эквивалентны. б) Эквивалентны.
2) а), в) Не эквивалентны. б) Эквивалентны.
3) а), б) Эквивалентны. в) Не эквивалентны.
4) а), в) Эквивалентны. б) Не эквивалентны.
5) а), в) Не эквивалентны. б) Эквивалентны.
6) а), в) Эквивалентны. б) Не эквивалентны.
7) а) Эквивалентны. б) Не эквивалентны.
8) а), в) Не эквивалентны. б) Эквивалентны.
Указание. $f(\widetilde{x}^{\omega}) = 01\,[1100]^{\omega}$.
9) а) Не эквивалентны. б), в) Эквивалентны.
Указание. $f(\widetilde{x}^{\omega}) = 11\,[010]^{\omega}$.
10) а) Эквивалентны.
Указание. $f_{\widetilde{x}_1^2}(x(1)\,x(2)\ldots) = z(1)\,z(2)\ldots\,z(t)$, где

$$z(t) = \begin{cases} x(t), & \text{если} \quad 1 + 0 + x(1) + \ldots + x(t) < (t+2)/2 = t/2 + 1, \\ 1 & \text{в ином случае,} \end{cases}$$

$f_{\widetilde{x}_2^4}(x(1)\,x(2)\ldots) = v(1)\,v(2)\ldots\,v(t)\ \ldots$, где

$$v(t) = \begin{cases} x(t), & \text{если} \quad 0 + 0 + 1 + 1 + x(1) + \ldots + x(t) < (t+4)/2 = t/2 + 2, \\ 1 & \text{в ином случае.} \end{cases}$$

10) б) Эквивалентны.

в) Не эквивалентны. Рассмотреть функции $f_{\widetilde{x}_1^4}$ и $f_{\widetilde{x}_2^5}$ на слове $\widetilde{0}^\omega$.

11) а), б) Не эквивалентны. в) Эквивалентны.

12) а) Не эквивалентны. б), в) Эквивалентны.

Указание. Если $x(t-1)=0$, то неравенство $\sum\limits_{i=1}^{t-1}(1-x(i))i < t\cdot x(t)$ выполняется только тогда, когда все $x(i)$ при $i=1,\,2,\,\ldots,\,t-2,\,t$ равны 1.

13) а), б) Не эквивалентны. Рассмотреть остаточные функции на слове $0\,[1]^\omega$.

в) Эквивалентны.

1.8. 1) Указание. Для любой остаточной функции φ функции f_0 имеем $\varphi(0x(2)\ldots)=y(1)\ldots$ и $\varphi(1x(2)\ldots)=\overline{y}(1)\ldots$

2) Указание. Всякая остаточная функция φ функции f_0, отличная от самой функции f_0, обладает следующим свойством: $\varphi(0x(2)\ldots)=1\overline{x}(2)\ldots$

5) Указание. Если φ — остаточная функция функции f_0, то $\varphi(\widetilde{0}^\omega)=\widetilde{0}^\omega$. Сравнить с $f_1(\widetilde{0}^\omega)$.

6) Указание. При $s\geqslant 2$ остаточная функция φ функции f_0, порожденная словом $\widetilde{x}^s$, удовлетворяет условию $\varphi(0x(2)\ldots)=\varphi(1x(2)\ldots)$.

1.9. 2) Можно взять остаточную функцию функции f_0, порожденную произвольным словом длины 2.

5) Исследовать остаточную функцию функции f_0, порожденную словом $\widetilde{x}^2=11$.

6) Рассмотреть остаточную функцию функции f_0, порожденную словом $\widetilde{x}^3=011$.

8) $f_0(\widetilde{x}^\omega)=00[0111]^\omega$, $f_1(\widetilde{x}^\omega)=[1101]^\omega$.

1.10. 1), 2), 4), 5), 11), 12), 20) О.-д. функция веса 2.

3), 7)–10), 21) О.-д. функция веса 3. 6), 18) О.-д. функция веса 4.

13), 16) Функция не является ограниченно-детерминированной.

14), 19) О.-д. функция веса 5. 15) Вес функции равен 7.

17) Вес функции равен $2l$.

1.11. 1) Порождается булевой функцией $g(x)\equiv 1$.

2), 3) Порожденной не является.

4) Порождается булевой функцией $g(x)\equiv\overline{x}$.

5) Является порожденной. 6), 7) Порожденной не является.

8) Порождается парой булевых функций: $g_1(x)\equiv 0$ и $g_2(x)\equiv 1$.

9) Порождается парой булевых функций: $g_1(x)\equiv x$ и $g_2(x)\equiv x$.

10) Порожденной не является.

11) Порождается булевой функцией $g(x_1,\,x_2)=x_1\to x_2$.

1.13. 1) а) У функции $f(\widetilde{x}^\omega)$ попарно неэквивалентные остаточные функции исчерпываются функциями $f(\widetilde{x}^\omega)$, $f_{\widetilde{x}^i}(\widetilde{x}^\omega)$ $(i=1,\,\ldots,\,l)$, где $\widetilde{x}^i$ — произвольное входное слово длины i. Вес каждой из этих $l+1$ функций равен $l+1$.

2) б) Указание. Если $\widetilde{x}^s$ — входное слово длины $s\geqslant l$, то $f_{\widetilde{x}^s}(\widetilde{x}^\omega)=\widetilde{1}^\omega$.

3) а) Соответствующая остаточная функция веса r $(r=3,\,\ldots,\,l+2)$ порождается входным словом $\widetilde{1}^{l-r+2}$ (если $r=l+2$, то слово пустое).

б) Один из бесконечных классов эквивалентности состоит из функций, тождественно равных $\widetilde{0}^{\omega}$, а другой — из функций вида f: $y(t) = x(1)$ & & $x(2)$ & $\ldots$ & $x(t)$, $t \geqslant 1$.

4) а) См. задачу 3), б). Представители бесконечных классов эквивалентности такие же.

5) а) Элементы одного бесконечного класса эквивалентности порождаются словами вида $\widetilde{0}^{l}\widetilde{x}^{s}$ $(s \geqslant 0)$, а другого — словами вида $\widetilde{x}^{m}$, отличными от $\widetilde{0}^{m}$ $(m = 1, \ldots, l)$, и еще словами $\widetilde{x}_1^{l}\widetilde{x}_2^{n}$, где $\widetilde{x}_1^{l}$ — слово, отличное от $\widetilde{0}^{l}$, а $\widetilde{x}_2^{n}$ — произвольное слово длины $n \geqslant 1$.

б) Кроме остаточных функций из двух бесконечных классов эквивалентности у функции $f(\widetilde{x}^{\omega})$ имеются еще остаточные функции, порождаемые словами $\widetilde{0}^{s}$ $(s = 0, 1, \ldots, l-1)$. Эти функции попарно не эквивалентны, и если $s_1 > s_2$, то $f_{\widetilde{0}^{s_1}}$ является остаточной функцией функции $f_{\widetilde{0}^{s_2}}$.

в) Следует из а) и б).

1.14. 1), 2), 4), 5) Два бесконечных класса эквивалентности и один одноэлементный. Вес функции f равен 3.

3), 8) Три бесконечных класса эквивалентности и один одноэлементный.

6), 7) Три бесконечных класса эквивалентности.

9) Семь бесконечных классов эквивалентности и три одноэлементных.

10) Четыре бесконечных класса эквивалентности и три одноэлементных.

1.15. 1), 11) Автономная функция веса 2.

2), 3) Автономная порожденная функция.

4) Автономная функция веса 3. 5) Автономной не является.

6) Автономная функция бесконечного веса.

7) Автономная функция веса $2l$.

8)–10) Автономная порожденная функция.

1.17. 2) Рассмотреть функцию $f(\widetilde{x}^{\omega}) = 0\widetilde{x}^{\omega}$. Ее вес равен 2. Вершина ранга 2, соответствующая входному слову $\widetilde{1}^{2} = 11$, не эквивалентна корню дерева (вершине ранга 0), так как $f_{\widetilde{1}^{2}}(\widetilde{x}^{\omega}) = 1\widetilde{x}^{\omega}$.

1.19. 1) Мощность гиперконтинуума $(2^{\mathfrak{c}})$.

2) Мощность континуума $(\mathfrak{c})$. 3) Множество счетно-бесконечное.

4) Мощность континуума. 5) $2^{2^{\pi}}$. 6) $4^{2^{l-1}-1}$.

7) Мощность континуума. 8) Множество счетно-бесконечное.

9) Мощность континуума. 10) Мощность каждого из множеств равна $\mathfrak{c}$.

§ 2

2.1. 1) $y(t) = q(t-1) \to x(t)$, $q(t) = x(t)$, $q(0) = 0$.

2) $y(t) = q(t-1)$, $q(t) = x(t) \mid q(t-1)$, $q(0) = 0$.

3) Диаграмма Мура изображена на рис. О.4.1, *а*.

4) $y(t) = x(t) \cdot q_1(t-1) \to q_2(t-1)$, $q_1(t) = q_1(t-1) \vee q_2(t-1)$, $q_2(t) = x(t) \cdot \overline{q}_1(t-1) \vee (q_1(t-1) \sim q_2(t-1))$, $q_1(0) = q_2(0) = 0$.

5) Рис. О.4.1, *б*. 6) Рис. О.4.1, *в*. 7) Рис. О.4.1, *г*. 8) Рис. О.4.1, *д*. 9) Рис. О.4.1, *е*. 10) Рис. О.4.1, *ж*. 12) Рис. О.4.1, *з*.

13)–15), 22) Указание. Вес функции равен 2.

16), 18), 19), 24), 28), 35) Указание. Вес функции равен 3.

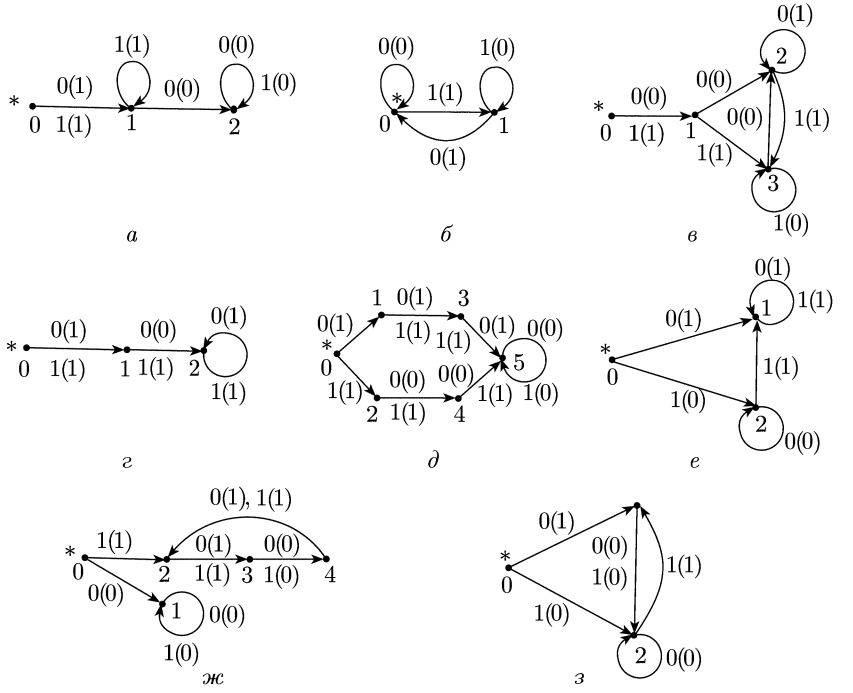


Рис. О.4.1

17), 25), 30), 37) Указание. Вес функции равен 6.
21), 23), 27) Указание. Вес функции равен 4.
32), 34), 36) Указание. Вес функции равен 5.
39), 40) Указание. Вес функции равен 7.

2.2. 1) Рис. О.4.2, *а*. 2) Рис. О.4.2, *б*.
3) Эквивалентны вершины 1 и 2. Рис. О.4.2, *в*.
4) Рис. О.4.2, *г*. 5) Рис. О.4.2, *д*.
6) Эквивалентны вершины 1, 2 и 3; рис. О.4.2, *е*.
7) Эквивалентны вершины в парах {0, 2} и {1, 3}; см. рис. О.4.2, *ж*.
8) Эквивалентны вершины в тройках {0, 3, 5} и {1, 2, 4}; рис. О.4.2, *з*.
9) Рис. О.4.2, *и*. 10) Рис. О.4.2, *к*. 11) Рис. О.4.2, *л*.

2.3. 1) Добавить дугу (1, 0) с меткой 0(0).
4) Добавить дугу (0, 1) с меткой 0(1) и дугу (3, 0) с меткой 1(0).
7) Добавить дугу (2, 3) с меткой 1(0).

2.4. 1) Вес равен 1. 2), 5) Вес равен 4. 3), 7), 8) Вес равен 2.
4), 6), 9), 10) Вес равен 3.

2.5. 1) Подходящая диаграмма изображена на рис. 0.4.3, *а*.
2) Рис. О.4.3, *б*. 3) Рис. О.4.3, *в*. 4) Рис. О.4.3, *г*. 5) Рис. О.4.4, *а*.
6) Рис. О.4.4, *б*. 7) Рис. О.4.4, *в*. 8) Рис. О.4.3, *г*.

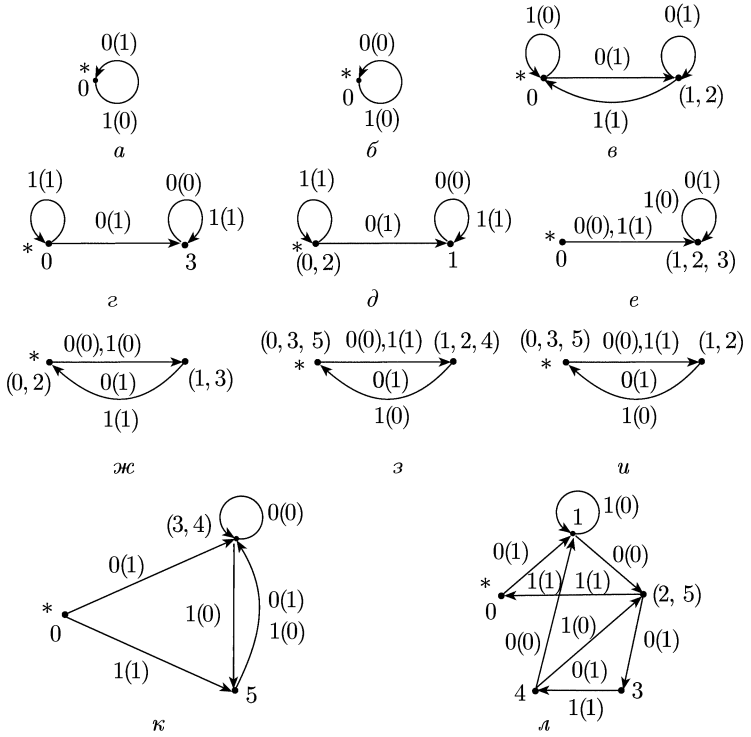


Рис. О.4.2

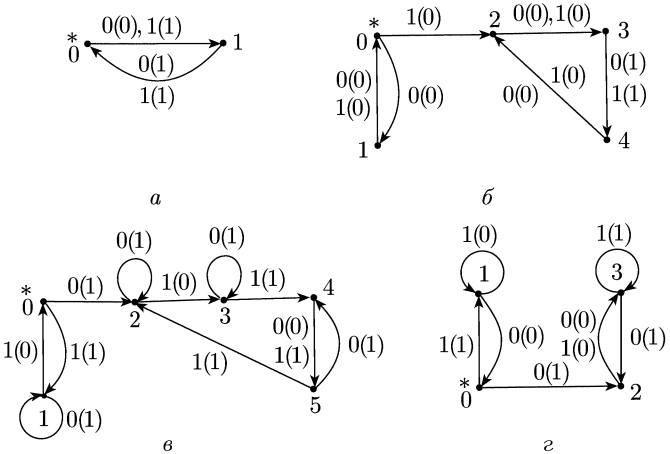


Рис. О.4.3

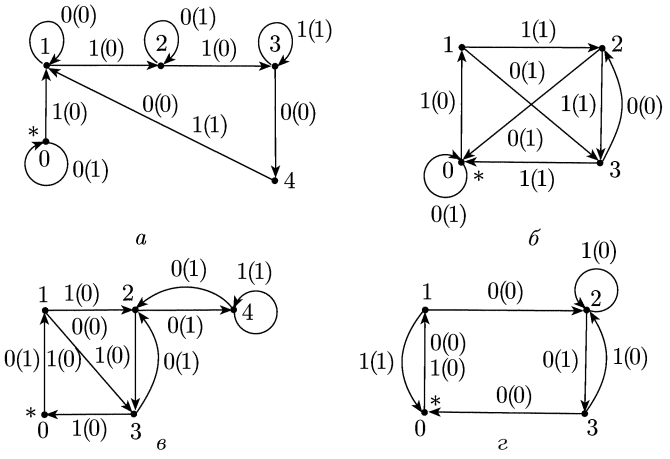


Рис. О.4.4

2.6. 1) Число различных диаграмм Мура, получающихся из данного ориентированного графа, равно 32. Приведенными являются 24 диаграммы; они соответствуют различным о.-д. функциям из $P^{1,1}_{2,\text{од}}$.

2) Всего 64 диаграммы Мура, 16 диаграмм не являются приведенными, 48 соответствуют различным о.-д. функциям веса 2 из $P^{1,1}_{2,\text{од}}$.

3) Всего 32 диаграммы, 24 приведенные, и все они задают различные о.-д. функции из $P^{1,1}_{2,\text{од}}$.

4) 16 различных диаграмм, приведенных 12, и все они соответствуют различным о.-д. функциям из $P^{1,1}_{2,\text{од}}$.

5) 512 различных диаграмм, 480 приведенных (они соответствуют разным о.-д. функциям веса 3 из $P^{1,1}_{2,\text{од}}$).

6) 256 различных диаграмм, 240 приведенных (все они соответствуют разным о.-д. функциям из $P^{1,1}_{2,\text{од}}$).

7), 8) 512 различных диаграмм, 432 приведенных (все они соответствуют разным о.-д. функциям веса 3 из $P^{1,1}_{2,\text{од}}$).

9) 512 различных диаграмм, приведенных 336. Число разных о.-д. функций из $P^{1,1}_{2,\text{од}}$, задаваемых этими приведенными диаграммами, равно 168.

10) 64 различные диаграммы, приведенных 60, и все они соответствуют разным о.-д. функциям веса 3 из $P^{1,1}_{2,\text{од}}$.

11) 4096 ($= 2^{12}$) различных диаграмм; приведенных 4032 (они задают попарно различные о.-д. функции веса 4 из $P^{1,1}_{2,\text{од}}$).

12) 512 различных диаграмм, приведенных 504 (они соответствуют разным о.-д. функциям веса 4 из $P^{1,1}_{2,\text{од}}$).

2.7. 2) 144 о.-д. функции.

2.8. 1)
$$y(t) = q_1(t-1) \vee \overline{x}(t)\,\overline{q}_2(t-1),$$
$$q_1(t) = \overline{x}(t)\,\overline{q}_2(t-1),$$
$$q_2(t) = \overline{x}(t)\,q_2(t-1),$$
$$q_1(0) = 1, \quad q_2(0) = 0.$$

Вес суперпозиции $f_1(f_2)$ равен 2, она может быть задана следующими каноническими уравнениями и начальными условиями:

$$y(t) = x(t) \to q(t-1), \quad q(t) = \overline{x}(t), \quad q(0) = 1,$$

т. е. она «функционирует» так же, как функция f_1.

2) Указание. Вес суперпозиции равен 3.

3) Суперпозиция является функцией веса 1.

5) Суперпозиция f_1 (f_2) имеет вес 2 и может быть задана следующими каноническими уравнениями и начальным условием:

$$y(t) = q(t-1), \quad q(t) = x(t) \to q(t-1), \quad q(0) = 0.$$

6) Указание. Вес суперпозиции равен 4.

7) Указание. Суперпозиция имеет вес 2.

8) Указание. Вес суперпозиции равен 5.

2.9. 1) Указание. Получается о.-д. функция веса 2.

2) Указание. Получается функция, порожденная отрицанием.

7) а)–в) Указание. Получается функция веса 2.

8) а) Указание. Получается функция веса 3.

б) Указание. Получается функция веса 4.

2.10. 1) Вес равен 1. 2) а) Вес 2. б) Вес 1. 3) а), в) Вес 1. б) Вес 2. 4) а), б) Вес 4. 5) а) Вес 2. б) Вес 1. 6) а), в) Вес 1. б) Вес 2. 7) а) Вес 4. б), д) Вес 2. в), г) Вес 3.

(В д) эквивалентны вершины в парах (00, 01) и (10, 11).)

2.11. 1) а) Вес равен 4. б) Вес 2. 2) а), б) Вес 3. 3) а) Вес 1. б), в) Вес 2. 4) а)–в) Вес 2.

2.12. 1), 4) Вес равен 4. 2) Вес 2. 3) Вес 3. 5) Вес 7.

2.13. 1) Указание. Воспользоваться схемой для функции f_2 из примера 10, б).

12) Указание. Вес функции равен 3.

15) Канонические уравнения и начальные условия для некоторого доопределения функции можно записать в следующем виде:

$$\begin{aligned} &y(t) = x(t) \sim q_2(t-1),\\ &q_1(t) = x(t) \cdot \overline{q}_1(t-1) \cdot \overline{q}_2(t-1),\\ &q_2(t) = \overline{x}(t) \cdot \overline{q}_1(t-1) \cdot \overline{q}_2(t-1),\\ &q_1(0) = q_2(0) = 0. \end{aligned}$$

2.14. 3)

$$\begin{aligned} &y(t) = q_1(t-1) \cdot \overline{q}_2(t-1),\\ &q_1(t) = \overline{x}(t),\\ &q_2(t) = q_1(t-1),\\ &q_1(0) = q_2(0) = 0; \end{aligned}$$

7)

$$\begin{aligned} &y_1(t) = x_2(t) \cdot q_1(t-1) \vee q_2(t-1),\\ &y_2(t) = \overline{x}_1(t) \cdot q_3(t-1),\\ &q_1(t) = x_2(t) \cdot q_1(t-1) \vee q_2(t-1),\\ &q_2(t) = x_1(t),\\ &q_3(t) = x_2(t),\\ &q_1(0) = q_2(0) = q_3(0) = 0. \end{aligned}$$

2.15. 1) Реализуемая схемой о.-д. функция может быть описана следующими каноническими уравнениями и начальным условием:

$$y(t) = \overline{x}(t) \cdot q(t-1),$$
$$q(t) = x(t),$$
$$q(0) = 0.$$

Новая схема изображена на рис. О.4.5, *а*.

2) $$y(t) = \overline{x}(t) \vee \overline{q}(t-1),$$
$$q(t) = 1,$$
$$q(0) = 0.$$

Схема с выходом $y(t) = x(t)q(t-1)$ приведена на рис. О.4.5, *б*.

2.16. 2) а) Можно взять схему, изображенную на рис. О.4.6, *а*. Она реализует функцию $f_{\equiv 0}(x)$, порожденную тождественным путем.

б) См., например, схему на рис. О.4.6, *б*. Она реализует функцию $\varphi_3(\varphi_3(\ldots\varphi_3(x)\ldots))$.

в) Для $r = 1$ и $r = 4$ соответствующие схемы приведены в задачах а) и б). Для $r = 2$ подходит любая схема из задачи 2.15, а для $r = 3$ — схемы из задачи 2.13 (см. 12), 14), 15)).

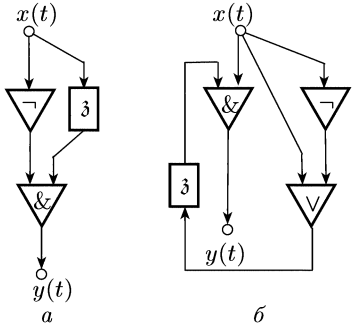


Рис. О.4.5

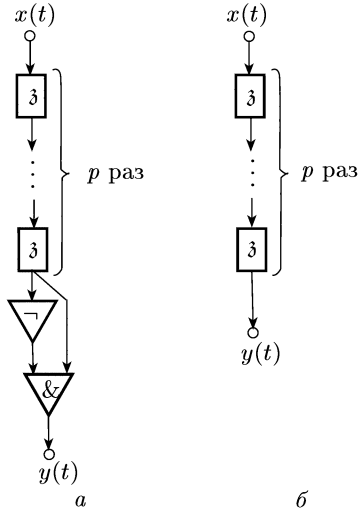


Рис. О.4.6

2.17. 1), 2) Единичная задержка строится из f_2 отождествлением переменных.

3) Получить из f_1 функцию $f_{\equiv 0}(x)$, порожденную тождественным путем, и подставить ее подходящим образом в f_2.

4) Рассмотреть функции $\varphi_1(x) = f_2(x, \overline{x}, x)$, $\varphi_2(x) = f_1(\varphi_1(x))$, $\varphi_3(x) = f_2(\varphi_1(x), x, \varphi_2(x))$ и $\varphi_4(x, y) = f_2(x, y, \varphi_1(x))$.

5) Рассмотреть функции $\psi_1(x) = f_2(x, x)$, $\psi_2(x, y) = f_1(x, y, \psi_1(x))$ и $\psi_3(x) = f_2(x, \psi_1(x))$.

6) Единичная задержка и функция, порожденная стрелкой Пирса, строятся так: $\varphi_1(x) = f_2(x, x, x)$, $\varphi_2(x) = f_1(x, \varphi_1(x))$, $\varphi_3(x, y) = f_1(x, \varphi_2(y))$, $\varphi_4(x) = f_1(x, x)$, $\varphi_5(x) = f_2(\varphi_1(x), \varphi_4(x), x)$, $\varphi_6(x) = \varphi_2(\varphi_5(\varphi_2(x)))$.

7) Нужные функции получаются так: $\psi_1(x) = f_1(x, x)$, $\psi_2(x) = \psi_1(f_2(x))$.

8) Из функции f_1 получить функцию $f_{\equiv 1}(x)$, порожденную тождественной единицей, и подходящим образом подставить ее в f_2.

9) Из f_1 получить функцию $f_{\equiv 0}(x)$ и подставить ее в f_2.

10) Построив из f_2 функцию $f_{\equiv 0}(x)$ и подставляя ее в f_2, получаем (на одном из выходов) функцию $f_{\equiv 0}(x)$. Затем надо рассмотреть функцию $f_2(f_{\equiv 0}(x), x)$.

11) Вводя обратную связь по переменным x_3 и y_2 в функции f_2, получаем функцию, порожденную конъюнкцией. Затем надо построить функцию $f_{\equiv 0}(x)$ и рассмотреть суперпозицию $f_2(f_1(x), f_1(x), f_{\equiv 0}(x))$.

12) Подставляя в f_2 подходящим образом функцию $f_1(x, x)$, получаем функцию $f_{\equiv 1}(x)$. Задержку можно построить, вводя обратную связь в функции f_2 по переменным x_2 и y_2.

13) Из f_1 построить $f_{\equiv 0}(x)$. Затем подставить ее в f_2 вместо переменной x_1.

14) Рассмотреть функцию $\varphi_1(x) = f_2(x, x, x)$, $\varphi_2(x) = f_1(\varphi_1(x))$ и $\varphi_3(x, y) = f(x, y, x)$.

15) Рассмотреть функции $f_1(x, f_1(x, x))$ и $f_2(x_1, x_2)$.

2.18. 1) Полагая $x_3 = x_2$, получаем функцию, порожденную штрихом Шеффера. Затем построить функции $f_{\equiv 0}(x)$, $f_{\equiv 1}(x)$, $f_{\overline{x}}(x)$ и рассмотреть суперпозицию $f(f_{\equiv 1}(x), f_{\equiv 1}(x), f_{\equiv 0}(x), f_{\overline{x}}(x))$.

2) $f(x_1, x_2, x_3) = f_{\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2}(x_1, x_2)$; значит, $[f]_{\mathcal{O}} \supset \{f_{\equiv 0}(x), f_{\equiv 1}(x), f_{\overline{x}}(x)\}$. Далее, $\varphi_3(x) = f_{\overline{x}}(f(f_{\equiv 1}(x), x, f_{\equiv 0}(x)))$.

3) Если $x_2 = x_1$, то $f(x_1, x_1, x_3) = f_{\overline{x}_1 \,\&\, \overline{x}_3}(x_1, x_3)$. Строим $f_{\equiv 0}(x)$ и $f_{\equiv 1}(x)$, затем задержку $\varphi_3(x) = f(x, f_{\equiv 0}(x), f_{\equiv 1}(x))$.

4) Полагая $x_3 = x_2$, получаем функцию $f_{\overline{x}_1 \,\&\, \overline{x}_2}(x_1, x_2)$. Кроме того, $\varphi_3(x) = f(f_{\equiv 1}(x), x, f_{\equiv 0}(x))$.

5) Полагая $x_3 = x_1$, получаем, что на одном выходе функции $f(x_1, x_2, x_1)$ реализуется функция $f_{\overline{x}_1}(x_1)$, а на другом — функция $f_{x_2 \to x_1}(x_1, x_2)$. Затем строим $f_{\equiv 0}(x)$, $f_{\equiv 1}(x)$ и задержку $\varphi_3(x) = f_{\overline{x}}(f(f_{\equiv 1}(x), f_{\equiv 1}(x), f_{\overline{x}}(x)))$ (по выходному каналу y_2).

2.19. 1) Можно удалить $f_{\equiv 0}(x)$ (она получается из $\varphi_3(x)$ с помощью операций объединения, отождествления входов и обратной связи; см. пример 10, д) в п. 3).

2) Можно удалить две первые функции, так как

$$f_{x \to y}(x, x) = f_{\equiv 1}(x), \quad \varphi_3(f_{\overline{x}}(f_{\equiv 1}(x))) = f_{\equiv 0}(x),$$

$$f_{x \to y}(x, f_{\equiv 0}(x)) = f_{\overline{x}}(x), \quad f_{x \sim y}(x, y) = f_{x_1 \,\&\, x_2}(f_{x \to y}(x, y), f_{y \to x}(x, y))$$

и

$$f_{x \,\&\, y}(x, y) = f_{\overline{x}}(f_{x \to y}(x, f_{\overline{y}}(y))).$$

3) Можно удалить две первые функции, так как:

а) $\varphi_3(f_{x \cdot y}(x, x) = \varphi_3(x)$;

б) из φ_3 с помощью операций объединения, отождествления входов и обратной связи строится $f_{\equiv 0}(x)$;

в) $f_{x \vee \overline{y}}(f_{\equiv 0}(x), y) = f_{\overline{y}}(y)$; г) $f_{x \,\&\, y}(x, y) = f_{\overline{x}}(f_{x \vee \overline{y}}(f_{\overline{x}}(x), y))$;

д) $f_{x \oplus y}(x, y) = f_{\overline{x}}(f_{x_1 \,\&\, x_2}(f_{x \vee \overline{y}}(x, y), f_{\overline{x} \vee y}(x, y))$.

4) Можно удалить $f_{\overline{x}}(x)$, ибо $f_{x\vee y}(\varphi_j(f_{\equiv 0}(x)),\ f_{\overline{y}}(y)) = f_{\overline{y}}(y)$.

5) Можно удалить первую и третью функцию, так как:

а) с помощью операций объединения, отождествления входов и обратной связи из последней функции системы A получается функция $f_{\equiv 1}(x)$;

б) из $f_{x\cdot\overline{y}}(x,\ y)$ и $f_{\equiv 1}(x)$ можно построить всякую порожденную функцию из $\widehat{P}_{2,\text{од}}$;

в) $\varphi_j(x) = f_{\overline{x}}(f_{\overline{x}}(\varphi_j(f_{\overline{x}}(f_{\overline{x}}(x)))))$.

2.20. 1) Содержится, ибо $\varphi_j(x) = \varphi_j(f_{\overline{x}}(f_{\overline{x}}(x)))$ и $f_{\equiv 0}(x)$ есть в $[\varphi_j(x)]_{\{O_1,\,O_3,\,O_4\}}$.

2) Содержится.

3) Содержится, ибо $f_{x\to y}(x,\ f_{\equiv 0}(x)) = f_{\overline{x}}(x)$, а $f_{\equiv 0}(x)$ есть в $[\varphi_j(x)]_{\{O_1,\,O_3,\,O_4\}}$.

4) Содержится.

Указание. Вводя обратную связь во второй и третьей функциях, получаем $f_1(x) = [01]^\omega$ и $f_2(x) = [10]^\omega$. Затем надо воспользоваться $f_{x\vee y}(x,\ y)$.

5) а) Не содержится.

Указание. Установить, что каждая функция из A «сохраняет» множество последовательностей $V = \{\widetilde{\alpha}^\omega = \alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_t\ldots \mid \exists\, t_0\ \ (\forall t\ \ ((t \geqslant t_0) \Rightarrow (\alpha_t = 0))) \vee \exists\, t_1\ \ (\forall t\ \ ((t \geqslant t_1) \Rightarrow (\alpha_t = 1)))\}$.

б) Содержится.

Указание. Рассмотреть функцию, получающуюся из функции $\varphi_j(\varphi_j(f_{\overline{x}}(x)))$ введением обратной связи.

2.21. 1) Добавить $f_{m(x,\,y,\,z)}(x,\ y,\ z)$. 2) Добавить $f_{x\cdot y}(x,\ y)$.

3) Добавляя только одну функцию из B, систему до полной расширить нельзя.

Указание. Замкнутые классы, получающиеся при этом, состоят из функций, сохраняющих множество последовательностей V, описанное в ответе к задаче 2.20, 5), а). Значит, в них не содержится, например, функция $f(x) = [01]^\omega$. При обосновании свойства сохранения множества V в случае рассмотрения операции обратной связи удобно использовать представление о.-д. функции (к которой применяется операция обратной связи) в виде канонических уравнений.

4) Добавить $f_{x\sim y}(x,\ \varphi_j(y))$. 5) Добавить $f_{\overline{x}}(\varphi_j(y))$.

Глава V

§ 1

1.1. 1) а) $T(P) = 1^2$. б) $T(P) = 1$. в) К слову 1^6 не применима.

2) а) $T(P) = 1^3 01$. б), в) $T(P) = 1^7$.

3) а) $T(P) = 10^2 1^2 01^3$. б) $T(P) = 10^4 1^3$. в) $T(P) = 101^2 0^2 1$.

4) а)–в) К данному слову не применима.

5) а) К слову 1^2 не применима. б) $T(P) = 1^3$. в) $T(P) = 1^4$.

1.2. 1) Одна из возможных машин задается такой программой: $q_1 1 q_1 1 R$.

2) Программа одной из таких машин: $q_1 0 q_1 0 R$, $q_1 1 q_1 1 R$.

3) Программа одной из таких машин: $q_1 0 q_1 0 S$, $q_1 1 q_1 1 S$.

4) Одна из возможных машин задается следующей программой:

$$q_10q_20R, \quad q_11q_21R, \quad q_20q_10R.$$

1.3. 1) а) $q_01[01]^2$, 2) б) $1[10]^2q_01$. 3) б) $10q_01^301$. 4) а) $1^20^6q_01$.
5) а) $1^20^21q_001$. в) $[10]^20q_01^2$.

1.4. 3) Программа одной такой машины имеет вид

$$\begin{array}{llll} q_10q_20L & q_31q_40R & q_51q_51R & q_80q_30R \\ q_20q_30R & q_40q_50R & q_60q_71L & q_81q_81L \\ q_21q_21L & q_41q_41R & q_70q_80L & \\ q_30q_00R & q_50q_61R & q_71q_71L & \end{array}$$

1.5. 2) Пусть $q_{01}, \ldots, q_{0m}$ $(m \geqslant 1)$ — все заключительные состояния заданной машины Тьюринга. Нужную машину можно построить так: заменяем каждую команду вида $q_i\alpha q_{0j}\beta D$ (α, β — символы внешнего алфавита, $D \in \{S, L, R\}$) на команду $q_i\alpha q'_j\beta D$, где q'_j — новое состояние (для каждого состояния q_{0j} свое).

1.6. Для построения машины T_m достаточно добавить m дополнительных (новых) состояний $q'_1, \ldots, q'_m$ и «пополнить» программу машины T, например, такими командами: $q'_1\alpha q'_1\alpha S, \ldots, q'_m\alpha q'_m\alpha S$, где α — какой-то фиксированный символ из внешнего алфавита.

1.7. Таких машин 15.

1.8. 1) Одна из возможных программ: q_11q_20L, q_20q_01S, q_21q_21L.
2) Одна из подходящих программ: q_10q_10R, q_11q_01R.
5) Одна из возможных программ: q_10q_21R, $q_20q_31R, \ldots, q_i0q_{i+1}1R, \ldots$ $\ldots, q_{2l-1}0q_{2l}1R, q_{2l}0q_01S, q_11q_21R, q_21q_31R, \ldots, q_i1q_{i+1}1R, \ldots, q_{2l-1}1q_{2l}1R$.

1.9. 1) а) Композиция T_1T_2 к $1^30^21^2$ не применима.
2) а) $(T_1T_2)(P) = 1[10]^2[01]^31$. 3) б) $(T_1T_2)(P) = 1^201^202^21^2$.

1.10. 1) а), б) Указанная итерация к словам вида 1^{3k} и 1^{3k+1} $(k \geqslant 1)$, не применима.
в) Итерация применима к любому слову вида 1^{3k+2} $(k \geqslant 1)$, и в результате получается слово 1.
3) Итерация к данным словам применима, результат — слово 1^{2x+y+1}.

1.11. 1) $T(P) = 10^41$. 2) б) $T(P) = 1^x0101^y01^z01$.

1.12. 2) $\alpha T_1 \underset{1}{|q'_{10}} \underset{1,3}{__|} T_1 \underset{2}{|q'_{10}} \omega \underset{2}{__|} T_2T_4T_3 \underset{3}{|__}$.

3) $\alpha T_5 \underset{3}{|q'_{50}} \underset{1}{__|} T_5 \underset{2}{|q'_{50}} T_1(P) = T_2T_1T_3T_3T_4 \underset{1}{|__} \underset{2}{__|} T_4 \underset{3}{__|} T_1T_3\omega$.

1.13. 1) $T(P) = 1^x01^{x+y}$.
2) $T(P) = 1^x$, если $x \geqslant y \geqslant 1$, $T(P) = 1^y$, если $y > x = 1$, и $T(P) = 1^{x-1}01^{y-x+1}$, если $y > x \geqslant 2$.

1.14. 6) Функция определена только при $x = 0, 1$. Одна из возможных программ такова: q_10q_01S, q_11q_21R, q_20q_11R, q_21q_31R, q_31q_31S.
12) Указание. Функция определена только на следующих парах значений аргументов: $(0, 1)$, $(0, 2)$, $(1, 1)$ и $(2, \beta)$, где $\beta \geqslant 1$.

1.15. 3) Функция определена только при $x = 2, 3$. Одна из возможных программ: q_10q_01S, q_11q_20R, q_20q_20S, q_21q_30R, q_30q_30S, q_31q_40R, q_40q_11L, q_41q_50R, q_50q_41L, q_51q_51S.

1.16. 1) $f(x) = x + 1$, $f(x, y) = x + y + 1$. 3) $f(x) \equiv 0$, $f(x, y) = y + 1$.
6) $f(x)$ нигде не определена, $f(x, y) = y$.

1.17. Если машины начинают работу с самой левой единицы кода числа x, то вычисляются следующие три функции: x, $x-1$ и нигде не определенная.

1.18. 1) Подходящая программа: q_10q_31R, q_11q_21R, q_20q_10R, q_21q_11R, q_30q_40R, q_31q_41R, q_40q_01S.

1.19. 1) а) Данному l-кратному коду соответствует решетчатый код, расположенный на двух решетках, со следующей парой слов: 1 и 11. Значит, надо построить машину T, удовлетворяющую условию: начав работу на первой единице слова $1^l0^l1^{2l}$, она выдает слово 1101 (решетчатый код набора (0, 1)). Подходящая программа: q_10q_20R, q_11q_10R, q_20q_20R, q_21q_30R, q_30q_41R, q_31q_30R, q_40q_51R, q_50q_60R, q_60q_01S.

§ 2

2.1. 4) $f(x)=nx$; $f(0)=n\cdot 0=0$, $f(x+1)=h(x,\,f(x))=n(x+1)=$ $=nx+n=f(x)+n=\underbrace{s(s\,\ldots\,s}_{n\text{ раз}}(f(x))\ldots)$. Значит,

$$h(x,\,y)=\underbrace{s(s\,\ldots\,s}_{n\text{ раз}}(y)\ldots)=I_2^2(x,\,\underbrace{s(s\,\ldots\,s}_{n\text{ раз}}(y)\ldots)).$$

7) Указание. Для требуемого примитивно рекурсивного описания функции $x\cdot y$ на «первом этапе» нужны функции $g(x)=O(x)$ и $h(x,\,y,\,z)=x+I_3^3(x,\,y,\,z)$. «Второй этап» связан с описанием функции $h(x,\,y,\,z)$.

2.2. 1) $f(x,\,y)=x(y+1)$. 2) $f(x,\,y)=x+(y\dot{-}1)$.

4) $f(x,\,y)=3^{x+y(y\dot{-}1)/2}$. 5) $f(x,\,y)=\overline{\operatorname{sg}}\,y+(x\dot{-}(y\dot{-}1))\cdot\operatorname{sg}y$.

7) $f(x,\,y)=(2x)\,\overline{\operatorname{sg}}\,y+(y\dot{-}1)\,\overline{\operatorname{sg}}\,((y\dot{-}1)\dot{-}x)$.

8) $f(x,\,y)=\operatorname{sg}x\cdot\overline{\operatorname{sg}}\,y+x\cdot\operatorname{sg}(y\dot{-}1)$.

2.3. 3) $\max(x,\,y)=(x\dot{-}y)+y$.

8) Указание. $f(x)=\sum\limits_{i=0}^{m}a_i\cdot\overline{\operatorname{sg}}\,|x-i|+c\cdot\prod\limits_{i=0}^{m}\operatorname{sg}|x-i|$.

9) Указание. $f(x)=x\cdot\chi(x)$, где $\chi(x)=x\dot{-}2[x/2]$ — характеристическая функция множества нечетных чисел.

10) $f_m(x)=\overline{\operatorname{sg}}\,(x\dot{-}m\cdot[x/m])$.

11) Указание. $[\sqrt{x+1}]=[\sqrt{x}]+\varphi(x)$, где $\varphi(x)=\overline{\operatorname{sg}}\,(([\sqrt{x}]+1)^2\dot{-}$ $\dot{-}(x+1))$.

2.4. 7) а) Указание. $f_1(x)$ получается из примитивно рекурсивной $f(x,\,y)=\sum\limits_{i=0}^{y}\overline{\operatorname{sg}}\,|x-a^i|$ отождествлением переменных x и y.

б) Указание. $f_2(x+1)=f_2(x)+f_1(x+2)$, где f_1 — функция из задачи а).

2.5. 1) $\overline{\operatorname{sg}}\,|x_1-3|-1$. 2) x_1-2. 3) x_1+2. 5) $(x_1-1)/2$.

6) $((x_1+1)\cdot\operatorname{sg}x_1)/2$. 9) $(6x_1-4)\operatorname{sg}x_1$. 10) $(x_1-x_2)+(x_2-x_1)$.

12) $(\operatorname{sg}x_1)\cdot(2x_2+1)/\operatorname{sg}(2\dot{-}x_1)$.

14) $\log_2(x_1/(2x_2+1))$ при $i=1$; $(x_2-2^{x_1})/2^{x_1+1}$ при $i=2$.

15) $(x_1-1)/\operatorname{sg}(3\dot{-}x_1)$.

2.6. 1) $2\dot{-}x_1$. 2) $2x_1$. 3), 4) Такой функции нет. 5) x_1+2x_2.

6) $3x_1+x_2$. 7) $x_1\cdot(x_2+2)$. 8) $x_1\cdot(1\dot{-}x_2)$.

2.7. 1) $\mu_x([(x\dot{-}1)/2])=(2x+1)\operatorname{sg}x$.

4) $\mu_x(x\dot{-}[x/3])=(3[x/2]+1)\dot{-}2\cdot\overline{\operatorname{sg}}\,(x\dot{-}2[x/2])$.

5) $\mu_x\bigl(\bigl[\sqrt[3]{x^2}\bigr]\bigr)=\bigl[\sqrt{x^3}\bigr]+\operatorname{sg}(x\dot{-}[\sqrt{x}]^2)$.

6) $\mu_x(x\dot{-}[\sqrt{x}])^2=x+[(x+1)/2]^2$.

2.8. 2) $f(x)\equiv 1$.

3) Функция $f(x)$ должна быть не определена при $x=0$.

4) $f(x)$ всюду определена и принимает каждое значение из множества $\{0,\,1,\,2,\dots\}$.

2.9. 1) Не может. 2) Не могут.

2.13. 1) Не следует. Если же машины T_1 и T_2 правильно вычисляют примитивно рекурсивные функции f_1 и f_2 (соответственно), то их композиция T_1T_2 вычисляет (причем «правильным образом») функцию $f_2(f_1(x))$.

2) Не справедливо.

2.14. Да, вытекает.

2.16. 2)–8) Указание. Достаточно построить соответствующую суперпозицию над множеством, содержащим заданную функцию и подходящие функции из совокупности $\{0,\,1,\,2x,\,x^2\}$. Например, для функции из задачи 5) имеем $f(x\cdot 1^3)=f(x)$. Затем надо провести рассуждение от противного.

2.17. Указание. Построить машину Тьюринга, вычисляющую следующее общерекурсивное доопределение функции $f(x)$:

$$\widehat{f}(x)=\begin{cases} f(x), & \text{если в точке } x \text{ функция } f(x) \text{ определена,}\\ x, & \text{если в точке } x \text{ функция } f(x) \text{ не определена.}\end{cases}$$

2.18. 1) Полной системой не является. 2), 3) Полная система.

Глава VI

§ 1

1.2. 1) Указание. Такой граф один. У него 5 вершин и 8 ребер.

2) Указание. Таких графов 3.

1.3. Указание. Таких графов 11.

1.5. 2) Указание. Таких графов 9.

1.6. Два.

1.7. Два.

1.8. 1) Не существует.

1.9. Имеется 5 допустимых наборов степеней вершин.

1.11. Указание. Набор степеней вершин у одного из таких n-вершинных графов имеет вид $\{1,\,2,\,\dots,\,n-1,\,[n/2]\}$.

1.12. Для маршрутов четной длины утверждение неверно.

1.13. 2) Указание. Рассмотреть граф, состоящий из двух изолированных вершин.

1.16. Общего ребра может не быть.

1.20. 4) Так как в нетривиальном самодополнительном графе G имеются несмежные вершины (ибо он отличен от полного графа), то $D(G) \geqslant 2$. Далее, из задачи 1.19, 3) следует, что если $D(G) \geqslant 4$, то $D(\overline{G}) \leqslant 3$. Но G — самодополнительный граф. Значит, он изоморфен $\overline{G}$, а поэтому неравенство $D(G) \geqslant 4$ выполняться не может.

1.21. Указание. В задачах 1)–3) удобнее строить дополнения искомых графов.

1) 9 графов. 3) 11 графов. 4) 5 графов.

1.24. Указание. Из теоремы Кёнига следует, что данный граф двудольный.

1.27. Указание. Воспользоваться теоремой Эйлера (см. задачу 1.1).

1.28. 2) Указание. Для каждого $n \geqslant 2$ существует только одно такое дерево.

1.29. 2) Указание. Таких деревьев 4.

4) Указание. Таких деревьев 3.

1.30. 6 деревьев.

1.31. Такой граф один.

Указание. Используя результат из задачи 1.19, 2), можно оценить сверху число вершин у такого графа.

1.34. На рис. 6.1, 6.3 и 6.4 изображены пары изоморфных графов.

Указание. Полезно рассмотреть дополнения этих графов.

1.35. 1) Могут быть не изоморфными.

1.36. 1) В каждом из графов, изображенных на рис. 6.6, существует подграф, гомеоморфный K_4.

2) В графе Петерсена (см. рис. 6.6, *а*) и в графе, изображенном на рис. 6.6, *в*, подграфов, гомеоморфных графу K_5, нет. В графе, представленном на рис. 6.6, *б*, существует подграф, гомеоморфный K_5.

1.38. 2) Можно применить индукцию по числу вершин в псевдографе.

1.39. 1) 4 орграфа. Односторонне связных четыре. Сильно связный один.

2) 4 орграфа. Сильно связных два.

3) 9 орграфов. Слабо связных четыре, односторонне связный один.

1.40. 1) 6 псевдографов. Сильно связный один.

2) 10 псевдографов. Слабо связных восемь, сильно связных два.

3) 8 псевдографов. Односторонне связный один.

1.41. 1) 6 графов. 2) 12 графов. 3) 9 графов.

1.42. 2) 4 турнира.

1.43. Два турнира.

1.44. 1) 4 дерева. 2) 9 деревьев. 3) 15 деревьев.

1.47. Можно применить индукцию по числу дуг.

1.48. 2) Нельзя.

1.55. Можно применить индукцию по числу дуг.

1.58. Указание. Применить индукцию по числу вершин.

1.59. 1) Указание. Применить индукцию по k.

1.62. Указание. Для турнира с n вершинами $v_1, \ldots, v_n$ выполняются равенства $\sum\limits_{i=1}^{n} d^+(v_i) = \dfrac{n(n-1)}{2}$ и $d^+(v_i) + d^-(v_i) = n - 1 \quad (i = 1, \ldots, n)$.

§ 2

2.1. 1) Каждый из рассматриваемых графов содержит подграф, гомеоморфный графу $K_{3,3}$.

2) Каждый из графов, изображенных на рис. 6.6, *а*, *в*, содержит подграф, гомеоморфный графу $K_{3,3}$. У графа, приведенного на рис. 6.6, *б*, есть подграф, гомеоморфный K_5.

2.2. а) При всех $n \geqslant 2$. б) Только при $n = 2$.

2.4. Таких графов четыре.

2.6. 3) Указание. Оценка для числа граней имеет вид $5f \leqslant 2m$.

4) Указание. Для получения противоречия оценивать число граней нужно достаточно тонко: $f = f_3 + f_{\geqslant 4}$, где f_3 — число граней, ограниченных циклами длины 3, а $f_{\geqslant 4}$ — число остальных граней; $3f_3 + 4f_{\geqslant 4} \leqslant 2m$.

2.7. 1) а), б) 2 вершины. 2) а) 3 ребра. б) 4 ребра. в) 2 ребра.

2.8. 1) Не существует. 2) Существует.

2.9. 6.

Указание. Рассмотреть граф, получающийся из K_5 после удаления одного ребра.

2.10. 1) Не существует.

2) Указание. Таких графов два.

2.11. Указание. Возможны следующие наборы степеней вершин у графа G_2: (4, 3, 3, 2) и (3, 3, 3, 3).

2.18. Рис. 6.1: $\chi(G) = 3$, $\chi'(G) = 3$. Рис. 6.3: $\chi(G) = 3$, $\chi'(G) = 4$.
Рис. 6.5, *а*: $\chi(G) = 3$, $\chi'(G) = 3$. Рис. 6.5, *б*: $\chi(G) = 3$, $\chi'(G) = 3$.
Рис. 6.6, *а*: $\chi(G) = 3$, $\chi'(G) = 4$. Рис. 6.6, *б*: $\chi(G) = 2$, $\chi'(G) = 4$.
Рис. 6.6, *в*: $\chi(G) = 4$, $\chi'(G) = 5$.

2.19. 1) $\chi(B^n) = 2$, $\chi'(B^n) = n$.

2) $\chi(K_n) = n$; если n нечетно, то $\chi'(K_n) = n$, если же n четное, то $\chi'(K_n) = n - 1$.

3) $\chi(K_{m,n}) = 2$, $\chi'(K_{m,n}) = \max(m, n) = n$.

2.21. Указание. Применить индукцию по числу вершин.

2.22. Указание. Можно применить индукцию по числу вершин.

2.23. Указание. Применить индукцию по числу вершин.

§ 3

3.1. а) 0101001011. б) 00010010111011. в) 0000101110010111.
г) 0000110100101111. д) 0010110100010111.

3.2. См. рис. О.6.1.

3.3. 1), 4), 6) Да. 2) Нет, нарушено свойство 2.
4) Нет, нарушено свойство 1. 5) Нет, нарушено свойство 2.

3.4. 1) Классы разбиения имеют вид $K_1 = \{\widetilde{\alpha}_1, \widetilde{\alpha}_4\}$, $K_2 = \{\widetilde{\alpha}_2, \widetilde{\alpha}_3, \widetilde{\alpha}_5\}$.

3.5. Провести индукцию по числу ребер.

3.6. 1) Число деревьев с n ребрами не превосходит числа кодов, которые являются двоичными векторами длины $2n$.

2) Учтено, что число единиц в коде дерева равно числу нулей.

3) Учтено, что первая координата кода есть 0, а последняя 1.

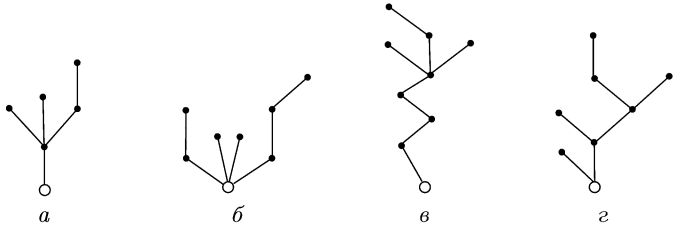


Рис. О.6.1

3.8–3.10. Провести индукцию, опираясь на индуктивное определение корневого дерева.

3.11. а) $z(T) = 2,\ R(T) = 2,\ D(T) = 3.$
б) $z(T) = 1,\ R(T) = 2,\ D(T) = 4.$ в) $z(T) = 1,\ R(T) = 3,\ D(T) = 5.$

3.13. Следует из задачи 3.12, 5).

3.14. Указание. Провести индукцию по величине радиуса дерева.

3.15. 1) Например, простой цикл длины $2l + 1$.

3.16. 1) См. рис. О.6.2. 2) 15.

3.17. 1) На рис. 6.16, *б*, *г* — разложение s-типа; на рис. 6.16, *а*, *д* — разложение p-типа; на рис. 6.16, *в*, *е* — разложение H-типа.
2) На рис. О.6.3, *а* представлена внешняя сеть $\Gamma_1(a, b)$ s-расщепления

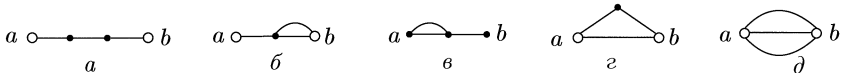


Рис. О.6.2

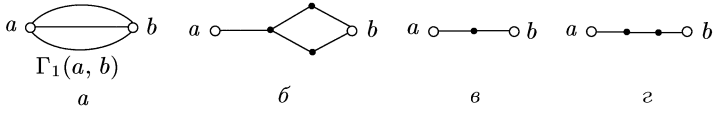


Рис. О.6.3

сети $\Gamma(a, b)$, изображенной на рис. 6.16, *а*. На рис. О.6.3, *б*, *в*, *г* представлены внутренние сети s-расщепления.

3.19. 1) Например, (2, 5), (3, 1). 2) (1, 5), (3, 4). 3) Например, (2, 6). 4) {1, 5}. 5) {1, 5}.

3.20. 1) Первое из неравенств вытекает из того, что в неразложимой, сильно связной сети каждая внутренняя вершина имеет степень, не меньшую 3, а каждый полюс имеет степень, не меньшую 2. Второе неравенство следует из того, что неразложимая n-вершинная сеть не имеет кратных ребер, а следовательно, число ребер меньше, чем у полного графа с n вершинами.

3.21. Через разделяющую вершину проходят все цепи. Поэтому она не может зависеть ни от какой неэквивалентной ей вершины.

3.22. Через вершину v, смежную с полюсами a, b, проходит цепь из ребер (a, v), (v, b). Эта цепь не проходит через какую-либо другую внутреннюю вершину сети.

3.23. 1) Да. Рассмотреть суперпозицию, где внешней сетью является сеть Γ^s_m $(m > 1)$, а внутренние имеют вид Γ^p_k $(k > 1)$.

2) Да. Рассмотреть суперпозицию, где внешняя сеть есть сеть типа Γ^p_m $(m > 1)$, а внутренние имеют вид Γ^s_k $(k > 1)$.

3) Да. Рассмотреть суперпозицию, где внешняя сеть есть H-сеть, а внутренние сети имеют вид Γ^p_k $(k > 1)$.

3.26. Неверно. См., например, сеть, граф которой является полным n-вершинным $(n > 3)$ графом.

3.27. $n - 1$. При выборе в B^n в качестве полюсов вершин, находящихся на расстоянии 2, 3, ..., n, получаем неразложимые, попарно неизоморфные сети.

3.28. 1) Неверно, см. рис. О.6.4, *а*. 2) Неверно, см. рис. О.6.4, *б*.

3) Верно. 4) Да, достаточно. 6) См. рис. О.6.4, *в*.

3.30. 1) Если при удалении некоторой вершины из сети последняя становится несвязной, то удаляемая вершина является разделяющей. Таких вершин в H-сети нет.

2) Верно.

3.31. Указание. Показать, что каждая внутренняя вершина полученной сети минимальная, и использовать ответ к задаче 3.24.

3.32. См. рис. О.6.5.

3.33. См. рис. О.6.6.

3.38. *Рангом вершины* v сети $\Gamma(a, b)$ назовем расстояние v от a. Ребро сети, соединяющее вершину ранга $r - 1$ с вершиной ранга r, назовем

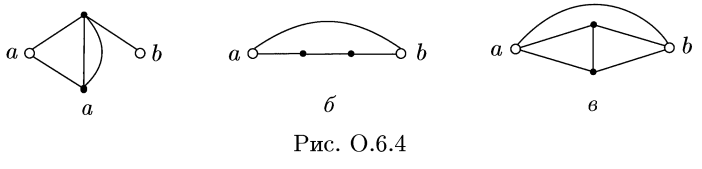


Рис. О.6.4

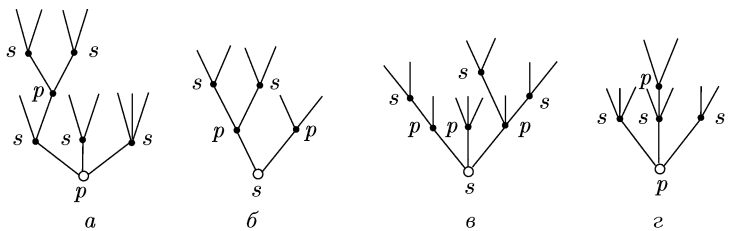


Рис. О.6.5

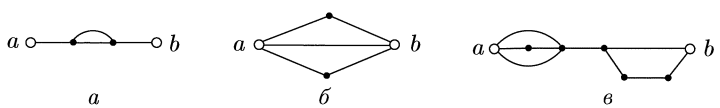


Рис. О.6.6

ребром уровня r. Заметим, что удаление всех ребер одного уровня, не превосходящего l, делает сеть несвязной. Поэтому число ребер одного уровня не меньше l. Число уровней в сети длины l не меньше l. Отсюда вытекает утверждение.

Глава VII

§ 1

1.1. 1), 3), 4), 6) Код C не обладает свойством префикса.
2), 5) Код обладает свойством префикса.

1.2. 1) Код не является однозначно декодируемым. Неоднозначно декодируемое слово: $\overline{01}\,\overline{122}\,\overline{01}$.
2), 4), 5), 8) Код однозначно декодируемый.
3) $\overline{0}\,\overline{0}\,\overline{1}\,\overline{0}\,\overline{0}\,\overline{1}\,\overline{0}\,\overline{0}\,\overline{1}$. 6) $\overline{01}\,\overline{10}\,\overline{11}\,\overline{0}\,\overline{0}\,\overline{1}\,\overline{12}\,\overline{100}$. 7) $\overline{0}\,\overline{1}\,\overline{0}\,\overline{2}\,\overline{1}\,\overline{0}\,\overline{1}\,\overline{12}$

1.3. 1), 2), 4) P является кодом одного сообщения.
3), 8) P не является кодом сообщения.
5)–7) P является кодом более чем одного сообщения.

1.4. 1) Решение. Пусть $C(A)$ — множество двоичных разложений чисел из A: $C(A) = \{1, 101, 110, 111, 1100, 1101, 10001\}$. Вычеркнув из $C(A)$ слова 1 и 110, получим префиксный код. Вычеркиванием меньшего числа слов обойтись нельзя. Таким образом, для задачи а) $B = A\backslash\{1, 6\}$.
2) а) $B = A\backslash\{1, 3, 6, 8\}$; б) $B = A\backslash\{1\}$.
3) а) $B = A\backslash\{2, 6, 7, 8, 9\}$; б) $B = A\backslash\{2, 7\}$.
4) а) $B = A\backslash\{1, 2, 5\}$; б) $B = A\backslash\{1, 2\}$.

1.5. 1) $\overline{12}\,\overline{0}\,\overline{1}\,\overline{0}\,\overline{12}$. 2) $\overline{0}\,\overline{1}\,\overline{0}\,\overline{1}\,\overline{0}\,\overline{1}\,\overline{0}\,\overline{1}\,\overline{0}\,\overline{1}\,\overline{0}\,\overline{1}\,\overline{0}\,\overline{1}\,\overline{0}\,\overline{1}\,\overline{0}\,\overline{1}\,\overline{0}$ 3) $(01)^{k(k+1)}0$.
4) Если $k = 4$, то $\overline{0}\,\overline{1}\,\overline{0}\,\overline{1}\,\overline{0}\,\overline{1}\,\overline{0}\,\overline{1}$, если $k > 4$, то $\overline{0}\,\overline{1}\,\overline{0}\,\overline{1}\,\overline{0}\,\overline{1}\,\overline{0}\,\overline{1}\,\overline{0}$.
5) $0(10)^{H(m,k)}$, где $H(m, k)$ — наименьшее общее кратное чисел m и k.
6) $(1100)^k$, если $k = 3s$, $s = 1, 2 \ldots$; в противном случае решений нет.
7) $(101)^k0$ для всех $k = 1, 2, \ldots$ 8) $(110)^k$ $(k = 2s)$.

1.6. 1) $c = \{a, ba, bba, bbb\}$. 2) $c = \{a, ba, bbba, bbab, bbbb, bbaa\}$.
3) $c = \{ab, ba, bba, bbb, aaaa, aaab, aaba, aabb\}$.
4) $c = \{aa, ab, ba, bbaa, bbab, bbba\}$.

1.7. 1) Нет, так как $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} = \frac{9}{8} > 1$.
2) Да, так как $\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} < 1$. 3) Да. 4) Да.

1.8. 1) Воспользуемся неравенством Макмиллана. Пусть l_i — длины кодовых слов кода C. Тогда $\sum\limits_{i=1}^{|C|} \frac{1}{2^{l_i}} \geqslant \sum\limits_{i=1}^{|C|} \frac{1}{2^n} = \frac{|C|}{2^n} > 1$. Код не может быть однозначно декодируемым.
2) Нет, так как если бы код C был префиксным, то он был бы однозначно декодируемым.

1.9. Пусть код $C(\Sigma)$ с набором длин кодовых слов $l_1, l_2, \ldots, l_r$ не является декодируемым. Тогда в графе G_Σ существует контур или петля, проходящие через вершину Λ. Число вершин (и дуг) в контуре не больше, чем в графе G_Σ, и, следовательно, не больше $1 + \sum\limits_{i=1}^{r} (l_i - 1) = N - r + 1$.

Идя вдоль контура от вершины Λ, рассмотрим слова, приписанные паре (дуга — вершина, являющаяся концом дуги). Ясно, что суммарное количество букв для каждой такой пары не превосходит l и может быть равно l только для первой пары. Отсюда и вытекает утверждение.

1.10. Пусть C — алфавитный код с набором длин кодовых слов $l_1, l_2 \ldots$ $\ldots, l_r$, $\min\limits_{i=\overline{1,r}} l_i = k$, $\max\limits_{i=\overline{1,r}} l_i = l$, $\sum\limits_{i=1}^{r} l_i = N$. Из предыдущей задачи вытекает, что если код C не является однозначно декодируемым, то существует слово в кодирующем алфавите длины не больше $1 + (N - r + 1)(l - 1) \leqslant Nl$. Тогда в алфавите сообщений длина соответствующих слов будет не больше Nl/k.

1.11. 1) Пусть l — максимальная из длин слов в M. Тогда для числа r слов в M имеем $r \leqslant \sum\limits_{i=1}^{l} q^i = \dfrac{q^{l+1} - q}{q - 1}$. Отсюда $l \geqslant \log_q(q + r(q-1)) - 1$.

2) Доля δ_ε слов длины, не превосходящей $l = (1 - \varepsilon)\log_q(1 + r(q-1))$, не больше $\dfrac{q^l - q}{r(q-1)}$.

Если $r = 2$, $q = 2$, то $\delta_\varepsilon \leqslant \dfrac{3^{1-\varepsilon} - 2}{2} \leqslant \dfrac{1}{2} < \left(\dfrac{4}{3}\right)^{1-\varepsilon} 2^{-\varepsilon}$.

Если $r \geqslant 2$, $q \geqslant 2$ и $r \cdot q > 4$, то $r(q-1) \geqslant 3$ и

$$\delta_\varepsilon \leqslant \frac{q^{l+1}}{r(q-1)} = \frac{(1 + r(q-1))^{1-\varepsilon}}{r(q-1)} \leqslant \left(\frac{1}{r(q-1)} + 1\right)^{1-\varepsilon} r(q-1))^{-\varepsilon} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{4}{3}\right)^{1-\varepsilon} r(q-1))^{-\varepsilon}.$$

1.15. 1) Утверждение вытекает из результата задачи 1.9.

2) Указание. Рассмотреть код $C(\Sigma) = \{a,\ (ab)^{k+1},\ (ba)^{k+2}\}$ $(k \geqslant 1)$. Убедиться, что единственный контур в G_Σ, проходящий через Λ, проходит последовательно через вершины $(ba)^{k+1-i}b$, $a(ba)^i$ $(i = 1, \ldots, k+1)$, а соответствующее этому контуру слово имеет вид $(ab)^{k^2+3k+2}a$.

3mm

§ 2

2.1. 1), 2) Например, $C = \{0,\ 10,\ 110,\ 111\}$.

3) Например, $C = \{00,\ 01,\ 10,\ 110,\ 111\}$.

2.2. 1) Например, $C = \{a,\ b,\ ca,\ cb,\ cc\}$.

2) Например, $C = \{a,\ b,\ ca,\ cb,\ cca,\ ccb,\ ccc\}$.

2.3. 1) Например, $P = \left\{\frac{1}{2};\ \frac{1}{4};\ \frac{1}{8};\ \frac{1}{16};\ \frac{1}{32};\ \frac{1}{32}\right\}$; оптимальным является код $C = \{0,\ 10,\ 110,\ 1110,\ 11110,\ 11111\}$.

Решение. Проведем редукцию длин $(1, 2, 3, 4, 5, 5) \to (1, 2, 3, 4, 4) \to$ $\to (1, 2, 3, 3) \to (1, 2, 2) \to (1, 1)$. Двоичный код с набором длин $(1,\ 1)$, очевидно, существует и является единственным и оптимальным при любом распределении вероятностей, например, при $P = \left(\frac{1}{2};\ \frac{1}{2}\right)$, $C = \{0,\ 1\}$. Проводя с набором P преобразования, соответствующие переходу от набора длин $(1,\ 1)$ к исходному, и деля всякий раз соответствующую вероятность появления слова пополам, приходим к $P = \left\{\frac{1}{2};\ \frac{1}{4};\ \frac{1}{8};\ \frac{1}{16};\ \frac{1}{32};\ \frac{1}{32}\right\}$ и $C = \{0,\ 10,\ 110,\ 1110,\ 11110,\ 11111\}$.

2) Например, $P = (0{,}2;\ 0{,}2;\ 0{,}2;\ 0{,}2;\ 0{,}2)$; оптимальным является код $C = \{00,\ 01,\ 10,\ 110,\ 111\}$.

3) Например, $P = \left\{\frac{1}{4};\ \frac{1}{4};\ \frac{1}{8};\ \frac{1}{16};\ \frac{1}{16};\ \frac{1}{16};\ \frac{1}{16}\right\}$, $C = \{00,\ 01,\ 100,\ 101,\ 1100,\ 1101,\ 1110,\ 1111\}$.

5) Например, $P = \left\{\frac{1}{3};\ \frac{1}{3};\ \frac{1}{6};\ \frac{1}{6}\right\}$, $C = \{a,\ b,\ ca,\ cb\}$.

10) Например, $P = \left\{\frac{1}{8};\ \frac{1}{8};\ \frac{1}{8};\ \frac{1}{8};\ \frac{1}{8};\ \frac{1}{8};\ \frac{1}{8};\ \frac{1}{8}\right\}$, $C = \{a,\ b,\ ca,\ cb,\ cc,\ cd,\ da,\ db,\ dc,\ dd\}$.

2.4. 1), 3), 4), 8) Код оптимален. 2), 9), 10) Код не оптимален.

2.5. а) Деревья 2), 4), 8), 10) являются насыщенными, остальные не являются насыщенными.

б) Деревья 1), 2), 4), 8), 10) могут являться остовами оптимальных деревьев, остальные не могут.

2.6. 1) Утверждение верно. Всякий двоичный оптимальный код является полным.

2) Вообще говоря, утверждение неверно (см. задачу 2.5, б), 1)).

3), 5) Утверждение верно.

4) Вообще говоря, неверно (см. задачу 2.5, б), 1)).

6) Утверждение верно. Доказать можно индукцией по числу концевых вершин.

2.7. 1*) Пусть C — полный q-значный код с длинами кодовых слов λ_i $(i = 1,\ \ldots,\ m)$. Пусть $\lambda = \max\limits_i \lambda_i$. Из полноты кода C следует, что каждое слово длины λ в алфавите B имеет префиксом (не обязательно собственным) некоторое кодовое слово. Число слов длины λ, имеющих префиксом слово w_i длины λ_i, равно $q^{\lambda-\lambda_i}$. Если w_i и w_j — два кодовых слова, то множества $B^\lambda(w_i)$ и $B^\lambda(w_j)$ слов длины λ в алфавите B, имеющих префиксом кодовые слова w_i и w_j, не пересекаются. Отсюда $\sum\limits_{1\leqslant i\leqslant m} q^{\lambda-\lambda_i} = q^\lambda$, что и требовалось доказать.

2) База индукции — двоичный оптимальный код с двумя сообщениями. Индуктивный переход осуществляется с помощью теоремы редукции.

3) Для $q > 2$ утверждение, вообще говоря, неверно. Пример: $q = 3$, $P = \left\{\frac{1}{3};\ \frac{1}{3};\ \frac{1}{6};\ \frac{1}{6}\right\}$, $C = \{a,\ b,\ ca,\ cb\}$. Код C оптимальный, но не полный, так как $3^{-1} + 3^{-1} + 3^{-2} + 3^{-2} = 8/9 < 1$.

2.8. Если для некоторого кодового слова w максимальной длины l не найдется слова, отличающегося от w последней буквой, то, не нарушая префиксности кода, можно заменить слово его префиксом длины $l - 1$, что противоречит оптимальности кода.

2.9. Указание. См. задачу 2.8.

2.10. 1), 4), 6) Нет, см. задачу 2.9.

2), 7), 8) Нет. Нарушено неравенство Макмиллана.

3), 5) Оптимальный код существует.

2.11. 1), 3), 5), 7), 9) Не существует. 2), 4), 6), 8), 10) Существует.

2.13. 1) Указание. Достаточно убедиться, что почти равномерный код можно построить в результате алгоритма Хаффмена.

2) Указание. Рассмотреть распределение $P = \left(\frac{1}{m} + \varepsilon, \frac{1}{m}, \ldots, \frac{1}{m}, \frac{1}{m} - \varepsilon\right)$, где $\varepsilon < \frac{1}{2m}$.

2.14. 1) Указание. Провести доказательство индукцией по r с применением теоремы редукции.

2.15. Например, $P = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \ldots, \frac{1}{2^{m-2}}, \frac{1}{2^{m-1}}, \frac{1}{2^{m-1}}\right)$.

2.16. Базис индукции: $m = 2$. Утверждение очевидно. На шаге индукции использовать задачу 2.14.

2.17. В процессе преобразования набора вероятностей неоднозначность может возникнуть при упорядочении вероятностей по невозрастанию. Если набор содержит r вероятностей, то разместить сумму наименьших двух вероятностей среди оставшихся $r-2$ можно не более чем $r-1$ способами. В процессе сопоставления вероятностям кодовых слов на каждом шаге имеется две возможности. Отсюда вытекает оценка.

2.18. 1) Число непустых слов длины не больше $m-1$ равно $b_{m-1} = \sum\limits_{1 \leqslant i < m} q^i \leqslant \frac{q^r - q}{q-1}$. Число однозначных отображений букв алфавита A в слова в алфавите B, $|B| = q$, длины меньше r не превосходят q^{r^2}.

2) а) Верно.

б) Число тупиковых кодов мощности r не превосходят числа помеченных корневых деревьев с r висячими вершинами. Число непомеченных деревьев с r висячими вершинами не превосходит 4^{2r} (см. гл. VI, задачи 3.6 и 3.10). Пометить ребра можно не более чем q^{2r} способами.

§ 3

3.1. 2) Вытекает из того, что $|\alpha - \gamma| \leqslant |\alpha - \beta| + |\beta - \gamma|$ для всех α, β, γ из $\{0, 1\}$.

6) Вытекает из того, что $|\alpha - \beta| = \alpha + \beta - 2\alpha\beta$ для всех α, β из $\{0, 1\}$.

3.2. 1) $n \cdot 2^{n-1}$. 2) $\binom{n}{k} \cdot 2^{n-k}$.

3.3. 1) $\binom{n}{k}$. 2) $\sum\limits_{0 \leqslant i \leqslant k} \binom{n}{i}$.

3) $\binom{n-r}{s}\binom{r}{k-s}$, если $s = \frac{m+k-r}{2}$ — целое неотрицательное число.

3.4. 1) 2^m.

2) 0, если $r < m$; 2^m, если $r = m$; $\binom{n-m}{k} \cdot 2^m$, если $r = m + 2k \leqslant n$; 0, если $r = 2k + m - 1$, $k = 0, 1, \ldots$ или если $r > n$.

3) 0, если $k + r < m$ или если $r + k = m + 2d - 1$, $d = 0, 1, \ldots$, или если $r + k > n$; $\binom{m}{k}$, если $k + r = m$; $\binom{n-m}{d}\binom{k}{k-d}$, если $k + r = m + 2d$, $d = 0, 1, \ldots$

3.5. 1) Пусть существуют наборы $\widetilde{\alpha}$, $\widetilde{\beta}$, $\widetilde{\gamma}$, удовлетворяющие условиям. Положим $\widetilde{\alpha}' = \widetilde{0}$, $\widetilde{\delta} = \widetilde{\beta} \oplus \widetilde{\alpha}$, $\widetilde{\varepsilon} = \widetilde{\gamma} \oplus \widetilde{\alpha}$. Ясно, что $\|\widetilde{\delta}\| > 2n/3$ и $\|\widetilde{\varepsilon}\| \geqslant 2n/3$. Но тогда $\rho(\widetilde{\delta}, \widetilde{\varepsilon}) = \rho(\widetilde{\beta}, \widetilde{\gamma}) < 2n/3$.

3.6. 3) При $k = 0, n$, а также при $k = n/2$ и четных n.

4) Пусть A — полная система. Рассмотрим систему уравнений $\rho(\widetilde{\alpha}_i, \widetilde{\beta}_i) = r_i \quad (i = 1, \ldots, k)$. Очевидно, что $r_i \in \{0, 1, \ldots, n\} \quad (i = 1, \ldots, k)$. Каждый набор $(r_1, r_2, \ldots, r_k)$, при котором система имеет решения, однозначно определяет некоторый вектор $\widetilde{\beta} \in B^n$. Отсюда $(n+1)^k \geqslant 2^n$. Верхняя оценка для числа векторов в базисной системе может быть получена из того, что система $\rho(\widetilde{\alpha}_i, \widetilde{\beta}) = r_i$ является системой линейных уравнений с n неизвестными.

6) Нижняя оценка вытекает из задачи 1) и оценки числа возрастающих цепей длины $n-1$, верхняя — из задачи 4).

3.8. $\binom{2^{n+1}-1}{2^n-1}$. Указание. См. гл. , задачу 1.11.

3.10. 1) Рассмотреть $S_r^n(\widetilde{\alpha})$.

2) Например, $A = \{\widetilde{\alpha}\colon \widetilde{\alpha} \in B^n,\ \|\widetilde{\alpha}\| \text{ четное}\}$.

3.11. Индукция по n. При $n = 1$ последовательность (0), (1) образует требуемый цикл в B^1. Пусть $\widetilde{\alpha}_0, \widetilde{\alpha}_1, \ldots, \widetilde{\alpha}_{2^n-1}$ является циклом в B^n. Если $\widetilde{\alpha}$ — набор в B^n, то обозначим через $\widetilde{\alpha}\sigma$ набор из B^{n+1}, полученный приписыванием символа $\sigma \in \{0, 1\}$ справа к набору $\widetilde{\alpha}$. Тогда последовательность $\widetilde{\alpha}_0 0, \widetilde{\alpha}_1 0, \ldots, \widetilde{\alpha}_{2^n-1} 0, \widetilde{\alpha}_{2^n-1} 1, \ldots, \widetilde{\alpha}_1 1, \widetilde{\alpha}_0 1$ является циклом в B^{n+1}.

3.12. 1), а), в), д), ж), з) Векторы $\widetilde{\alpha}$ являются n-универсальными, в остальных случаях — нет.

3.13. 1) $l(2) = 4,\ l(3) = 6,\ l(4) = 8$.

3.14. 1) Нижняя оценка. Пусть $\widetilde{\alpha} = (10\ldots0),\ \widetilde{\beta} = (01\ldots1),\ M = \{\widetilde{\gamma} \in B_2^n\colon \|\widetilde{\alpha} \oplus \widetilde{\gamma}\| = 1\},\ A_1 = \{\widetilde{\alpha}\} \cup M,\ A_2 = \{\widetilde{\beta}\} \cup M$. Ясно, что $\varphi(n) \geqslant |A_1(n)| = |A_2(n)| = n$.

2) Нижняя оценка. Пусть $A = \{(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in B^n\colon \alpha_1 = 1\}$. Ясно, что $\varphi'(n) \geqslant |A| = 2^{n-1}$.

Верхняя оценка. Если $\|\widetilde{\alpha} \cap \widetilde{\beta}\| \geqslant 1$ для любых $\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta} \in A \subseteq B^n$, то A не содержит противоположных наборов. Положив $\overline{A} = \{\overline{\widetilde{\alpha}}\colon \widetilde{\alpha} \in A\}$, имеем $A \cup \overline{A} \subseteq B^n,\ A \cap \overline{A} = \varnothing$. Отсюда $|A| \leqslant 2^{n-1}$.

3.16. (D.J. Kleitman.) Пусть $t(n, m, k)$ — число троек $(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}, \widetilde{\gamma})$ таких, что $\widetilde{\alpha} \in B_m^n \cap A,\ \widetilde{\beta} \in B_k^n,\ \widetilde{\gamma} \in B_{m+k}^n$ и $\widetilde{\alpha} \cup \widetilde{\beta} = \widetilde{\gamma},\ \widetilde{\alpha} \cap \widetilde{\beta} = 0$. Тогда $a_m \binom{n-m}{k} = t(n, m, k) \leqslant \left(\binom{n}{k} - a_k\right)\binom{n-k}{m} + \left(\binom{n}{m+k} - a_{m+k}\right)\binom{m+k}{m}$. Отсюда вытекает требуемое неравенство.

3.17. 1) Шары радиуса t с центрами в кодовых словах не пересекаются тогда и только тогда, когда расстояние между двумя кодовыми словами не меньше $2t+1$.

3.18. 1) 3. 2) 4. 3) 3. 4) 4. 5) 4.

3.19. Указание. Использовать задачу 3.17.

3.20. 1) Обнаруживает одну ошибку и исправляет ноль ошибок.

2) $n-1$ и $\left[\frac{n-1}{2}\right]$. 3) $\frac{2n}{3} - 1$ и $\left[\frac{n}{3} - \frac{1}{2}\right]$.

4) Обнаруживает одну ошибку при четных n и ноль ошибок при нечетных n, исправляет ноль ошибок.

3.21. 1) 100110. 2) 110011. 3) 0011001. 4) 1010101. 5) 111001011011.
6) 0010110001111. 7) 1110000110011. 8) 000011110111011.

3.22. 1) 1. 2) 110. 3) 110. 4) 0011. 5) 0101. 6) 1101. 7) 0011. 8) 0111110. 9) 110110100. 10) 11110111101.

3.24. 1) $g(\widetilde{x}^5) = \overline{x}_1(x_2x_3x_4x_5 \vee \overline{x}_2\overline{x}_3\overline{x}_4\overline{x}_5)$.

2) $g(\widetilde{x}^5) = x_3(x_4x_5(x_1\overline{x}_2 \vee \overline{x}_1x_2) \vee x_1x_2\overline{x}_4\overline{x}_5)$.

3.25. 1) Вообще говоря, нет. 2) Да. 3) Вообще говоря, нет.

3.26. Пусть $C_\sigma = \{(\alpha_1 \ldots \alpha_n) \in C\colon \alpha_1 \oplus \ldots \alpha_n = \sigma\}$. Тогда C_0 и C_1 являются кодами, обнаруживающими одну ошибку, и $\max\{|C_0|, |C_1|\} \geqslant |C|/2$.

3.34. Пусть $C \subseteq B^n$ — код с расстоянием $d+1$ и $\widetilde{\alpha} \in B^n$. Положим $C_{\widetilde{\alpha}} = \{\widetilde{\gamma} \in B^n\colon \widetilde{\gamma} = \widetilde{\alpha} \oplus \widetilde{\beta},\ \widetilde{\beta} \in C\}$. Тогда, если C является $\langle n, d\rangle$-кодом и $\rho(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}) \leqslant d$, то $C_{\widetilde{\alpha}} \cap C_{\widetilde{\beta}} = \varnothing$. Отсюда вытекает требуемое неравенство.

3.35. Утверждение вытекает из задачи 3.34 и из того, что $\rho(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta}) < d$ для любых вершин $\widetilde{\alpha}$, $\widetilde{\beta}$ из $(d-1)$-мерной грани куба B^n.

3.36. Неравенство следует из задачи 3.35 при $C = B^n$.

3.38. 2^{n-1}.

3.39. Не существует. Имеем $|S_1^{147}(\widetilde{\alpha})| = 148$ при всех $\widetilde{\alpha} \in B^{147}$. Но 148 не является степенью двойки, что противоречит задаче 3.27.

3.41. Пусть в некотором эквидистантном $\langle n, 2d+1\rangle$-коде C содержатся три вершины $\widetilde{\alpha}$, $\widetilde{\beta}$, $\widetilde{\gamma}$. Без ограничения общности можно считать, что $\widetilde{\alpha} = \widetilde{0}$. Тогда $\|\widetilde{\beta}\| = \|\widetilde{\gamma}\| = 2d+1$, а значит, $\rho(\widetilde{\beta}, \widetilde{\gamma})$ — четное число, что противоречит условию.

3.42. Разобьем n координат на блоки величины $d/2$. Каждому блоку сопоставим набор, в котором единицы стоят в координатах, содержащихся в данном блоке. Полученное множество наборов образует эквидистантный $\langle n, d\rangle$-код мощности $[2n/d]$.

3.44. Указание. Использовать задачу 3.33, 5).

3.45. 1) Пусть C — максимальный $\langle n, k, 2d\rangle$-код. Тогда подмножество $C_{(i)} = C \cap B_1^{n,i}$ является $\langle n-1, k-1, 2d\rangle$-кодом. Число пар $(i, \widetilde{\beta})$, где $1 \leqslant i \leqslant n$, $\widetilde{\beta} \in C_{(i)}$, не превосходит $n \cdot m(n-1, k-1, 2d)$. С другой стороны, для каждого набора $\widetilde{\beta} \in C$ существует ровно k таких пар. Отсюда $k \cdot m(n, k, 2d) \leqslant n \cdot m(n-1, k-1, 2d)$. С учетом того, что $m(n, k, 2d)$ — целое число, получаем требуемое неравенство.

2) Вытекает (применить индукцию) из задачи 1) с учетом того, что $m(n-k+d-1, d-1, 2d) = 1$.

§ 4

4.2. 1) а), в), г) Нет. б), д), е) Да.

2) а) $\{000, 111\} \cup A$. б) $B_0^{3,1}$. в), г) B^3.

д) $A \cup \{0000, 0010, 1101, 1111\}$. е) $A \cup \{0000, 0001, 1010, 1110\}$.

3) а) $\{101\}$. б) $\{100\}$. в), г) $\varnothing$. д) $\{1001\}$. е) $\{1010\}$.

4.7. 1) а)–в) 2. г) 1. д)–ж) 4.

2) а) $H = [11]$. б) $H^* = \begin{bmatrix}0011\\1110\end{bmatrix}$. в) $H^* = \begin{bmatrix}10100\\01000\end{bmatrix}$. г) $H^* = \begin{bmatrix}10001\\11100\end{bmatrix}$.

д) $H^* = \begin{bmatrix}0101010\\1001100\\1110000\\0001111\end{bmatrix}$.

4.11. $d(C(M)) = 7$.

Глава VIII

§ 1

1.1. 1) $(20)_3$. Билеты неравноценны. Первый билет можно распределить 20-ю способами, второй — 19-ю, третий — 18-ю.

2) 20^3. 3) $C(20, 3)$.

1.2. 1) 9!.

2) $C(9, 3) \cdot C(6, 3)$. Первую шеренгу можно выбрать $C(9, 3)$ способами, после чего вторую — $C(6, 3)$ способами. Пользуясь правилом произведения, получаем результат.

1.3. 1) Каждый из членов перестановки с повторениями можно выбрать независимо от других n способами. С использованием правила произведения получаем, что $\widehat{P}(n, r) = n^r$.

2) Из каждого (n, r)-сочетания без повторений путем перестановок можно получить $r!$ различных (n, r)-перестановок, причем каждая (n, r)-перестановка может быть получена таким способом. Отсюда $r!\,C(n, r) = P(n, r)$. Поскольку (см. пример 3) $P(n, r) = (n)_r$, то $C(n, r) = (n)_r/r! = \binom{n}{r}$.

3) Каждому (n, r)-сочетанию A с повторениями, составленному из элементов множества $U = \{a_1, \ldots, a_n\}$, поставим в соответствие вектор $\widetilde{\alpha}(A)$ длины $n + r - 1$ из r единиц и $n - 1$ нулей такой, что число нулей, находящихся между $(i-1)$-й и i-й единицами, равно числу элементов a_i, входящих в сочетание A $(i = 2, \ldots, n)$, а число нулей, стоящих перед первой единицей (после $(n-1)$-й единицы), равно числу элементов a_1 (соответственно элементов a_n), входящих в сочетание A. Это соответствие между сочетаниями и векторами взаимно однозначно. С другой стороны, число векторов с $n - 1$ единицами и r нулями равно $C(n + r - 1, n - 1)$, поскольку каждому такому вектору можно взаимно однозначно сопоставить сочетание из $n + r - 1$ элементов по $n - 1$. Отсюда с учетом результата предыдущей задачи получаем, что $\widehat{C}(n, r) = \binom{n+r-1}{n-1}$.

1.4. 1) k^n. 2) $k_1 \cdot k_2 \cdot \ldots \cdot k_n$. 3) $\binom{n}{r}$.

1.5. 1) 2^{mn}. 2) $(2^m)_n$.

1.6. $\binom{m}{r}\binom{n}{s}$. Применяется правило произведения.

1.7. 1) $\binom{r}{h}\binom{r-h}{k}(n - \alpha - \beta)_{r-h-k}$.

1.8. 1) $4(n-4)$. Масть карт можно выбрать четырьмя способами, после чего наименьший номер карты можно выбрать $n - 4$ способами.

2) $4n(n-1)$. Выбрать номер четырех карт можно n способами, после чего оствшуюся карту можно выбрать $4(n-1)$ способами.

3) $24n(n-1)$. 4) $4\binom{n}{5}$. 5) $4^5(n-4)$. 6) $4n\binom{4n-4}{2}$.

7) $12n\binom{n}{2}^2 + 4n^3\binom{n}{2}$.

1.9. 2) 147.

2) 26. Число случаев выпадения одинаковых граней равно 6, число способов выпадения попарно различных граней равно $\binom{6}{3} = 20$.

3) $300 + 300^2 + 300^3$.

1.10. 1) $\binom{n-1}{k-1}$. 2) $\binom{n-1}{2}$. 3) $\frac{1}{6}\binom{n-1}{2}+\frac{1}{2}\left(\left[\frac{n-1}{2}\right]\right)$.

1.11. 1) $\binom{n-k(m-1)+1}{k}$. 2) $\binom{n+9}{9}$. 3) $\binom{n+k}{k}$.

1.12. 1) $(1+\alpha_1)(1+\alpha_2)\dots(1+\alpha_n)$. Каждому делителю $p_1^{\beta_1}\dots p_r^{\beta_r}$ $(0\leqslant\beta_i\leqslant\alpha_i,\ i=1,\dots,r)$ можно взаимно однозначно сопоставить вектор $(\beta_1,\dots,\beta_r)$. Далее см. задачу 1.4, 2).

2) 2^r. Каждому делителю $p_1^{\beta_1}\dots p_r^{\beta_r}$ числа n, не делящемуся на квадрат, можно сопоставить двоичный вектор $(\beta_1,\dots,\beta_r)$.

3) $\prod\limits_{k=1}^{r}(p_k^{\alpha_k-1}-1)(p_k-1)^{-1}$.

Указание. Заметить, что после раскрытия скобок в выражении $(1+p_1+\dots+p_1^{\alpha_1})\dots(1+p_r+\dots+p_r^{\alpha_r})$ каждый делитель присутствует в качестве слагаемого суммы ровно один раз.

1.13. 1) $\binom{n}{k}=\frac{(n)_k}{k!}=\frac{n!}{k!(n-k)!}=\frac{(n)_{n-k}}{(n-k)!}=\binom{n}{n-k}$.

Другое доказательство. Число $\binom{n}{k}$ равно числу способов выбора k-элементного подмножества из $U=\{a_1,\dots,a_n\}$. Но каждому k-элементному подмножеству взаимно однозначно соответствует его дополнение в U, являющееся $(n-k)$-элементным множеством.

1.15. 1) Решение. Положим $\alpha_{n-1}=\left[\frac{m}{(n-1)!}\right]$. Пусть уже определены коэффициенты $\alpha_{n-1},\alpha_{n-2},\dots,\alpha_{n-i}$. Тогда

$$\alpha_{n-(i+1)}=\left[\frac{m-\alpha_{n-1}(n-1)!-\alpha_{n-2}(n-2)!-\dots-\alpha_{n-i}(n-i)!}{(n-i-1)!}\right].$$

Единственность представления докажем от противного. Пусть некоторому m соответствуют два вектора: $\widetilde{\alpha}(m)=(\alpha_1,\dots,\alpha_{n-1})$ и $\widetilde{\beta}(m)=(\beta_1,\dots,\beta_{n-1})$. Пусть j — наибольший из номеров разрядов, в которых векторы различаются. Без ограничения общности можно считать, что $\alpha_j<\beta_j$. Имеем

$$0=\sum_{i=1}^{n-1}\beta_i i!-\sum_{i=1}^{n-1}\alpha_i i!\geqslant(\beta_j-\alpha_j)j!-\sum_{i=1}^{j-1}\alpha_i i!\geqslant j!-\sum_{i=1}^{j-1}i\cdot i!>0.$$

Пришли к противоречию.

2) $\widetilde{\alpha}(4)=(0,2)$, $\widetilde{\alpha}(15)=(1,1,2)$, $\widetilde{\alpha}(37)=(1,0,2,1)$.

3) $\mu(0,2,0,4)=100$, $\mu(0,2,1)=10$, $\mu(1,2,3,2)=71$.

4) $\nu(2,3,1,4)=8$, $\nu(3,5,2,1,4)=68$, $\nu(1,3,3,5,2)=9$.

5) Пусть задано число m. Представим его в виде $m=\alpha_1\cdot1!+\alpha_2\cdot2!+\dots$ $\dots+\alpha_{n-1}(n-1)!$, где $\alpha_i\leqslant1$, $1\leqslant i<n$. Построение искомой подстановки π равносильно построению вектора $(\pi(1),\pi(2),\dots,\pi(n))$. Координаты $\pi(j)$ зададим по индукции. Положим $\pi(1)=\alpha_{n-1}+1$. Если координаты $\pi(1),\dots,\pi(j-1)$ определены, то положим $\pi(j)=\alpha_{n-j}+1+s(j)$, где $s(j)$ — число тех $\pi(k)$, $1\leqslant k<j$, для которых $\pi(k)<\pi(j)$.

6) $\pi_7=(2,1,4,3)$, $\pi_{18}=(4,1,2,3)$, $\pi_{28}=(2,1,5,3,4)$.

1.16. 1) Координаты вектора $\widetilde{\beta}(m)=(\beta_1,\dots,\beta_k)$ определяются следующим образом: β_1 — наибольшее целое такое, что $m\geqslant\binom{\beta_1}{k}$. Если

$\beta_1, \ldots, \beta_i$ уже определены, то β_{i+1} — наибольшее целое такое, что $m - \binom{\beta_1}{k} - \binom{\beta_2}{k-1} - \ldots - \binom{\beta_i}{k-i+1} \geqslant \binom{\beta_{i+1}}{k-i}$. Единственность доказывается так же, как и в задаче 1.15, 1).

2) а) $\widetilde{\beta}(19) = (6, 4, 1, 0)$, так как $\binom{6}{4} + \binom{4}{3} + \binom{1}{2} + \binom{0}{1}$.

б) $\widetilde{\beta}(25) = (6, 3, 2)$. в) $\widetilde{\beta}(32) = (6, 5, 4, 1)$.

3) а) $m = 18$, так как $m = \binom{6}{3} + \binom{3}{2} + \binom{0}{1} = 23$.

б) $m = 13$. в) $m = 10$.

4) Сопоставим вектору $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ из B_k^n сначала вектор $\widetilde{\beta} = (\beta_1, \ldots, \beta_k)$, в котором $\beta_j + 1$ является номером координаты $(k-j+1)$-й слева единицы в наборе $\widetilde{\alpha}$, $1 \leqslant j \leqslant k$. После этого полагаем $\nu(\widetilde{\alpha}) = \mu(\widetilde{\beta}) + 1$. Например, если $\widetilde{\alpha} = (1, 0, 0, 1, 0)$, то $\widetilde{\beta} = (3, 0)$, $\nu(\widetilde{\alpha}) = \mu(\widetilde{\beta}) + 1 = \binom{3}{2} + \binom{0}{1} + 1 = 4$.

1.17. При $n = 1$ равенство (1) проверяется непосредственно. Пусть равенство доказано для некоторого $n \geqslant 1$. Имеем

$$\sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} t^k = \sum_{k=0}^{n+1} \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right) t^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} t^k + \sum_{k=1}^{n+1} \binom{n}{k-1} t^k =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} t^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} t^{k+1} = (1+t)^n + t(1+t)^n = (1+t)^{n+1}.$$

1.18. 1) Положить $t = 1$ в (1).

2) Положить $t = -1$ в (1).

3) Продифференцировать (1) по t и положить $t = 1$.

4) Продифференцировать (1) дважды и положить $t = 1$.

5) С использованием 1) и 3) имеем

$$\sum_{k=0}^{n} (2k+1) \binom{n}{k} = 2 \sum_{k=0}^{n} k \binom{n}{k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = n \cdot 2^n + 2^n = (n+1) \cdot 2^n.$$

6) Проинтегрировать тождество (1) по t от 0 до 1.

7) Проинтегрировать тождество (1) по t от -1 до 0.

8) Провести индукцию по n с использованием задач 1.13, 2) и 1.17, 7).

9) Сравнить коэффициенты при t^k в левой и правой частях тождества $(1+t)^n (1+t)^m = (1+t)^{m+n}$.

10) Положить в задаче 9) $k = n = m$.

11) Делением на $\binom{2n}{n}$ свести задачу к задаче 10).

1.19. 1) $\sum\limits_k \binom{n}{2k} = (1+1)^n + (1-1)^n = 2^n$.

2) $$4 \sum_k \binom{n}{4k} = (1+1)^n + (1+i)^n + (1+i^2)^n + (1+i^3)^n =$$

$$= 2^n + (1+i)^n + (1-i)^n = 2^n + (\sqrt{2})^n \left(\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} \right)^n +$$

$$+ (\sqrt{2})^n \left(\cos \frac{\pi}{4} - i \sin \frac{\pi}{4} \right)^n = 2^n + 2^{n/2} \cdot 2 \cos \frac{\pi n}{4}.$$

3) $\sum\limits_{\nu=0}^{m-1} \exp\left\{-\frac{2\pi i r}{m}\nu\right\}\left(1+\exp\left\{\frac{2\pi i\nu}{m}\right\}\right)^n =$

$$= \sum_{\nu=0}^{m-1} \exp\left\{-\frac{2\pi i r}{m}\nu\right\}\sum_{s=0}^{m-1}\sum_{k}\binom{n}{mk+s}\exp\left\{\nu\,\frac{2\pi i(mk+s)}{m}\right\} =$$

$$= \sum_{k}\sum_{s=0}^{m-1}\binom{n}{mk+s}\sum_{\nu=0}^{m-1}\exp\left\{\frac{2\pi i(mk-s-r)}{m}\nu\right\} = m\sum_{k}\binom{n}{mk+r};$$

в последнем случае использовано тождество

$$\sum_{\nu=0}^{m-1}\exp\left\{\frac{2\pi i n}{m}\nu\right\} = \begin{cases} m, & \text{если } n \text{ кратно } m,\\ 0 & \text{в противном случае.}\end{cases}$$

1.20. 2) $\frac{1}{2}\left((1+\sqrt{3})^n + (1-\sqrt{3})^n\right)$.

1.21. 1) 4. Член разложения $C_{20}^k \cdot 2^{k/2}\cdot 3^{(20-k)/3}$ рационален в том и только том случае, когда k четно и $20-k$ кратно 3, т. е. при $k=2$, 8, 14, 20.

2) 13. 3) 9. 4) 6.

1.22. 1) -30288. Общий вид k-го члена разложения имеет вид $\binom{8}{k}A^k$, где $A = t(2-3t)$, причем в разложение A^k входят степени t от k-й до $2k$-й. Степень t^9 входит в A^5, A^6, A^7, A^8 соответственно с коэффициентами $\binom{8}{5}\binom{5}{4}\cdot 2(-3)^4$, $\binom{8}{6}\binom{6}{2}\cdot 2^3(-3)^3$, $\binom{8}{7}\binom{7}{2}\cdot 2^5(-3)^2$, $\binom{8}{8}\binom{8}{1}\cdot 2^7(-3)^1$. Коэффициент при t^9 является суммой этих величин и равен -30288.

2) -11340. 4) 0.

1.24. 1) $\frac{(a)_k}{k!} + \frac{(a)_{k-1}}{(k-1)!} = \frac{(a)_k + k(a)_{k-1}}{k!} = \frac{(a+1)_k}{k!}$.

2) Ряд $A(t) = \sum\limits_{k=0}^{\infty}\binom{a}{k}t^k$ является рядом Маклорена функции $f(t) = (1+t)^a$, поскольку $\frac{f^{(k)}(0)}{k!} = \binom{a}{k}$. Ряд $A(t)$ сходится при $|t|<1$ и всех a по признаку Даламбера:

$$\binom{a}{k+1}t^{k+1}\Big/\binom{a}{k}t^k = \frac{a-k}{k+1}\,t, \quad \lim_{k\to\infty}\left|\frac{a-k}{k+1}\right|t = t < 1.$$

Пусть $r_k(t)$ — остаточный член ряда (в форме Коши). Покажем, что $r_k(t)\to 0$ при $k\to\infty$; тем самым равенство будет доказано. Имеем

$$r_k(t) = f^{(k+1)}(\theta t)(1-\theta)^k\,\frac{t^{k+1}}{k!} = (a)_{k+1}(1+\theta t)^{a-k-1}(1-\theta)^k\,\frac{t^{k+1}}{k!} =$$

$$= \binom{a-1}{k}t^k a(1+\theta t)^{a-1}\left(\frac{1-\theta}{1+\theta t}\right)^k.$$

Здесь $\binom{a-1}{k}t^k \to 0$ при $k\to\infty$, выражение $a(1+\theta t)^{a-1}$ ограничено и $0 < \left(\frac{1-\theta}{1+\theta t}\right)^k < 1$ при $0<\theta<1$, $|t|<1$. Отсюда и следует, что $\lim\limits_{k\to\infty} r_k(t) = 0$.

1.25. 1) $\frac{(mn)!}{(m!)^n}$. 2) $\binom{n}{k_1, k_2, \ldots, k_s}$.

§ 2

2.1. 1) Доказательство. При $n=1$ $\widehat{N}_0 = N - N_1 = S_0 - S_1$, формула (1), очевидно, справедлива. Пусть формула справедлива для $n-1$ свойств, и пусть $N_{\overline{i}_1, \ldots, \overline{i}_k}$ — число предметов, не обладающих ни одним из свойств $i_1, \ldots, i_k$. Имеем

$$\widehat{N}_0 = N_{\overline{1}, \ldots, \overline{n-1}} = N - \sum_{i=1}^{n-1} N_i + \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n-1} N_{i,j} - \\ - \sum_{1 \leqslant i < j < k \leqslant n-1} N_{i,j,k} + \ldots + (-1)^{n-1} N_{1, \ldots, n-1}. \quad (*)$$

Эта формула справедлива и для совокупности предметов, обладающих свойством n:

$$N_{\overline{1}, \ldots, \overline{n-1}, n} = N_n - \sum_{1 \leqslant i \leqslant n-1} N_{i,n} + \ldots + (-1)^{n-1} N_{1, \ldots, n-1, n}, \quad (**)$$

где $N_{\overline{1}, \ldots, \overline{n-1}, n}$ — число предметов, обладающих свойством n, но не обладающих ни одним из свойств $1, \ldots, n-1$. Ясно, что

$$N_{\overline{1}, \ldots, \overline{n-1}, n} = N_{\overline{1}, \ldots, \overline{n-1}} - N_{\overline{1}, \ldots, \overline{n-1}, n}.$$

Вычитая формулу (**) из (*), получаем формулу (1).

2) Формулу (3) в соответствии с определением запишем следующим образом:

$$\widehat{N}_m = \sum_{k=0}^{n-m} (-1)^k \binom{m+k}{m} \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_{m+k} \leqslant n} N_{i_1, \ldots, i_{m+k}}.$$

Докажем, что каждый предмет, обладающий m свойствами, будет учтен в ней ровно один раз, а все другие — ни разу. В самом деле, элементы, обладающие $s < m$ свойствами, не учитываются очевидным образом. Элемент, обладающий заданными $s = m + t$ свойствами, будет учитываться во внутренней сумме $\binom{m+t}{m+k}$ раз. Но

$$\sum_{k=0}^{n-m} (-1)^k \binom{m+k}{m} \binom{m+t}{m+k} = \binom{m+t}{m} \sum_{k=0}^{t} (-1)^k \binom{t}{k} = \begin{cases} 1 & \text{при } t = 0, \\ 0 & \text{при } t > 0. \end{cases}$$

Таким образом, в (3) ровно по одному разу учитываются элементы, обладающие в точности m свойствами, а остальные не учитываются.

3) Заметим, что $\check{N}_{m+1} = \check{N}_m - \widehat{N}_m$, и докажем (4) индукцией по m. По определению $\check{N}_0 = N = S_0$. Тогда $\check{N}_1 = S_0 - (S_0 - S_1 + S_2 - \ldots) = \\ = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} S_k$. Тем самым (4) выполняется для $m = 1$. Пусть тождество (4) справедливо при некотором $m \geqslant 1$. Тогда

$$\check{N}_{m+1} = \check{N} N_m - \widehat{N}_m = \sum_{k=0}^{n-m} (-1)^k \left(\binom{m-1+k}{m-1} - \binom{m+k}{m} \right) S_{m+k} = \\ = \sum_{k=1}^{n-m} (-1)^{k-1} \binom{m-1+k}{m} S_{m+k} = \sum_{k=0}^{n-(m+1)} (-1)^k \binom{m-k}{m} S_{m+1+k}.$$

2.2. Общее число способов выдачи шляп равно $4! = 24$. Вероятность того, что ровно m человек получат свои шляпы, равна $\widehat{N}_m/4!$, где $\widehat{N}_m$ определяется формулой (3) при $n = 4$. Имеем $\widehat{N}_0 = S_0 - S_1 + S_2 - S_3 + S_4 = 4! - 4 \cdot 3! + 6 \cdot 2! - 4 \cdot 1! + 1 = 9$, $p_0 = 3/8$; $\widehat{N}_1 = S_1 - 2S_2 + 3S_3 - 4S_4 = 4 \cdot 3! - 2 \cdot 6 \cdot 2! + 3 \cdot 4 - 4 \cdot 1 = 8$, $p_1 = 1/3$, $p_2 = 1/4$, $p_3 = 0$, $p_4 = 1/24$.

2.3. 1) Число распределений предметов, при которых данные k ящиков остаются пустыми, равно $(n-k)^r$, $S_k = \binom{n}{k}(n-k)^r$. Остается применить формулу (1).

2) $S_{m+k} = \binom{n}{m+k}(n-m-k)^r$, $E(r,n,m) = \widehat{N}_m = \sum\limits_{k=0}^{n-m}(-1)^k\binom{m+k}{m}\times$
$\times\binom{n}{m+k}(n-m-k)^r = \binom{n}{m}\sum\limits_{k=0}^{n-m}(-1)^k\binom{n-m}{k}(n-m-k)^r$.

3) Использовать формулу (4) задачи 2.1, 3).

2.4. Указание. Использовать круги Эйлера.

1) 20 %. 2) 60 %. 3) 70 %.

2.5. 1) 2. 2) 6. 3) 3.

2.6. 2) 457. Используя формулу (1), получаем $S_1 = 675$, $S_2 = 141$, $S_3 = 9$, $\widehat{N}_0 = 457$.

3) 734.

4) Имеем $N = S_0 = 30m$, $S_1 = 10m$, $S_2 = 3m$, $S_3 = m$, $\widehat{N}_0 = S_0 - S_1 + S_2 - S_3 = 22m$.

2.7. 1) 3^n. Каждый элемент независимо от распределения других элементов может принадлежать одному из множеств*) $X\overline{Y}$, $\overline{X}Y$ или $\overline{X}\,\overline{Y}$.

2) $n \cdot 2^n$. Один элемент из U принадлежит множеству $X\overline{Y} \cup \overline{X}Y$. Остальные элементы принадлежат одному из множеств XY или $\overline{X}\,\overline{Y}$.

3) 3^n. Равенство $\overline{X} \cup Y\overline{Z} = \overline{X} \cup \overline{Y}$ равносильно равенству $X\overline{Y} \cup \overline{X}Y\overline{Z} = U$. Таким образом, каждый элемент из U содержится ровно в одном из трех множеств XYZ, $X\overline{Y}\,\overline{Z}$, $\overline{X}Y\overline{Z}$.

4) $3^n - (n+2)2^n + n(n+1) + 1$. 5) $n(2^n - 2n)$.

2.9. $4n\sum\limits_{0\leqslant k\leqslant n}(-1)^k\binom{n}{k}(2n-k-1)_{k-1}[(n-k)!]^2$.

§ 3

3.1. 1) Индукция. Числа $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}$ определены по следующему условию: если все члены a_i при $i \leqslant n$ уже определены, то с помощью (1) получаем $a_{n+1} = -p_1a_n - p_2a_{n-1} - \ldots - p_ka_{n-k+1}$.

2) Требуется показать, что $c\lambda^{n+k} + p_1c\lambda^{n+k-1} + \ldots + p_kc\lambda^n = 0$, или, что то же самое, $c\lambda^n(\lambda^k + p_1\lambda^{k-1} + \ldots + p_k) = 0$. Поскольку λ является корнем многочлена (2), то выражение в скобках обращается в 0.

3) То, что $a_n = c_1\lambda_1^n + \ldots + c_k\lambda_k^n$ удовлетворяет соотношению (1), следует из задачи 2) и из того, что если последовательности a_n и b_n удов-

*) Выражение «элемент v принадлежит множеству $X\overline{Y}$» здесь и далее понимается в смысле $v \in X \cap (U\backslash Y)$, а $v \in \overline{XY}$ равносильно $v \in (U\backslash X) \cap (U\backslash Y)$.

летворяют соотношению (1), то и последовательность $d_n = \alpha a_n + \beta b_n$ ему удовлетворяет при всех α и β.

Покажем теперь, что любая последовательность a_n, удовлетворяющая (1), может быть представлена в виде $a_n = c_1\lambda_1^n + \ldots + c_k\lambda_k^n$, где c_i — подходящие константы. В силу задачи 1) любая последовательность a_n, удовлетворяющая (1), полностью определяется своими первыми членами $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}$. Таким образом, остается показать, что для любых $a_0, \ldots, a_{k-1}$ существуют $c_1, \ldots, c_k$ такие, что

$$\begin{gathered} c_1 + c_2 + \ldots + c_k = a_0, \\ c_1\lambda_1 + c_2\lambda_2 + \ldots + c_k\lambda_k = a_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_1\lambda_1^{k-1} + c_2\lambda_2^{k-1} + \ldots + c_k\lambda_{k-1}^{k-1} = a_{k-1}. \end{gathered} \qquad (*)$$

Определитель системы $(*)$ является определителем Вандермонда (см.: *Курош А.Г.* Курс высшей алгебры. — Изд. 6. — М.: Физматгиз, 1959). Он равен $\prod\limits_{1\leqslant i<j\leqslant k} (\lambda_i - \lambda_j)$ и не обращается в нуль, если $\lambda_i \neq \lambda_j$ при $i \neq j$. Следовательно, система $(*)$ имеет (и притом единственное) решение.

4) Чтобы показать, что вякая последовательность указанного в условии вида удовлетворяет (1), достаточно показать, что последовательность $a_n = n^m\lambda^n$, где λ — корень кратности $r > m$ многочлена (2), удовлетворяет (1). Подставляя $a_s = s^m\lambda^s$ $(s = n, \ldots, n+k)$ в левую часть (1) и полагая $p_0 = 1$, получаем

$$L(n) = (n+k)^m\lambda^{n+k} + p_1(n+k-1)^m\lambda^{n+k-1} + \ldots + p_k n^m\lambda^n =$$

$$= \lambda^n\left(\sum_{j=0}^{k} p_j(n+k-j)^m\lambda^{k-j}\right) = \lambda^n\left(\sum_{j=0}^{k}\lambda^{k-j}p_j\sum_{i=0}^{m}\binom{m}{i}(k-j)^i n^{m-i}\right) =$$

$$= \lambda^n n^m\left(\sum_{i=0}^{m}\binom{m}{i}n^{-i}\sum_{j=0}^{k} p_j\lambda^{k-j}(k-j)^i\right) = \lambda^n n^m\left(\sum_{i=0}^{m}\binom{m}{i}n^{-i}P_i(\lambda)\right),$$

где $P_i(x) = \sum\limits_{j=0}^{k} p_j(k-j)^i x^{k-j}$. Заметим, что $P_0(x) = P(x)$, где P — многочлен (2). Поскольку λ является r-кратным корнем многочлена P_0, то $P_0(x) = (x-\lambda)^r Q_0(x)$, где Q_0 — некоторый многочлен. Нетрудно проверить, что $P_{i+1}(x) = x\dfrac{d}{dx}P_i(x)$. Поэтому $P_i = (x-\lambda)^{r-i}Q_i(x)$, где Q_i — многочлен. Отсюда следует, что $P_i(\lambda) = 0$ при всех $i < r$. Следовательно, $L(\lambda) = 0$. Тем самым (1) выполнено для последовательности $n^m\lambda^n$ при $m < r$, а тем самым и для последовательностей указанного в условии вида.

Докажем теперь, что любая последовательность a_n, удовлетворяющая (1) при условии, что λ_i является корнем кратности r_i $(i = 1, \ldots, s)$ многочлена (2), имеет вид, указанный в формулировке задачи. При этом без ограничения общности будем полагать, что $p_k \neq 0$, т.е. что нуль не является корнем характеристического многочлена. (Если $p_k = 0$, то можно упростить (1).) Для доказательства (см. решение задачи 3)) достаточно

показать, что для любых $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}$ система

$$c_{1,1} + \ldots + c_{s,1} = a_0,$$
$$(c_{1,1} + c_{1,2} + \ldots + c_{1,r_1})\lambda_1 + \ldots + (c_{s,1} + \ldots + c_{s,r_s})\lambda_s = a_1,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$(c_{1,1} + c_{1,2}(k-1) + \ldots + c_{1,r_1}(k-1)^{r_1})\lambda_1^{k-1} + \ldots$$
$$\ldots + (c_{s,1} + c_{s,2}(k-1) + \ldots + c_{s,r_s}(k-1)^{r_s})\lambda_s^{k-1} = a_{k-1}$$

имеет решение. Для этого достаточно показать, что ее определитель не равен нулю, или что векторы $\Lambda_0, \ldots, \Lambda_{k-1}$, где $\Lambda_i = (\lambda_1^i, i\lambda_1^i, \ldots, i^{r_1}\lambda_1^i, \ldots$ $\ldots, \lambda_s^i, i\lambda_s^i, \ldots, i^{r_s}\lambda_s^i)$ $(i = 0, \ldots, k-1)$, линейно независимы. Предположим противное. Тогда существуют константы $d_0, d_1, \ldots, d_{k-1}$, не все равные нулю, такие, что $\Lambda = d_0\Lambda_0 + \ldots + d_{k-1}\Lambda_{k-1} = 0$. Пусть $Q(x) = \sum_{i=0}^{k-1} d_i x^i$ и Δ — оператор такой, что $\Delta f(x) = x\,\dfrac{df}{dx}$. Положим $\Delta^k f = \Delta(\Delta^{k-1} f)$. Тогда $\Lambda = (Q(\lambda_1), \Delta Q(\lambda_1), \ldots, \Delta^{r_1-1}Q(\lambda_1), \ldots, Q(\lambda_s), \ldots, \Delta^{r_s-1}Q(\lambda_s))$. Заметим, что $Q(\lambda) = \Delta Q(\lambda) = \ldots = \Delta^{r-1}Q(\lambda)$ при $\lambda = 0$ тогда и только тогда, когда λ является корнем кратности r многочлена $Q(x)$. Таким образом, $\vec{\Lambda} = \vec{0}$ означает, что λ_1 является корнем кратности r_1, λ_2 является корнем кратности r_2, наконец, λ_s является корнем кратности r_s многочлена $Q(x)$. Но $r_1 + r_2 + \ldots + r_s = k$, а $Q(x)$ является многочленом степени меньше k и, следовательно, не может иметь k корней. Пришли к противоречию. Таким образом, система $(*)$ имеет и притом единственное решение.

3.2. 1) $c_1 + c_2 \cdot 3^n$. Характеристический многочлен $x^2 - 4x + 3$ имеет корни $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_2 = 3$. С использованием задачи 3.1, 3) получаем общее решение $c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n$.

2) $c_1(-3)^{n/2} + c_2(-1)^n(-3)^{n/2}$. 3) $c_1((1+\sqrt{5})/2)^n + c_2((1-\sqrt{5})/2)^n$.

4) $(-1)^n(c_1 + c_2 n)$. 5) $(c_1 + c_2 n)(-4)^n + c_3(-2)^n$.

6) $(-1)^n(c_1 + c_2 n + c_3 n^2)$.

3.3. 1) $7 + 3^n$. Общее решение $c_1 + c_2 \cdot 3^n$ (см. задачу 3.2, 1)). Из начальных условий имеем $c_1 + 3c_2 = 10$, $x_1 + 9c_2 = 16$. Отсюда $c_1 = 7$, $c_2 = 1$, $a_n = 7 + 3^n$.

2) $3^n + (\sqrt{-1})^n + (-\sqrt{-1})^n$.

3) $c_1 + c_2 n + c_3(-2)^n$, где $c_1 = (14 - b - 4c)/9$, $c_2 = (b + c - 2a)/3$, $c_3 = (2b - c - a)/18$.

4) $\cos \alpha n$. Корнями характеристического многочлена являются $\lambda_{1,2} = e^{\pm i\alpha} = \cos\alpha \pm \sin\alpha$. Общее решение $a_n = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n$. Из равенств $a_1 = \cos\alpha$, $a_2 = \cos 2\alpha$ находим $c_1 = c_2 = 1/2$. Отсюда $a_n = (\lambda_1^n + \lambda_2^n)/2 = \cos \alpha n$.

5) $1 - (-1)^n$. 6) $3^n(1 + n)$.

3.4. 1) Подставляя $an + b$ в (3) вместо a_n, получаем, что $a(n+2) + b + p(a(n+1) + b) + q(an + b) = \alpha n + \beta$. Сравнивая коэффициенты при n в левой и правой частях, а также свободные члены, получаем, что $a = \alpha/(1 + p + q)$, $b = ((1 + p + q)\beta - \alpha(2 + p))/(1 + p + q)^2$.

2) Из того, что $x = 1$ является корнем многочлена $x^2 + px + q$, следует, что $p = -1 - q$. Подставляя $n(an + b)$ вместо a_n в равенство $a_{n+2} + pa_{n+1} - (p+1)a_n = \alpha n + \beta$, получаем, что $a = \alpha/(2(p+2))$; $b = (2\beta(p+2) - \alpha(p+4))/(2(p+2)^2)$.

3) Поскольку $x = 1$ является кратным корнем многочлена $x^2 + px + q$, то $p = 2$, $q = 1$. Подставляя $n^2(an + b)$ вместо a_n в равенство $a_{n+2} + 2a_{n+1} + a_n = \alpha_n + \beta$ и сравнивая коэффициенты при n^3, n^2, n, n^0, получаем, что коэффициенты при n^3 и n^2 равны 0 и $a = \alpha/6$, $b = (\beta - \alpha)/2$.

4) общее решение для задачи 1) $a_n = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n + \alpha n/(1+p+q) + (\beta(1+q+p) - \alpha(p+2))/(1+p+q)^2)$, где $\lambda_{(1,2)} = (-p \pm \sqrt{p^2 - 4q})/2$; для задачи 2) $a_n = c_1(-p-1)^n + c_2 + \alpha n/(2(p+2)) + (2\beta(p+2) - \alpha(p \pm \pm 4))/2(p+2)^2)$; для задачи 3) $a_n = n^2((\alpha n/6) + (\beta - \alpha)/2) + c_1 n + c_2$.

3.5. 1) $a_n = 1 + \binom{n}{2}$. Общее решение рекуррентного соотношения $a_{n+1} - a_n = 0$ есть произвольная константа c. Частное решение соотношения 1) будем искать в виде $a_n^* = n(an + b)$. Подставляя его в соотношение 1), получаем, что $a_n^* = n(n-1)/2$. Общее решение соотношения 1) имеет вид $a_n = a_n^* + c$. Из условия $a_1 = 1$ находим, что $c = 1$, а следовательно, $a_n = 1 + n(n-1)/2$.

2) $a_n = 2(-4)^n - 3 \cdot 2^n + 5^n$. Общее решение однородного соотношения $a_{n+2} + 2a_{n+1} - 8a_n = 0$ имеет вид $c_1(-4)^n + c_2 \cdot 2^n$. Частное решение неоднородного соотношения 2) будем искать в виде $a_n^* = d \cdot 5^n$. Подставляя a_i^* вместо a_i $(i = n, n+1, n+2)$ в соотношение 2), получаем, что $d = 1$. Общее решение неоднородного соотношения 2) $c_1(-4)^n + c_2 \cdot 2^n + 5^n$; из начальных условий находим, что $c_1 = 2$, $c_2 = -3$.

3) $2^{n-1} + (\sqrt{2})^{n-1}$. 4) $\frac{1}{27} + \frac{26}{27}(-2)^n + n\frac{3n-5}{18}$. 5) $2^{n-3}(n^2 - n + 8)$.

6) $\left(\frac{3}{5} + n\right)2^n + \frac{7}{5}(-3)^n$.

3.6. 1) Невырожденным является случай, когда либо $q_1 \neq 0$, либо $p_2 \neq \neq 0$. Если $q_1 = p_2 = 0$, то, очевидно, $a_n = c_1 p_1^n$, $b_n = c_2 q_2^n$. Пусть $q_1 \neq 0$. Тогда $b_n = 1/(q_1(a_{n+1} - p_1 a_n))$, $b_{n+1} = 1/(q_1(a_{n+1} - p_1 a_{n+1}))$. Подставляя b_{n+1} и b_n во второе соотношение, получаем $a_{n+2} + (-p_1 - q_2)a_{n+1} + (p_1 q_2 - p_2 q_1)a_n = 0$. Задача сведена к задаче 3.1.

а) $a_n = (5 + 2n) \cdot 2^n$, $b_n = -(1 + 2n) \cdot 2^n$.

3.7. 1) Индукция по n. При $n = 2$ соотношение $F_{2+m} = F_1 F_m + F_2 F_{m+1} = F_m + F_{m+1}$ верно для всех $m \geqslant 1$. Индуктивный переход $n \to n+1$: $F_{n+1+m} = F_{n+m} + F_{n+m-1} = F_{n-1}F_m + F_n F_{m+1} + F_{n-2}F_m + F_{n-1}F_{m+1} = F_n F_m + F_{n+1}F_{m+1}$.

2) Провести индукцию по k.

3) Если бы F_{n+1} и F_n имели общий делитель $d > 1$, то и F_{n-1} и F_n имели бы тот же общий делитель, поскольку $F_{n-1} = F_{n+1} - F_n$. По индукции отсюда вытекало бы, что и F_1 и F_2 имели бы делитель d.

4) Способ представления. Если $N = 2$, то $N = F_2 + F_1$. Если $N > 2$, то выбираем наибольшее n_1 такое, что $F_{n_1} \leqslant N$, затем наибольшее n_2 такое, что $F_{n_2} \leqslant N - F_{n_1}$, и т. д. Тогда $N = F_{n_1} + F_{n_2} + \ldots$ Поскольку $F_{n+1} > F_n$ при $n > 1$, то представление не может содержать двух чисел с одним и тем же индексом $n > 2$. Представление не может содержать двух соседних чисел F_n и F_{n+1}, поскольку $F_n + F_{n+1} = F_{n+2}$,

и, значит, на том шаге, когда было выбрано F_{n+1}, должно было быть выбрано F_{n+2}.

5) Общее решение рекуррентного соотношения $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ дано в задаче 3.2.

3) Используя начальные условия, получаем результат.

6), 7) Доказательство индукцией по n.

8) Применяя дважды тождество из задачи 1), имеем

$$F_{3n} = F_{n-1}F_{2n} + F_nF_{2n+1} = F_{n-1}(F_{n-1}F_n + F_nF_{n+1}) + F_n(F_n^2 + F_{n+1}^2) =$$
$$= F_{n-1}^2F_n + F_{n-1}F_nF_{n-1} + F_n^3 + F_{n+1}^2(F_{n+1} - F_{n-1}) =$$
$$= F_{n+1}^3 + F_n^3 + F_{n-1}^2F_n + F_{n+1}F_{n-1}(F_n - F_{n+1}) =$$
$$= F_{n+1}^3 + F_n^3 + F_{n-1}^2F_n - F_{n+1}F_{n-1}^2 = F_{n+1}^3 + F_n^3 - F_{n-1}^3.$$

3.8. 1) $(1-t)^{-1}$. 2) $1 + t + \ldots + t^N = (t^{N+1} - 1)/(t-1)$.

3) $(1-\alpha t)^{-1}$. 4) $e^{\alpha t}$. 5) $(1+t)^{-1}$. 6) $t(1-t)^{-2}$. 7) $2t^2(1-t)^{-3}$.

8) $(1+t)^m$. 9) $(1+t)^\alpha$. 10) $t(t+1)(1-t)^{-3}$.

11) $t\sin\alpha(1 - 2t\cos\alpha + t^2)^{-1}$. 12) $(1 - t\cos\alpha)(1 - 2t\cos\alpha + t^2)^{-1}$.

3.9. 1) e^t. По определению $E(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{a_n t^n}{n!} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{t^n}{n!}$. Этот ряд сходится к e^t.

2) $e^{\alpha t}$. 3) te^t. 4) t^2e^t.

5) $(1+t)^m$. По определению $E(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(m)_n t^n}{n!} = \sum\limits_{n=0}^{m} \binom{m}{n} t^n = (1+t)^n$.

6) $e^t(t^2 + t)$.

3.10. 1)–6) Сравнить коэффициенты при t^k.

3.11. 1) $\binom{m}{n} q^{m-n}p^n$. 2) 1. 3) $(-1)^n\binom{1/2}{n}$. 4) $(-1)^{n-m}\binom{m}{n-m}$.

5) $(-1)^{n-m}\sum\limits_k (-1)^{k(r-1)}\binom{m}{k}\binom{-m}{n-m-kr}$.

8) $\binom{-m}{n-2}\cdot 2^{n-2} - \binom{-m}{n-3}\cdot 2^{n-3}$. 9) $(-1)^{n-1}n^{-1}$.

10) $\dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}$. Воспользуемся тем, что $\int\limits_0^t \dfrac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arctg} t$. Имеем $(1+x^2)^{-1} = \sum\limits_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{2n}$. Интегрируя левую и правую части в пределах от 0 до t, получаем, что $\operatorname{arctg} t = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n t^{2n+1}}{2n+1}$.

11) $\dfrac{1\cdot 3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot\ldots\cdot 2n}\cdot\dfrac{1}{2n+1}$. Указание. $\int\limits_0^t \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin t$.

12) $\dfrac{(-2)^{n/2}}{(n/2)!}$ при четных n и 0 при нечетных n.

13) $\dfrac{(-1)^{n/2}}{(n/2+1)!}$ при четных n и 0 при нечетных n.

14) $(-1)^n\binom{n-1}{m-1}$.

3.12 1) Сравним коэффициенты при t^{n-1} в тождестве $(1+t)^n * (1+t)^{-m-2} = (1+t)^{n-m-2}$. С одной стороны, этот коэффициент равен $\sum\limits_s \binom{n}{n-s}\binom{-m-2}{s-1} = \sum\limits_s (-1)^{s-1}\binom{n}{s}\binom{m+s}{m+1}$, а с другой, $\binom{n-m-2}{n-1} = (-1)^{n-1}\binom{m}{n-1}$.

2) Рассмотреть тождество $(1+t)^m(1-t)^m = (1-t^2)^m$ и сравнить коэффициенты при t^{2n}.

3) Рассмотреть тождество $(1-t^{-1})^m * (1-t)^{-n-1} = (-1)^m t^{-m}(1-t)^{m-n-1}$ и коэффициенты при t^{k-m}.

4) Рассмотреть тождество $((1+t)^n + (1-t)^n)^2 = (1+t)^{2n} + 2(1-t^2)^n + (1-t)^{2n}$ и коэффициенты при t^{2m}.

5) Рассмотреть тождество $((1+t)^{-n-1} + (1-t)^{-n-1})((1+t)^{-n-1} - (1-t)^{-n-1}) = (1+t)^{-2n-2} - (1-t)^{-2n-2}$ и коэффициенты при t^{2n+1}.

6) Рассмотреть тождество $(1-t)^{2n}(1+2t(1-t)^{-2})^n = (1+t^2)^n$ и коэффициенты при t^{2m}.

3.13. 1) $A(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n t^n = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{a_n}{n!}\, t^n \int\limits_0^{\infty} e^{-x} x^n\, dx = \int\limits_0^{\infty} e^{-x} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{a_n}{n!}(xt)^n\, dx = \int\limits_0^{\infty} e^{-x} E(xt)\, dx.$

2) $\int\limits_0^{\infty} e^{-x} e^{xt}\, dx = \dfrac{1}{1-t}\int\limits_0^{\infty} e^{-u}\, du = (1-t)^{-1}.$

3) Для последовательности a_n из условия имеем

$$A(t) = \sum_{j\leqslant n} (n)_j t^n, \quad E(t) = \sum_{0\leqslant j\leqslant n} \frac{(n)_j}{n!}\, t^n = \sum_{0\leqslant j\leqslant n} \frac{t^n}{(n-j)!}.$$

Далее,

$$\int\limits_0^{\infty} e^x E(xt)\, dx = \int\limits_0^{\infty} e^{-x} \sum_{j=0}^{n} \frac{(xt)^n}{(n-j)!}\, dx = \sum_{j=0}^{n} \frac{t^n}{(n-1)!} \int\limits_0^{\infty} e^{-x} x^n\, dx = \sum_{j=0}^{n} (n)_j t^n = A(t).$$

3.14. 1) Воспользоваться тождеством $(1+t)^{a+b} = (1+t)^a \cdot (1+t)^b$. Сравнивая коэффициенты при t^n, получаем, что

$$\binom{a+b}{n} = \sum_k \binom{a}{n-k}\binom{b}{k} = \sum_k \frac{1}{k!(n-k)!}\,(a)_{n-k}(b)_k.$$

Умножая обе части на $n!$, получаем доказываемое равенство.

2) Положим $a' = a/h$, $b' = b/h$. Применяя тождество, доказанное в задаче 1), к a' и b', получаем, что $(a'+b')_n = \sum\limits_k \binom{n}{k}(a')_{n-k}(b')_k$. Умножая обе части на h^n, получаем доказываемое тождество (ибо $(a')_s \cdot h^s = (a)_{s,h}$).

3.15. 1) Умножим равенство $a_n = b_n - b_{n-1}$ на t^n и просуммируем по n. В области сходимости рядов $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ и $\sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n t^n$ справедливы тождества

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = \sum_{n=0}^{\infty} (b_n - b_{n-1}) t^n = \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n - \sum_{n=1}^{\infty} b_{n-1} t^n = B(t)(1-t).$$

2) Умножим равенство $a_n = b_{n+1} - b_n$ на t^{n+1} и просуммируем по n в пределах от 0 до ∞. Получим $tA(t) = B(t) - b_0 - tB(t)$.

3) Заметим, что $b_n = a_{n-1} - a_n$. Отсюда $B(t) = -A(t)(1-t) + a_{-1}$, причем $a_{-1} = B(1)$.

4) Умножая равенство $a_n = nb_n$ на t^n и суммируя, получаем $A(t) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} nb_n t^n = t\dfrac{d}{dt} B(t)$.

5) Аналогично задаче 4).

6) Сравним коэффициенты при t^n в равенстве $A(t) = (1-t)^{-k} B(t)$. Этот коэффициент для левой части равен по определению a_n, а для правой

$$\sum_{j=0}^{n} (-1)^j \binom{-k}{j} b_{n-j} = \sum_{j=0}^{n} \binom{k+j-1}{j} b_{n-j} = S^k(b_n).$$

7) Имеем $B(t^{1/2}) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} b_n t^{n/2}$, $B(-t^{1/2}) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n b_n t^{n/2}$. Умножая сумму этих рядов на $1/2$, получаем

$$\frac{1}{2}\left(B(t^{1/2}) + B(-t^{1/2})\right) = \sum_{n=0}^{\infty} b_{2n} t^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n = A(t).$$

8) Заметим, что $b_n = a_{n+1} - a_n$. Теперь равенство $A(t) = B(t) \cdot t \cdot (1-t)^{-1}$ вытекает из задачи 2).

3.16. 1) Первый способ. Пусть $C(t)$ — производящая функция последовательности $1, 0, 0, \ldots$ По условию $C(t) = A(t) \cdot B(t)$. Следовательно, должны выполняться равенства $1 = a_0 b_0$, $0 = a_0 b_1 + a_1 b_0, \ldots$, $0 = \sum\limits_{i=0}^{n} a_{n-i} b_i, \ldots$ Поскольку $a_n = \binom{m}{n}$, то для всех $n = 1, 2, \ldots$ $\sum\limits_{i=0}^{n} \binom{m}{n-i} b_i = 0$ и $\binom{m}{0} b_0 = 1$ для $n = 0$. Последовательно находим $b_0 = 1$, $b_1 = -m$, $b_2 = m(m+1)/2$, $b_3 = -m(m+1)(m+2)/6$. Индукцией по n нетрудно показать, что $b_n = \binom{-m}{n}$. Таким образом, $B(t) = (1+t)^{-m}$.

Второй способ. $A(t) = (1+t)^m$, $B(t) = [A(t)]^{-1} = (1+t)^{-m}$. Отсюда $b_n = \binom{-m}{n}$.

2) $b_0 = 1$, $b_1 = -a$, $b_n = 0$ при $n > 1$, $B(t) = 1 - at$. Имеем $A(t) = \sum\limits_{n \geqslant 0} (at)^n = (1-at)^{-1}$, а поскольку $A(t)B(t) = 1$, то $B(t) = 1 - at$.

3) $b_0 = b_2 = 1$, $b_1 = -2$, $b_n = 0$ $(n > 2)$, $B(t) = (1-t)^2$.

4) $b_{2n} = (-1)^n$, $b_{2n+1} = 0$ $(n \geqslant 0)$, $B(t) = (1+t^2)^{-1}$.

5) $b_0 = b_1 = 1$, $B(t) = 1 + t$. 6) $b_n = \binom{1/2}{n}$, $B(t) = \sqrt{1+t}$.

3.17. 1) Умножая на t^{n+2} и суммируя, получаем $A(t) = a_1 t - a_0 + pt A(t) - p a_0 t + q A(t) t^2$.

2) Представим $A(t)$ в виде $\dfrac{c_1}{1-\lambda_1 t} + \dfrac{c_2}{1-\lambda_2 t}$. Найдя c_1 и c_2, получим $A(t) = \dfrac{1}{\lambda_1 - \lambda_2} \cdot \left(\dfrac{a_1 + p a_0 + \lambda_1 a_0}{1-\lambda_1 t} - \dfrac{a_1 + p a_0 + \lambda_2 a_0}{1-\lambda_2 t} \right)$. Найдя коэффициент при t^n в разложении $A(t)$ в ряд по степеням t, получим выражение для a_n.

3) Представим $A(t)$ в виде $\dfrac{c_1}{1-\lambda t} + \dfrac{c_2}{(1-\lambda t)^2}$. Из равенства $\dfrac{c_1}{1-\lambda t} + \dfrac{c_2}{(1-\lambda t)^2} = \dfrac{a_0 + (a_1 - 2\lambda a_0)t}{(1-\lambda t)^2}$ найдем, что $c_1 = -\dfrac{a_1}{\lambda} + 2a_0$, $c_2 = \dfrac{a_1}{\lambda} - a_0$. Разлагая $A(t)$ в ряд, получаем $A(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (c_1 \lambda^n + c_2 (n+1) \cdot \lambda^n) t^n$, $a_n = \left(a_0 + n \left(\dfrac{a_1}{\lambda} - a_0 \right) \right) \lambda^n$.

3.18. 1) Указание. Использовать тождество из задачи 1.15, 3).

2) Умножим каждое из соотношений задачи 1) на t^{n+1} и просуммируем по n от 0 до ∞. С использованием начальных условий получаем соотношения между производящими функциями.

3) $A(t) = \dfrac{1-t}{1-3t+t^2}$, $B(t) = \dfrac{t}{1-3t+t^2}$.

4) Корнями уравнения $1 - 3t + t^2 = 0$ являются $\lambda_1 = \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ и $\lambda_2 = \dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$. Выразим $A(t)$ в виде $A(t) = \dfrac{a}{1-\lambda_1 t} + \dfrac{b}{1-\lambda_2 t}$. Поскольку $A(t) = \dfrac{1-t}{(1-\lambda_1 t)\cdot(1-\lambda_2 t)}$, то приравняв правые части, получим равенство $a(1-\lambda_2 t) + b(1-\lambda_1 t) = 1 - t$. Отсюда $a = \dfrac{\lambda_1 - 1}{\lambda_1 - \lambda_2} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2} \cdot \sqrt{5}$, $b = 1 - a = \dfrac{\sqrt{5}-1}{2} \cdot \sqrt{5}$. Таким образом, $A(t) = \dfrac{1}{2\sqrt{5}} \left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{1-\lambda_1 t} + \dfrac{\sqrt{5}-1}{1-\lambda_2 t} \right)$. Аналогично находим $B(t) = \dfrac{1}{\sqrt{5}} \left(\dfrac{1}{1-\lambda_1 t} - \dfrac{1}{1-\lambda_2 t} \right)$. Разлагая $A(t)$ и $B(t)$ в ряд по степеням t, получаем, что $a_n = (2\sqrt{5})^{-1}((1+\sqrt{5})\lambda_1^n + (\sqrt{5}-1)\lambda_2^n)$, $b_n = (\sqrt{5})^{-1}(\lambda_1^n - \lambda_2^n)$. С учетом неравенств $0 < \lambda_2 < \lambda_1$ получаем, что $\lim\limits_{n\to\infty} a_n \cdot \lambda_1^{-n} = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2\sqrt{5}}$, $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \cdot \lambda_1^{-n} = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$.

3.19. 1) Умножая на t^n и суммируя исходное соотношение, получаем $A(t) - a_0 = tA^2(t)$.

2) Имеем

$$A(t) = (2t)^{-1}(1-(1-4t)^{1/2}) = (2t)^{-1}\left(1 - \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \binom{1/2}{n} (4t)^n\right) =$$

$$= 2\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \binom{1/2}{n} (4t)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} \binom{2n}{n} t^n.$$

3) Умножая на t^n и суммируя по n, получаем для производящей функции $A(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ функциональное уравнение $A^2(t) = A(2t)$. Будем ис-

кать его решение в виде $A(t) = e^{\alpha t}$. Эта функция, очевидно, удовлетворяет функциональному уравнению. Учитывая, что $a_1 = 1$, находим, что $\alpha = 1$, откуда $a_n = 1/n!$. Единственность решения вытекает из исходных соотношений.

3.20. 1) Пронумеруем вершины $(n+2)$-угольника числами $1, 2, \ldots$ $\ldots, n+2$ по часовой стрелке. Возможны два случая.

Первый случай. Через вершину $n+2$ не проходит ни одна диагональ. Тогда должна существовать диагональ между вершинами 1 и $n+1$, а число способов разбиения равно a_{n-1}.

Второй случай. Существует диагональ, исходящая из вершины $n+2$. Пусть k — наименьший номер такой, что вершина $k+1$ соединена диагональю с вершиной $n+2$. Если $k \geqslant 2$, то существует диагональ вида $(1, k+1)$. Тогда число разбиений исходного $(n+2)$-угольника равно числу разбиений $(k+1)$-угольника с вершинами $1, 2, \ldots, k+1$, умноженному на число разбиений $(n-k+2)$-угольника с вершинами $k+1$, $k+2, \ldots, n+2$, т. е. равно $a_{k-1}a_{n-k}$ $(2 \leqslant k \leqslant n)$. Естественно считать, что $a_0 = 1$. Тогда имеем $a_n = \sum_{k=1}^{n} a_{k-1}a_{n-k}$. Так же, как в задаче 3.19, находим, что $a_n = \dfrac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$.

2) $a_n = \dfrac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$. Решается аналогично задаче 1).

3.21. 1) $n!$. 2) $(-1)^{n-1}/(n-1)!$.

3) $1^2 \cdot 3^2 \cdot \ldots \cdot (n-2)^2/n!$ при нечетных n, 0 при четных n.

4) 0 при нечетных n, $(-1)^{n/2} \cdot 2^{-n}((n/2)!)^{-1}$ при четных n.

5) $(-1)^{(n-1)/2}n^2$ при нечетных n, 0 при четных n.

6) $a_n = F_n$, где $\{F_n\} = 1, 1, 2, 3$ — последовательность Фибоначчи. Докажем сначала, что если последовательность $\{a_n\}$ удовлетворяет соотношению

$$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n, \quad a_0 = a_1 = 1, \tag{$*$}$$

то она удовлетворяет соотношению

$$a_{n+1}^2 - a_n a_{n+2} = (-1)^{n-1}, \quad a_0 = a_1 = 1. \tag{$**$}$$

При $n = 0, 1$ утверждение справедливо. Индуктивный переход:

$$a_{n+2}^2 - a_{n+1}a_{n+3} = a_{n+2}^2 - a_{n+1}(a_{n+2} + a_{n+1}) =$$
$$= a_{n+2}(a_{n+2} - a_{n+1}) - a_{n+1}^2 = a_{n+2}a_n - a_{n+1}^2 = (-1)^{n+2}.$$

Таким образом, $\{F_n\}$ удовлетворяет $(**)$. Других решений соотношение $(**)$ не имеет в силу того, что $(**)$ вместе с начальными условиями определяет a_n единственным образом.

3.22. 1) Умножая рекуррентное соотношение на t^k и суммируя по k, получаем, что $(1-t)A_n(t) = A_{n+1}(t)$.

2) Поскольку $a(0, 0) = 1$ и $a(0, k) = 0$ при всех $k > 0$, то $A_0(t) = 1$. Индукцией по n с использованием задачи 1) получаем, что $A_n(t) = (1-t)^{-n}$.

3) Разлагая $a(n, k)$ в ряд, получаем, что $a(n, k) = \binom{-n}{k}(-1)^k =$ $= \binom{n+k-1}{k}$.

3.23. 1) 20. 3) 6. 3) 10.

3.24. 1) $A(t) = (1-t^2)^{-1} \cdot (1-t^3)^{-1} \cdot (1-t^5)^{-1}$.

3.25. 1) Заметим, что $A(qt) = \prod\limits_{k=1}^{\infty}(1-q^{k+1}\cdot t) = A(t)(1-qt)^{-1}$ и, следовательно, $A(t) = A(qt)(1+qt)$. Коэффициент при t^n в левой части равен по определению a_n, в правой $a_n q^n - a_{n-1}q^{n-1}$. Отсюда индукцией по n получаем, что $a_n = q^{n(n+1)/2}\prod\limits_{k=0}^{n}(q^k-1)^{-1}$ $(n = 1, 2, \ldots, a_0 = 1)$.

2) См. решение задачи 3.24, 1).

3.26. 1), 2) $S(n, k, l+1) = \sum\limits_{\nu=0}^{n}(-1)^{n-\nu}\left[\binom{n+1}{\nu+1} - \binom{n}{\nu+1}\right] \times$

$$\times (n+1+l)^k = -\sum_{\nu=1}^{n+1}(-1)^{n+1-\nu}\binom{n+1}{\nu}(\nu+l)^k +$$

$$+\sum_{\nu=1}^{n}(-1)^{n-\nu}\binom{n}{\nu}(\nu+l)^k = -S(n+1, k, l) + S(n, k, l).$$

3) $S(n, k+1, l) = \sum\limits_{\nu=0}^{n}(-1)^{n-\nu}\binom{n}{\nu}(\nu+l)^k(\nu+l) =$

$$= \sum_{\nu=0}^{n}(-1)^{n-\nu}n\binom{n-1}{\nu-1}(\nu+l)^k + lS(n, k, l) =$$

$$= n\sum_{\nu=0}^{n}(-1)^{n-\nu}\left(\binom{n}{\nu} - \binom{n-1}{\nu}\right) + lS(n, k, l) =$$

$$= (n+l)D(n, k, l) + nS(n-1, k, l).$$

4) Доказательство индукцией по k с использованием задачи 3). Для любых l и $n > 1$ имеем $S(n, 0, l) = \sum\limits_{\nu=0}^{n}(-1)^{n-\nu}\binom{n}{\nu} = 0$. Пусть утверждение верно для некоторого $k \geqslant 0$, любых $n > k$ и любых l. Пусть $k+1 < n$. Из задачи 3) имеем $S(n, k+1, l) = (n+l)S(n, k, l) + nS(n-1, k, l)$. Поскольку $k < n-1$, то в силу предположения индукции $S(n, k, l) = S(n-1, k, l) = 0$ и, следовательно, $S(n, k+1, l) = 0$.

5) Индукция по n. Имеем $S(0, 0, l) = l^0 = 1 = 0!$. Пусть $S(n, n, l) = n!$ для некоторого $n \geqslant 0$ и всех l. Используя задачи 3) и 4), получаем

$$S(n+1, n+1, l) = (n+1+l)S(n+1, n, l) + (n+1)S(n, n, l) =$$

$$= (n+1)S(n, n, l) = (n+1)!.$$

6) Индукция по k. В силу задачи 5) имеем $S(n, n, l) = n! > 0$ при всех n и всех l. Пусть $S(n, k, l) \geqslant 0$ для некоторого $k > n$ и любых n и l. Воспользовавшись задачей 3), имеем $S(n, k+1, l) = (n+l)S(n, k, l) + nS(n-1, k, l) > 0$.

7) Вытекает из задач 1), 2) и 6). 8) Вытекает из задач 3) и 5).

9) Может быть выведено из задач 3) и 4) индукцией по k.

3.27. 1) В силу задачи 3.26, 9) имеем $\sigma_1(t) = \sum\limits_{k=0}^{\infty}S(1, k, 0)t^n = \sum\limits_{k=1}^{\infty}t^n =$

$= t(1-t)^{-1}$. Далее в силу задачи 3.26, 3) имеем $S(n, k+1) = nS(n, k) +$

$+nS(n-1,k)$. Умножая обе части равенства на t^{k+1} и суммируя по k, получаем $\sigma_n(t)(1-nt)=nt\sigma_{n-1}(t)$. Теперь утверждение доказывается индукцией по n.

2) При $n=1$ правые части формул из задач 1) и 2) для σ_n совпадают. Если будет доказано, что для $\sigma_n(t)=t\sum\limits_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}k\binom{n}{k}(1-kt)^{-1}$ справедливо рекуррентное соотношение $\sigma_{n-1}(t)=((1-nt)/(nt))\cdot\sigma_n(t)$, то утверждение будет вытекать из него по индукции. Имеем

$$\frac{1-nt}{nt}\,\sigma_n(t)=\frac{1-nt}{nt}\,t\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}k\binom{n}{k}(1-kt)^{-1}=$$

$$=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n-1}{k-1}\frac{1-nt}{1-kt}=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n-1}{k-1}\Bigl(1-\frac{(n-k)t}{1-kt}\Bigr)=$$

$$=\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{n-k+1}\binom{n-1}{k-1}\frac{(n-k)t}{1-kt}=t\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{n-k-1}k\binom{n-1}{k}(1-kt)^{-1}=$$

$$=\sigma_{n-1}(t).$$

§ 4

4.1. 1) (0, 0, 0, 1). 2) (2, 1, 0, 0). 3) (0, 0, 2, 0, 0, 0).
4) (2, 0, 0, 0, 0, 1, 0, 0).

4.2. Транспозицию элементов i и j обозначим парой (i, j). Тогда $(2,3,4,1)=(1,2)(2,3)(3,4)$, $(4,2,3,1)=(1,4)(1,2)(1,3)$, $(3,4,5,6,1,2)=$ $=(1,5)(2,6)(3,5)(4,6)$, $(8,2,1,7,4,6,3,5)=(1,3)(1,7)(4,5)(4,8)(1,4)$.

4.3. 1) Существуют четыре поворота квадрата в плоскости, переводящие квадрат в себя: на 0°, на 90°, на 180°, на 270°. Этим поворотом соответствуют подстановки (1, 2, 3, 4), (2, 3, 4, 1), (3, 4, 1, 2), (4, 1, 2, 3). Первая из подстановок имеет тип (4, 0, 0, 0), остальные — тип (0, 0, 0, 1). Цикловой индекс: $P_G(t_1,t_2,t_3,t_4)=(t_1^4+3t_4)/4$.

2) Кроме подстановок задачи 1) появляются еще четыре: (1, 4, 3, 2), (3, 2, 1, 4), (2, 1, 4, 3), (4, 3, 2, 1), соответствующие поворотам квадрата вокруг диагоналей и осей. Две из них имеют тип (2, 1, 0, 0), а две другие — тип (0, 0, 0, 1). Отсюда $P_G=(t_1^4+3t_4+2t_1^2t_2+2t_2^2)/8$.

3) Существует 12 вращений тетраэдра: тождественное; восемь вращений на 120° вокруг оси, проходящей через вершину и середину противоположной грани; три вращения вокруг оси, проходящей через середины противоположных ребер. Отсюда $P_G=(t_1^4+8t_1t_3+3t_2^2)/12$.

4) $P_G=(t_1^6+8t_3^2+3t_1^2t_2^2)/12$. 5) $P_G=(t_1^4+8t_1t_3+3t_2^2)/12$.

6) $P_G=(t_1^3+3t_1t_2+2t_3)/6$. 7) $P_G=(t_1^4+8t_1t_3+3t_2^2)/12$.

4.4. 1) Докажем это утверждение непосредственно и с помощью леммы Бернсайда. Группа G состоит из подстановок $\pi_1=(1,2,3,4)$, $\pi_2=(2,3,4,1)$, $\pi_3=(3,4,1,2)$, $\pi_4=(4,1,2,3)$. Непосредственно видно, что для любой пары $1\leqslant i,j\leqslant 4$ существует подстановка π такая, что $\pi_i=j$. Таким образом, все элементы эквивалентны. Имеется один класс эквивалентности. Теперь получим тот же результат с помощью леммы Бернсайда. Имеем $|G|=4$, $b_1(\pi_1)=4$, $b_1(\pi_i)=0$ при $i=2,3,4$. Отсюда $\nu(G)=$ $=(4+0+0+0)/4=1$.

2) Заметим, что элементы 1 и 2 переводятся один в другой перестановкой π_3, а перестановка π_2 переводит друг в друга элементы 3 и 4,

но ни одна из перестановок не переводит элементы множества $\{1, 2\}$ в элементы множества $\{3, 4\}$. Таким образом, имеются две орбиты. Применим лемму Бернсайда: $|G| = 4$, $b_1(\pi_1) = 4$, $b_1(\pi_2) = b(\pi_3) = 2$, $b_1(\pi_4) = 0$, $\nu(G) = (4 + 2 + 2 + 0)/4 = 2$.

4.5. Требуется доказать, что $|G|\nu(G) = \sum\limits_{\pi \in G} b_1(\pi)$, где $|G|$ — порядок (число элементов) группы G, $\nu(G)$ — число классов G-эквивалентности (орбит) на множестве Z_n, $b_1(\pi)$ — число элементов, которые подстановка π оставляет на месте. Положим $G_{y\to x} = \{\pi \in G\colon \pi y = x\}$. Если $M \subseteq Z_n$ — некоторая орбита и $x \in M$, то $G = \bigcup\limits_{y \in M} G_{y\to x}$. При этом, очевидно, $G_{v\to x} \cap \cap G_{y\to x} = \varnothing$ при $v \ne y$. Заметим, что $|G_{y\to x}| = |G_{x\to x}|$, если $y \sim x$, т. е. если y принадлежит той же орбите, что и x. В самом деле, если $\sigma \in G_{y\to x}$ и $G_{x\to x} = \{\pi_1, \ldots, \pi_m\}$, то $\{\sigma\pi_1, \ldots, \sigma\pi_m\} \in G_{y\to x}$, причем $\sigma\pi_i \ne \sigma\pi_j$ при $i \ne j$. С другой стороны, если $G_{y\to x} = \{\sigma_1, \ldots, \sigma_k\}$ и $\sigma \in G_{y\to x}$, то $\{\sigma^{-1}\sigma_1, \ldots, \sigma^{-1}\sigma_k\} \subseteq G_{x\to x}$ и $\sigma^{-1}\sigma_i \ne \sigma^{-1}\sigma_j$ при $i \ne j$. Отсюда вытекает, что $|G_{y\to x}| = |G_{x\to x}|$. Пусть теперь $M_1, \ldots, M_{\nu(G)}$ — орбиты и $x_i \in M_i$. Тогда

$$\sum_{\pi \in G} b_1(\pi) = \sum_{x \in Z_n} |G_{x\to x}| = \sum_{i=1}^{\nu(G)} \sum_{y \in M_i} |G_{y\to x_i}| = \sum_{i=1}^{\nu(G)} |G| = |G| \cdot \nu(G).$$

4.6. 1) Каждую подстановку π из S_n, имеющую тип $\mathbf{b} = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$, можно представить в виде произведения циклов так, чтобы длины циклов не убывали: $\pi = (i_1)(i_2)\ldots(i_{b_1})(i_{b_1+1}, i_{b_1+2})\ldots$ Две такие записи могут задавать, вообще говоря, одну и ту же подстановку. Это может произойти в двух случаях:

а) когда одинаковые циклы стоят в этих записях на разных местах;

б) когда циклы хотя и равны (как циклы подстановки), но их записи начинаются с разных элементов (например, (1 2 3) и (2 3 1)). Первая причина приводит к повторению одной и той же подстановки $\prod\limits_{k=1}^{n} b_k!$, вторая — к повторению $\prod\limits_{k=1}^{n} k^{b_k}$ раз. Эти причины действуют независимо.

2) По определению имеем

$$P_{S_n}(t_1, \ldots, t_n) = (n!)^{-1} \sum_{\pi \in S_n} t_1^{b_1(\pi)} \ldots t_n^{b_n(\pi)} =$$

$$= (n!)^{-1} \sum_{\mathbf{b}} \sum_{\pi \in H(\mathbf{b})} t_1^{b_1} \ldots t_n^{b_n} = (n!)^{-1} \sum_{\mathbf{b}} h(\mathbf{b}) \prod_{i=1}^{n} t_i^{b_i}.$$

3) Имеем

$$\exp\Big\{t_1 x + t_2 \frac{x^2}{2} + t_3 \frac{x^3}{3} + \ldots\Big\} = \prod_{k=1}^{\infty} \exp\Big\{\frac{t_k x^k}{k}\Big\} =$$

$$= \prod_{k=1}^{\infty} \Big(\sum_{b_k=0}^{\infty} x^{kb_k} t_k^{b_k} k^{-b_k} (b_k!)^{-1} \Big).$$

Коэффициент при x^n равен сумме по всевозможным целым неотрицательным числам $b_1, b_2, \ldots$ таким, что $b_1 + 2b_2 + \ldots + nb_n = n$, слагаемых вида $\prod\limits_{k=1}^{n} t_k^{b_k} (b_k! k^{b_k})^{-1}$.

4.7. Заметим, что цикл четной длины является нечетной подстановкой, а цикл нечетной длины — четной подстановкой. В выражение $P_{S_n}(t_1, -t_2, \ldots, (-1)^{n-1}t_n)$ каждая нечетная подстановка типа $(b_1, \ldots, b_n)$ дает вклад, равный $-t_1^{b_1} \ldots t_n^{b_n}$, а в выражение $P_{S_n}(t_1, \ldots, t_n)$ — вклад, равный $t_1^{b_1} \ldots t_n^{b_n}$. Поэтому слагаемые правой части доказываемого равенства, соответствующие нечетным подстановкам, взаимно уничтожаются, а слагаемые, соответствующие четным подстановкам, удваиваются. Кроме того, как легко видеть, $|A_n| = |S_n|/2 = (n!)/2$. Отсюда и вытекает утверждение.

4.8. 1), 2) Очевидно. 3) По определению P_G.

4.9. 1) 20. Ожерелье из семи бусин можно окрасить в два цвета $2^7 = 128$ способами. Имеется множество G из семи различных поворотов $\pi_1, \ldots, \pi_7$, переводящих ожерелье в себя. Тип тождественной перестановки есть (7, 0, 0, 0, 0, 0, 0), тип каждой из остальных подстановок имеет вид (0, 0, 0, 0, 0, 0, 1). Цикловой индекс есть $P_G(t_1, \ldots, t_7) = (t_1^7 + 6t_7)/7$. По теореме Пойа число различных классов эквивалентности равно $P_G(2, 2, 2, 2, 2, 2, 2) = 20$.

2) Цикловой индекс есть $P(t_1, \ldots, t_n) = (t_1^n + (n-1)t_n)/n$. Число ожерелий равно $P(k, \ldots, k) = (k^n + (n-1)k)/n$.

4.10. 1) Цикловой индекс равен (см. задачу 4.3, 3)) $P_G = (t_1^4 + 8t_1t_3 + 3t_3^2)/12$. По теореме Пойа число окрасок равно $P_G(2, 2, 2, 2) = 5$.

2) Цикловой индекс P_G найден в задаче 4.3, 9). Число окрасок равно $P_G(3, 3, 3, 3, 3, 3) = 57$.

3) Пусть M — множество граней куба, G — группа вращений, N — множество, состоящее из трех цветов: красного, синего и белого. Придадим вес x красному цвету, вес y синему и z белому. Цикловой индекс (см. задачу 4.3, 8)) есть $P_G = (t_1^6 + 3t_1^2t_2^2 + 6t_1^2t_4 + 6t_2^3 + 8t_3^2)/24$. По теореме Пойа перечисляющий ряд для функций равен $P_G(f_1, f_2, f_3, f_4)$, где $f_k = x^k + y^k + z^k$ $(k = 1, 2, 3, 4)$. Таким образом, $P_G(f_1, f_2, f_3, f_4) = \dfrac{1}{24}\,((x+y+z)^6 + 3(x+y+z)^2(x^2+y^2+z^2)^2 + 6(x+y+z)^2(x^4+y^4+z^4) + 6(x^2+y^2+z^2)^3 + 8(x^3+y^3+z^3)^2)$. Число различных окрасок, при которых три грани окрашены в красный цвет, две — в синий и одна — в белый, равно коэффициенту $c_{3,2,1}(P_G)$ при $x^3y^2z^1$ в $P_G(f_1, f_2, f_3, f_4)$. Имеем $c_{3,2,1}P_G(f_1, f_2, f_3, f_4) = \dfrac{1}{24}\,c_{3,2,1}((x+y+z)^6 + 3(x+y+z)^2(x^2+y^2+z^2)^2) = \dfrac{1}{24}\left(\dfrac{6!}{3!\,2!\,1!} + 3 \cdot 2 \cdot 2\right) = 3$.

4.11. $P_G(N, N, \ldots, N)$. Следует из теоремы Пойа.

4.14. 1), 2) Пусть π — некоторая подстановка из n элементов, имеющая k циклов. Элемент n в ней может образовывать единичный цикл. Тогда такой перестановке можно взаимно однозначно поставить в соответствие перестановку из $n-1$ элементов с $k-1$ циклами (число таковых равно $p(n-k, k-1)$). Если элемент n не образует единичного цикла, то перестановка π может быть получена из некоторой подстановки из $n-1$ элементов с k циклами каждая путем включения элемента в некоторый цикл. Для фиксированной перестановки на $n-1$ элементах с k циклами такое включение можно провести $n-1$ способами (ставить элемент n на первое место нельзя, так как n — наибольший элемент). Отсюда следует, что $P(n, k) = p(n-1, k-1) + p(n-1, k) \cdot (n-1)$. Умножая равенство на t^k и суммируя по k, получаем соотношение между производящими функциями $\mathscr{P}_n(t) = (t+n-1)\mathscr{P}_{n-1}(t)$. Отсюда по индукции с учетом равенства $p_1(t) = t$ получаем, что $\mathscr{P}_n(t) = t(t+1)\ldots(t+n-1)$.

§ 5

5.1. 1) Заметим, что $n \leqslant (i+1)(n-i) < ((n+1)/2)^2$ при $0 \leqslant i < n$. Отсюда

$$n^{n/2} \leqslant \prod_{1 \leqslant i \leqslant n/2} (i+1)(n-i) \leqslant n! \leqslant \frac{n+1}{2} \prod_{1 \leqslant i < n/2} (i+1)(n-i) \leqslant \left(\frac{n+1}{2}\right)^n.$$

2) Заметить, что $(i+1)(2n-i) \leqslant n(n+1)$.

3) Имеем $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{n}{k} n^{-k} \leqslant \sum\limits_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \leqslant 2 + \sum\limits_{k=1}^{n} \frac{1}{2^k} < 3$.

4) Индукция по n. При $n=1$ неравенство верно. Если $(n/3)^n < n!$, то $((n+1)/3)^{n+1} = (n/3)^n((n+1)/n)^n \leqslant$ (см. 3)) $\leqslant (n/3)^n(n+1) \leqslant (n+1)!$.

5) Заметив, что $(n!)^2 \leqslant (2n)! \cdot 2^{-n}$, воспользоваться результатом задачи 2).

6) Использовать неравенство Коши $\sqrt[k]{a_1 a_2 \ldots a_k} \leqslant (a_1 + a_2 + \ldots + a_k)/k$, $a_i \geqslant 0$, и тот факт, что среднее арифметическое множителей, стоящих в левой части неравенства, равно $\frac{2}{n(n+1)} \sum\limits_{i=1}^{n} i^2 = \frac{2n+1}{3}$.

7) Положив $a_n = (2n-1)\sqrt{3n+1}\,(2n!!)^{-1}$, показать, что $a_{n+1}^2/a_n^2 < 1$. Далее провести индукцию по n.

8) Заметить, что $i(2n-i) < n^2$ при $i < n$. 9) $e^n = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \frac{n^k}{k!} > \frac{n^n}{n!}$.

10) При $n=1$ неравенство очевидно. Предположим, что $(1+\alpha) > 1+\alpha n$ для всех $-1 \leqslant \alpha$ и некоторого $n \geqslant 1$. Тогда $(1+\alpha)^{n+1} = (1+\alpha)(1+\alpha)^n \geqslant (1+\alpha)(1+\alpha n) = 1+\alpha(n+1)+\alpha^2 n \geqslant 1+\alpha(n+1)$.

11) Разложив обе части неравенства по формуле бинома Ньютона, сравним члены разложения с одинаковыми номерами. Имеем $\binom{n}{k} n^{-k} = \binom{n+1}{k}(n+1)^{-k}$ при $k = 0, 1$. Далее, $\binom{n}{k} n^{-k} \Big/ \binom{n+1}{k}(n+1)^{-k} = (1-k/(n+1))(1-1/(n+1))^k$. В силу задачи 10) отношение не превосходит 1. Таким образом, каждое слагаемое разложения $(1+1/n)^n$ не превосходит соответствующего слагаемого из разложения $(1+1/(n+1))^{n+1}$. Кроме того, в последнем разложении имеется еще $(n+2)$-е слагаемое, равное $(n+1)^{-(n+1)} > 0$. Отсюда и вытекает строгое неравенство.

5.2. 1) Положим $a_k = \left(\frac{2(n-k)}{k+1}\right) \Big/ \binom{n}{k}$ и убедимся, что $\frac{a_{k+1}}{a_k}$ при $k \geqslant 1$. С учетом того, что $a_1 \leqslant 1$, отсюда следует первое неравенство. Второе вытекает из задачи 5.1, 3).

2) $\left(\frac{n}{k}\right)^k \leqslant \frac{(n)_k}{k!}$ при $1 \leqslant k \leqslant n$. Второе неравенство можно получить, рассмотрев отношение $\frac{a_{k+1}}{a_k}$, где $a_k = \binom{n}{k} k^k (n-k)^{n-k} n^{-n}$. Имеем $\frac{a_{k+1}}{a_k} = (1+(n-k-1)^{-1})^{n-k-1}\left(1+\frac{1}{k}\right)^{-k}$. Поскольку $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m$ монотонно возрастает с ростом m (см. задачу 5.1, 11)), то $\frac{a_{k+1}}{a_k} \geqslant 1$ при $k \leqslant \frac{n-1}{2}$. Отсюда с учетом того, что $a_1 < 1$, вытекает справедливость неравенст-

ва $a_k < 1$ для $k \leqslant \dfrac{n-1}{2}$. Для $k > \dfrac{n}{2}$ неравенство вытекает из соображений симметрии.

3) Первое неравенство докажем индукцией по n. При $n = 1$ неравенство верно. Предполагая его справедливость при некотором $n \geqslant 1$, имеем

$$\binom{2(n+1)}{n+1} = 2\,\frac{2n+1}{n+1}\binom{2n}{n} > 2\,\frac{2n+1}{n+1}\cdot\frac{4^n}{2\sqrt{n}} > \\ > \frac{(2n+1)}{\sqrt{n+1}\cdot n}\cdot 4^n > \frac{1}{2\sqrt{n+1}}\cdot 4^{n+1}.$$

Второе неравенство можно доказать по индукции с использованием задачи 5.1, 7).

5.3. 1) $(2n-1)!! = (2n)!(n!)^{-1}\cdot 2^{-n} \sim$

$$\sim \sqrt{2\pi(2n)}(2n)^{2n}e^{-2n}(2\pi n)^{-1/2}n^{-n}e^n\cdot 2^{-n} \sim \sqrt{2n^n e^{-n}}\cdot 2^n.$$

2) $\binom{2n}{n} = (2n)!(n!)^{-2} \sim \sqrt{4\pi n}(2n)^{2n}e^{-2n}(2\pi n)^{-1}\times$

$$\times\, n^{-2n}2^{2n}\sin(\pi n)^{-1/2}\cdot 4^n.$$

5) $(2n)!!((2n-1)!!)^{-1} = (2n)!((2n-1)!!)^{-2}$. Далее можно использовать формулу Стирлинга и результат задачи 1).

5.4. 1) $\displaystyle\int_0^1 (1+t)^n\,dt = \frac{1}{n+1}\,(1+t)^{n+1}\Big|_0^1 = \frac{2^{n+1}}{n+1} - \frac{1}{n+1}$. С другой стороны, $\displaystyle\int_0^1 (1+t)^n\,dt = \int_0^t \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}t^k = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k}\int_0^1 t^k\,dt = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k+1}\binom{n}{k}$.

2) Воспользовавшись результатом задачи 1.19, 3), имеем

$$\sum_\nu \binom{n}{k\nu+r} = \frac{1}{k}\sum_{\nu=0}^{k-1}\exp\left\{-\frac{2\pi i r\nu}{k}\right\}\left(1+\exp\left\{\frac{2\pi i\nu}{k}\right\}\right)^n = \\ = \frac{1}{k}\,2^n + \sum_{\nu=1}^{k-1}\exp\left\{-\frac{2\pi i r\nu}{k}\right\}\left(1+\exp\left\{\frac{2\pi i\nu}{k}\right\}\right)^n.$$

Заметим, что $|\exp\{-2\pi i r\nu/k\}| = 1$ и

$$\left|1+\exp\left\{\frac{2\pi i\nu}{k}\right\}\right| = \left|1+\cos\frac{2\pi\nu}{k}+i\sin\frac{2\pi\nu}{k}\right| = \\ = \left|2\cos\frac{\pi\nu}{k}\left(\cos\frac{\pi\nu}{k}+i\sin\frac{\pi\nu}{k}\right)\right| = 2\left|\cos\frac{\pi\nu}{k}\right| \leqslant 2\cos\frac{\pi}{k}.$$

Отсюда

$$\left|\sum_{\nu=1}^{k-1}\exp\left\{-\frac{2\pi i r\nu}{k}\right\}\left(1+\exp\left\{\frac{2\pi i\nu}{k}\right\}\right)^n\right| \leqslant (k-1)\left(2\cos\frac{\pi}{k}\right)^n = O\left(\frac{2^n}{k}\right).$$

3) Воспользоваться результатом задачи 1.20, 1) и заметить, что $|1+\alpha e^{2\pi\nu/k}| \leqslant 1-\alpha+2\alpha\cos\dfrac{\pi\nu}{k} < 1+\alpha$ при $0 < \nu < k$.

4) С использованием задач 1.18, 9) и 5.3, 2) получаем

$$\sum_{k=1}^n k\binom{n}{k}^2 = n\sum_{k=1}^n \binom{n-1}{k-1}\binom{n}{n-k} = n\binom{2n-1}{n-1} = \frac{n}{2}\binom{2n}{n} \sim \frac{1}{2}\sqrt{\frac{n}{\pi}}\cdot 4^n.$$

5.5. 1) Да. Справедливость неравенств следует из того, что $\binom{n}{k}a^k \leqslant \leqslant \binom{n}{k}b_k \leqslant \binom{n}{k}c^k$.

2) Нет. Контрпримером может служить последовательность $\{b_k\}$ такая, что $b_k = 2\cdot 3^{-k}$ при k четном, $b_k = 3^{-k}$ при k нечетном. Полагая $a = 1/3$ и $c = 2/3$, имеем $0 < a^k \leqslant b_k < c^k < 1$. Однако в силу задачи 1.22, 1) получаем

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}b_k = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}\left(\frac{1}{3}\right)^k + \sum_{s}\binom{n}{2s}\left(\frac{1}{3}\right)^{2s} =$$

$$= \left(1-\frac{1}{3}\right)^n + \frac{1}{2}\left(\left(1+\frac{1}{3}\right)^n + \left(1-\frac{1}{3}\right)^n\right) > (1-a)^n.$$

5.6. 1) Имеем $Da = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(a_i-\overline{a}) \geqslant \dfrac{1}{n}\sum\limits_{a_i\,:\,|a_i-\overline{a}|\geqslant t}(a_i-\overline{a})^2 \geqslant \delta_t t^2$. Отсюда $\delta_t \leqslant Da/t^2$.

2) Рассмотрим множество $A = \{a_0, a_1, \ldots, a_{2^n-1}\}$, в котором a_ν — число единиц в двоичном векторе $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$, имеющем номер ν. Заметим, что $\overline{a} = 2^{-n}\sum\limits_{0\leqslant\nu<2^n} a_\nu = 2^{-n}\sum\limits_{0\leqslant k<2} k\binom{n}{k} = \dfrac{n}{2}$. Заметим, далее, что число, стоящее в левой части доказываемого неравенства, равно числу тех a_ν, для которых $|a_\nu - \overline{a}| \geqslant t\sqrt{n}$. В силу задачи 1) это число не превосходит $Da/(t\sqrt{n})^2$. Но

$$2^n Da = \sum_{0\leqslant\nu<2^n}(a_\nu-\overline{a})^2 = \sum_{0\leqslant\nu<2^n}(a_\nu^2-\overline{a}^2) = -2^n\overline{a}^2 + \sum_{0\leqslant k\leqslant n}k^2\binom{n}{k} =$$

$$= -2^n\left(\frac{n}{2}\right)^2 + (n^2+n)2^{n-2} = n2^{n-2}.$$

Таким образом, $2^n Da/(t\sqrt{n})^2 = 2^{n-2}/t^2$.

3) Оценка снизу. Положим $t = \ln n$. С учетом задачи 2) имеем

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2}\binom{n}{k} > \sum_{k\,:\,|k-n/2|<t\sqrt{n}}k^{-2}\binom{n}{k} \geqslant \frac{1}{(n/2+t\sqrt{n})^2}\sum_{|k-n/2|<t\sqrt{n}}\binom{n}{k} \geqslant$$

$$\geqslant \frac{4}{(n-4t\sqrt{n})^2}\left(2^n - \frac{2^n}{t^2}\right) \sim \frac{2^{n+2}}{n^2}.$$

Оценка сверху. Заметим сначала, что $\binom{n}{k} < \left(\dfrac{en}{k}\right)^n$ в силу задачи 5.2, 1) и $\binom{n}{k-1}\Big/\binom{n}{k} = \dfrac{k}{n-k+1} < \dfrac{1}{3}$ при $k \leqslant \dfrac{n}{4}$. Поэтому

$$\sum_{k=1}^{n}k^{-2}\binom{n}{k} \leqslant \sum_{k\leqslant n/4}\binom{n}{k} + \frac{16}{n^2}\sum_{k\,:\,|k-n/2|>t\sqrt{n}}\binom{n}{k} +$$

$$+\left(\frac{n}{2}-t\sqrt{n}\right)^{-2}\sum_{k\,:\,|k-n/2|\leqslant t\sqrt{n}}\binom{n}{k} \leqslant (4e)^{n/4}\sum_{i=0}^{\infty}3^{-i} + \frac{16n^{-2}\cdot 2^n}{t^2} +$$

$$+\frac{4}{n^2}\left(1+(tn^{-1/2})\right)\cdot 2^n \lesssim n^{-2}\cdot 2^{n+2}.$$

5.7. 1) Используя формулу (2), имеем

$$\binom{n}{k} = \frac{\sqrt{n}\, n^n (1 + O(1/n))}{\sqrt{2\pi k(n-k)}\, k^k (n-k)^{n-k}}.$$

Положим $x = n/2 - k$; тогда полученное выражение можно переписать в виде

$$\binom{n}{k} = \frac{\left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) \cdot 2^{n+1}}{\sqrt{2\pi n \left(1 - \frac{2x}{n}\right)\left(1 + \frac{2x}{n}\right)} \left(1 - \frac{2x}{n}\right)^{n/2-x} \left(1 + \frac{2x}{n}\right)^{n/2+x}}.$$

Имеем, далее,

$$\ln\left[\left(1 - \frac{2x}{n}\right)^{n/2-x} \left(1 + \frac{2x}{n}\right)^{n/2+x}\right] = \left(\frac{n}{2} - x\right) \ln\left(1 - \frac{2x}{n}\right) +$$

$$+ \left(\frac{n}{2} + x\right) \ln\left(1 + \frac{2x}{n}\right) = \left(\frac{n}{2} - x\right)\left(-\frac{2x}{n} - \frac{1}{2}\left(\frac{2x}{n}\right)^2 - \dots\right) +$$

$$+ \left(\frac{n}{2} + x\right)\left(\frac{2x}{n} - \frac{1}{2}\left(\frac{2x}{n}\right)^2 + \dots\right) = \frac{2x^2}{n} + \frac{16x^4}{3n^2} + O\left(\frac{x^5}{n^4}\right).$$

Отсюда $\binom{n}{k} \sim \frac{2^{n+1}}{\sqrt{2\pi n}} \exp\left\{-\frac{(2k-n)^2}{n}\right\}$.

4) Положим $x_1 = x + 2\sqrt{\ln n}$, $k(x) = \frac{na + x\sqrt{na}}{a+1}$. Тогда

$$\sum_{\nu \geqslant k(x)} \binom{n}{\nu} a_\nu = \sum_{k(x) \leqslant \nu \leqslant k(x_1)} \binom{n}{\nu} a^\nu + \sum_{\nu > k(x_1)} \binom{n}{\nu} a^\nu.$$

Но $\sum\limits_{\nu > k(x_1)} \binom{n}{\nu} a^\nu \leqslant n \binom{n}{\nu_0} a^{\nu_0}$, где $\nu_0 =]k(x_1)[$. В силу задачи 2) получаем отсюда, что

$$\sum_{\nu > k(x_1)} \binom{n}{\nu} a^\nu \leqslant n(2\pi na)^{-1/2}(1+a)^{n+1} \exp\left\{-\frac{x_1^2}{2}\right\} =$$

$$= n^{1/2}(2\pi)^{-1/2}(1+a)^{n+1} \exp\left\{-\frac{x^2}{2} - x\sqrt{\ln n} - 2\ln n\right\} \leqslant$$

$$\leqslant n^{-3/2}(2\pi)^{-1/2}(1+a)^{n+1} e^{-x^2/2} - x\sqrt{\ln x}. \quad (*)$$

С другой стороны, из задачи 3) следует, что

$$\sum_{k(x) \leqslant \nu \leqslant k(x_1)} \binom{n}{\nu} a^\nu \sim \frac{(a+1)^n}{\sqrt{2\pi}} \left(\frac{e^{-x^2/2}}{x} - \frac{e^{-x_1^2/2}}{x_1}\right). \quad (**)$$

Из $(*)$ и $(**)$ вытекает искомая оценка.

5.8. 1) Используя неравенство (2) и вытекающее из него неравенство $n! > \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n}$, получаем

$$\binom{n}{\lambda n} < \frac{\sqrt{2\pi n}\, n^n \exp\left(-n + \frac{1}{12n}\right)}{2\pi n \sqrt{\lambda\mu}\, (\lambda n)^{\lambda n} (\mu n)^{\mu n} \exp\{-\lambda n - \mu n\}} = \frac{e^{1/(12n)}}{\sqrt{2\pi n \lambda\mu}\, \lambda^{\lambda n} \mu^{\mu n}} \sim G(n, \lambda).$$

С другой стороны,

$$\binom{n}{\lambda n} > \frac{\sqrt{2\pi n}\, n^n \exp\{-n\}}{2\pi n \sqrt{\lambda\mu}\, (\lambda n)^{\lambda n} (\mu n)^{\mu n} \exp\left\{-\lambda n - \mu n + \frac{1}{12\mu n} + \frac{1}{12\lambda n}\right\}} =$$

$$= \frac{\exp\{-(1/(12n))(1/\lambda + 1/\mu)\}}{\sqrt{2\pi n\lambda\mu}\, \lambda^{\lambda n} \mu^{\mu n}} \sim G(n, \lambda).$$

2) Нижняя оценка вытекает из решения задачи 1). Для получения верхней оценки, воспользовавшись неравенствами (2), имеем

$$\binom{n}{\lambda n} < G(n, \lambda) \exp\left\{\frac{1}{12n} - \frac{1}{12\lambda n} - \frac{1}{12\mu n} + \frac{1}{360(\lambda n)^3} + \frac{1}{360(\mu n)^3}\right\}.$$

Без ограничения общности можно считать, что $\lambda \geqslant \mu$. Тогда $\frac{1}{12n} < \frac{1}{12\lambda n}$, а $\frac{1}{360(\lambda n)^3} + \frac{1}{360(\mu n)^3} - \frac{1}{12\mu n} \leqslant \frac{1}{180\mu^3 n^3} - \frac{1}{12\mu n} < 0$. Следовательно, $\binom{n}{k} < G(n, \lambda)$.

3) Используя нижнюю оценку из задачи 2), получаем $\binom{n}{k} > G(n, \lambda) \times$ $\times \exp\left\{-\frac{1}{12n\lambda\mu}\right\}$. Но $\exp\{-(12n\lambda\mu)^{-1}\} \geqslant \exp\{-(3n)^{-1}\} \geqslant \exp\left\{-\frac{1}{9}\right\} >$ $> \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ при $n \geqslant 3$, $\exp\left\{-\frac{1}{9}\right\} > \frac{\sqrt{\pi}}{2}$. При $n = 2$ и $\lambda n = \mu n = 1$ выполняется равенство.

4) Верхняя оценка

$$\sum_{k=\lambda n}^{n} \binom{n}{k} < \binom{n}{\lambda n} \sum_{i=1}^{\infty} \left(\frac{1-\lambda}{\lambda}\right)^i = \frac{1}{2\lambda - 1} \binom{n}{\lambda n}.$$

5) Неравенство легко проверяется в случаях, когда

а) $\lambda = \frac{1}{2}$ $\left(\text{поскольку } \sum_{k \geqslant n/2} \binom{n}{k} < 2^n = \left(\frac{1}{2}\right)^{-n/2} \left(\frac{1}{2}\right)^{-n/2}\right)$;

б) $\lambda n = n - 1$ $\left(\text{левая часть есть } n + 1, \text{ а правая равна } \left(\frac{n}{n-1}\right)^{n-1} n\right)$;

в) $3 \leqslant n \leqslant 5$, $n/2 < \lambda n < n - 1$ (непосредственно). Пусть теперь $n \geqslant 5$ и $n/2 < \lambda n \leqslant n - 2$. Из задач 4) и 1) следует, что

$$\sum_{k \geqslant \lambda n} \binom{n}{k} \leqslant \lambda(2\lambda - 1)^{-1} \binom{n}{\lambda n} \leqslant \lambda^{1/2}(2\lambda - 1)^{-1}(2\pi n(1-\lambda))^{-1/2} \lambda^{-\lambda n} \mu^{-\mu n}.$$

Положим $f(\lambda) = \lambda^{1/2}(2\lambda - 1)^{-1}(2\pi n(1-\lambda))^{-1/2}$. Требуется показать, что $f(\lambda) < 1$ при $\lambda \in [1/2 + \varepsilon, (n-2)/n]$, где $\varepsilon = 1/n$ при четных n и $1/(2n)$ при нечетных n. Дифференцируя по λ, замечаем, что функция $f(\lambda)$ выпукла вниз на исследуемом сегменте. Поэтому максимальные значения следует искать на концах сегмента. Имеем

$$f\left(\frac{1}{2} + \varepsilon\right) = \sqrt{\frac{1}{2} + \varepsilon}\, (1 + 2\varepsilon)^{-1} \left(2\pi n \left(\frac{1}{2} - \varepsilon\right)\right)^{-1/2} =$$

$$= ((1 - 4\varepsilon^2) \cdot 2\pi n)^{-1/2} \leqslant \left(\left(1 - \frac{16}{n^2}\right) \cdot 2\pi n\right)^{-1/2} < 1$$

при всех $n \geqslant 5$.

Рассмотрим правый конец интервала:

$$f\left(\frac{n-2}{n}\right)=\sqrt{1-\frac{2}{n}}\left(1-\frac{4}{n}\right)^{-1}(4\pi)^{-1/2}\leqslant\left(1-\frac{4}{n}\right)^{-1}(4\pi)^{-1/2}<1$$

при $n\geqslant 6$. Если $\lambda<1/2$, то $\mu=1-\lambda>1/2$.

6) Поскольку $\binom{n}{k}=\binom{n}{n-k}$, то с использованием задачи 5) получаем, что $\sum\limits_{0\leqslant k\leqslant\lambda n}\binom{n}{k}=\sum\limits_{k=\mu n}^{n}\binom{n}{k}<\mu^{-\mu n}\lambda^{-\lambda n}$.

5.9. 1) $(n)_k=n^k\prod\limits_{i=0}^{k-1}\left(1-\frac{i}{n}\right)=n^k\exp\left\{\sum\limits_{i=1}^{k-1}\ln\left(1-\frac{i}{n}\right)\right\}$, но

$$\sum_{i=1}^{k-1}\ln\left(1-\frac{i}{n}\right)=-\sum_{i=1}^{k-1}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu}\left(\frac{i}{n}\right)^{\nu}=-\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu n^{\nu}}\sum_{i=1}^{k-1}i^{\nu}.$$

2) Очевидно, что $(n)_k\leqslant n^k$. С другой стороны, $(n)_k=\prod\limits_{i=0}^{k-1}(n-i)>$ $>(n-k)^k=n^k\left(1-\left(\frac{k}{n}\right)\right)^k\geqslant n^k\left(1-\frac{k^2}{n}\right)\sim$ (так как $k=o(\sqrt{n})$) $\sim n^k(1-$ $-o(1))$.

3) Воспользуемся тем (см. задачу 5.13, 2)), что $\sum\limits_{i=1}^{k-1}i^{\nu}=(\nu+1)^{-1}k^{\nu+1}+$ $+O(k^{\nu})$. Отсюда в силу задачи 1) имеем при $k\to\infty$ и $k=o(n)$

$$(n)_k=n^k\exp\left\{-\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\nu n^{\nu}\right)^{-1}\left((\nu+1)^{-1}k^{\nu+1}+O(k^{\nu})\right)\right\}=$$

$$=n^k\exp\left\{-\sum_{\nu=1}^{\infty}\left(\frac{k^{\nu+1}}{\nu(\nu+1)n^n}+O\left(\frac{1}{\nu}\left(\frac{k}{n}\right)^{\nu}\right)\right)\right\}.$$

Но

$$\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{k^{\nu+1}}{\nu(\nu+1)n^{\nu}}=\sum_{\nu=1}^{m-1}\frac{k^{\nu+1}}{\nu(\nu+1)n^{\nu}}+\sum_{\nu\geqslant m}\frac{k^{\nu+1}}{\nu(\nu+1)n^{\nu}},$$

$$\sum_{\nu\geqslant m}\frac{k^{\nu+1}}{n^{\nu}}=k\sum_{\nu\geqslant m}\left(\frac{k}{n}\right)^{\nu}=k\left(\frac{k}{n}\right)^{m}\frac{1}{1-k/n}=O\left(\frac{k^{m+1}}{n^m}\right).$$

Отсюда и следует искомое равенство.

4) Следует воспользоваться задачей 3) при $m=3$.

5.10. 1) В силу задач 1.13, 6) и 5.9, 1) имеем

$$\binom{n-s}{k-s}\Big/\binom{n}{k}=\frac{(k)_s}{(n)_s}\sim\left(\frac{k}{n}\right)^s.$$

2) Использовать задачу 5.9, 3).

5.11. 1) Имеем

$$\binom{n-s}{k}\Big/\binom{n}{k} = \frac{(n-s)_k}{(n)_k} = \prod_{i=0}^{k-1}\left(1-\frac{s}{n-i}\right) =$$

$$= \exp\left\{\sum_{i=0}^{k-1}\ln\left(1-\frac{s}{n-i}\right)\right\} = \exp\left\{-\sum_{i=0}^{k-1}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{1}{\nu}\left(\frac{s}{n-i}\right)^{\nu}\right\} =$$

$$= \exp\left\{-s\sum_{i=0}^{k-1}\frac{1}{n-i} - \frac{s^2}{2}\sum_{i=0}^{k-1}\frac{1}{(n-i)^2} - \sum_{i=0}^{k-1}\sum_{\nu\geqslant 3}\frac{1}{\nu}\left(\frac{s}{n-i}\right)^{\nu}\right\}.$$

С использованием задачи 5.12 имеем

$$\sum_{i=0}^{k-1}\frac{1}{n-i} = \ln\frac{n}{n-k+1} + O\left(\frac{1}{n}\right), \quad \sum_{i=0}^{k-1}\frac{1}{(n-i)^2} = \frac{k}{n(n-k)}\left(1+O\left(\frac{1}{k}\right)\right),$$

$$\ln\frac{n}{n-k+1} = \sum_{\sigma=1}^{\infty}\frac{1}{\sigma}\left(\frac{k-1}{n}\right)^{\sigma},$$

$$\sum_{i=0}^{k-1}(n-i)^{-\nu} = \frac{1}{\nu-1}((n-k+1)^{-\nu+1} - n^{-\nu+1}) + O((n-k)^{-\nu})$$

при $\nu > 2$. Отсюда вытекает требуемая оценка.

2) Вытекает из задачи 1).

3) Указание. Использовать решение задачи 1) с учетом неравенств

$$-\sum_{i=0}^{k-1}\sum_{\nu=2}^{\infty}\frac{1}{\nu}\left(\frac{s}{n-i}\right) \leqslant -\frac{s^2}{(n-k+1)^2} \quad \text{при} \quad 2s+k\leqslant n,$$

$$-\sum_{i=0}^{k-1}\frac{1}{n-i} \leqslant \ln\frac{n}{n-k+1} + \frac{1}{n-k+1},$$

$$-\ln(1-\alpha) \leqslant \alpha+\alpha^2 \quad \text{при} \quad 0\leqslant\alpha\leqslant 1/2,$$

$$\ln\left(1-\frac{s}{n-i}\right) < -\frac{s}{n}.$$

5.12. Указание. Сумма $\sum_{k=n+1}^{m} f(k)$ является верхней, а $\sum_{k=n}^{m-1} f(k)$ — нижней интегральной суммой для $\int_n^m f(x)\,dx$.

5.13. 1) Имеем (см. задачу 5.12)

$$\sum_{k=1}^{m}\ln k \leqslant \int_1^m \ln x\,dx + \ln m, \quad \int_1^x \ln x\,dx = x\ln x - \int_1^x dx = x\ln x - x + 1.$$

Отсюда

$$\sum_{k=1}^{n}\ln k \leqslant m\ln m - m + 1 + \ln m.$$

С другой стороны (см. задачу 5.12),

$$\sum_{k=1}^{m} \ln k \geqslant \int_{1}^{m} \ln x\, dx = m \ln m - m + 1.$$

2)–7) Аналогично задаче 1).

5.14. 1) Индукция по n. При $n = 1$ имеем $p_1 = p_0 - \alpha p_0^{\beta} = 1 - \alpha$. Отсюда $0 < p_1 < 1$. Пусть $0 < p_n < 1$ для некоторого $n \geqslant 1$. Тогда $p_{n+1} = p_n - \alpha p_n^{\beta} = p_n(1 - \alpha p_n^{p-1})$. Поскольку $0 < \alpha < 1$, $\beta > 1$, $0 < p_n < 1$, то и $0 < p_{n+1} < 1$.

2) Следует из того, что $p_{n+1} - p_n = -\alpha p_n^{\beta} < 0$.

3) Оценка сверху. Имеем $\dfrac{p_{k-1} - p_k}{\alpha p_{k-1}^{\beta}} = 1$. Отсюда

$$n = \sum_{k=1}^{n} \frac{p_{k-1} - p_k}{\alpha p_{k-1}^{\beta}} \leqslant \int_{p_n}^{1} \frac{dx}{\alpha x^{\beta}} = \frac{1}{\alpha(\beta - 1)} p_n^{1-\beta} - 1.$$

Отсюда $p_n^{1-\beta} \geqslant 1 + \alpha(\beta - 1)n$, или, что то же самое,

$$p_n \leqslant (1 + \alpha(\beta - 1)n)^{1/(1-\beta)}. \qquad (*)$$

Оценка снизу. Из $(*)$ и из рекуррентного соотношения $p_n = p_{n-1}(1 - \alpha p_{n-1}^{\beta-1})$ следует, что

$$p_n / p_{n-1} \leqslant 1 - \alpha/(1 + \alpha(\beta - 1)(n - 1)). \qquad (**)$$

Далее,

$$\frac{1}{\alpha(\beta - 1)} (p_n^{1-\beta} - 1) = \int_{p_n}^{1} \frac{dx}{\alpha x^{\beta}} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{p_{k-1} - p_k}{\alpha p_k^{\beta}}. \qquad (***)$$

Заметим, что из $(**)$ следует, что $p_k \geqslant p_{k-1}(1 - \alpha)$ при $1 \leqslant k \leqslant]\sqrt{n}[$ и $p_k \geqslant p_{k-1}(1 - (c/\sqrt{n}))$ при $k >]\sqrt{n}[$, где c — константа. Отсюда с учетом того, что

$$(p_{k-1} - p_k)/(\alpha p_{k-1}^{\beta}) = 1,$$

получаем

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{p_{k-1} - p_k}{\alpha p_k^{\beta}} \leqslant \sum_{k \leqslant]\sqrt{n}[} \frac{p_{k-1} - p_k}{\alpha p_{k-1}^{\beta}(1 - \alpha)} + \sum_{]n[< k \leqslant n} \frac{p_{k-1} - p_k}{\alpha p_{k-1}^{\beta}(1 - (c/\sqrt{n}))} \leqslant$$

$$\leqslant (\alpha(1 - \alpha))^{-1}]\sqrt{n}[+ \frac{n}{1 - c/\sqrt{n}} = n + O(\sqrt{n}).$$

С учетом $(***)$ получаем, что при $\beta > 1$

$$\frac{1}{\alpha(\beta - 1)} (p_n^{1-\beta} - 1) \leqslant n + O(\sqrt{n}).$$

Отсюда $p_n \geqslant (\alpha(\beta - 1)(n + O(\sqrt{n})))^{1/(1-\beta)}$. Таким образом, при $n \to \infty$

$$p_n \sim (\alpha(\beta - 1)n)^{1/(1-\beta)}.$$

5.15. 1) Перепишем уравнение в виде $x = \ln t - \ln(x)$ $(*)$. Поскольку $t \to \infty$, то можно считать, что $t > e$, и, следовательно, $x > 1$. Тогда из $(*)$ вытекает, что $x < \ln t$, т. е. $1 < x < \ln t$. Отсюда $\ln x = O(\ln \ln t)$. Таким образом, $x = \ln t + O(\ln \ln t)$ при $t \to \infty$. Логарифмируя, находим, что $\ln x = \ln \ln t + \ln\left(1 + O\left(\frac{\ln \ln t}{\ln t}\right)\right) = \ln \ln t + O\left(\frac{\ln \ln t}{\ln t}\right)$. Подставляя в $(*)$, получаем новое приближение $x = \ln t - \ln \ln t + O\left(\frac{\ln \ln t}{\ln t}\right)$. Вновь логарифмируя и подставляя результат в правую часть $(*)$, получим еще одно приближение, дающее требуемую точность (см.: *Де Брейн Н.Г.* Асимптотические методы в анализе. — М.: ИЛ, 1961).

2) Поскольку $t \to \infty$, то и $x \to \infty$. Поэтому $e^x < t$, или, что то же самое, $x < \ln t$. Отсюда $e^x = t - \ln x > t - \ln \ln t$ и

$$x > \ln t + \ln\left(1 - \frac{\ln \ln t}{t}\right) = \ln t - \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{1}{\nu}\left(\frac{\ln \ln t}{t}\right)^{\nu} =$$

$$= \ln t - \frac{\ln \ln t}{t} + O\left(\left(\frac{\ln \ln t}{t}\right)^2\right).$$

С использованием этого неравенства получаем

$$e^x = t - \ln x < t - \ln\left(\ln t - \frac{\ln \ln t}{t} + O\left(\left(\frac{\ln \ln t}{t}\right)^2\right)\right) =$$

$$= t - \ln \ln t - \ln\left(1 - \frac{\ln \ln t}{t \ln t} + O\left(\frac{1}{\ln t}\left(\frac{\ln \ln t}{t}\right)^2\right)\right) = t - \ln \ln t + O\left(\frac{\ln \ln t}{t \ln t}\right).$$

Прологарифмировав, получаем

$$x < \ln\left(t - \ln \ln t + O\left(\frac{\ln \ln t}{t \ln t}\right)\right) = \ln t + \ln\left(1 - \frac{\ln \ln t}{t} + O\left(\frac{\ln \ln t}{t^2 \ln t}\right)\right) =$$

$$= \ln t - \frac{\ln \ln t}{t} + O\left(\left(\frac{\ln \ln t}{t}\right)^2\right).$$

Верхняя и нижняя оценки совпадают с требуемой точностью.

5.16. Указание. Показать сначала, что $f(t) = O(t)$ при $t \to \infty$. Тогда исходное равенство можно будет записать в виде $e^{tf(t)} = t + o(t)$. Пользуясь этим неравенством, показать, что $f(t) = O(1)$, и преобразовать исходное равенство в $e^{tf(t)} = t + O(1)$. Наконец, доказать, что $f(t) = \frac{\ln t}{t} + O\left(\frac{1}{t^2}\right)$.

5.17. 1) Разложим $A(t)$ на простые дроби: $A(t) = \frac{c_1}{\lambda_1 - t} + \frac{c_2}{\lambda_2 - t} + \ldots + \frac{c_m}{\lambda_m - t} + B(t)$, где $B(t)$ — многочлен. Для нахождения коэффициента c_1 умножим $A(i)$ на $\lambda_1 - t$. Тогда $(\lambda_1 - t)\,A(t) = \frac{-Q(t)}{(t - \lambda_2)\ldots(t - \lambda_m)}$. При $t = \lambda_1$ левая часть равна c_1, а правая $\frac{-Q(\lambda_1)}{P'(\lambda_1)}$. Таким образом, $c_1 = \frac{-Q(\lambda_1)}{P'(\lambda_1)}$. Аналогично можно вычислить и коэффициенты c_i $(i = 2, \ldots, m)$. Дробь $\frac{1}{1 - t/\lambda_k}$ можно разложить в геометрическую прогрес-

сию $\left(1-\dfrac{t}{\lambda_k}\right)^{-1}=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{t}{\lambda_k}\right)^n$. Получаем $A(t)=\sum\limits_{i=1}^{m}\dfrac{c_i}{\lambda_i}\sum\limits_{n=0}^{\infty}\left(\dfrac{i}{\lambda_i}\right)^n+B(t)$. Отсюда для больших n имеем $a_n\sim\dfrac{c_1}{\lambda_1^{n+1}}+\dfrac{c_2}{\lambda_2^{n+1}}+\ldots+\dfrac{c_m}{\lambda_m^{n+1}}\sim c_1\lambda_1^{-n-1}$.

2) Рассмотрим сначала случай, когда $P(t)$ не имеет корней, кроме λ_1, а $Q(t)$ имеет степень меньшую, чем степень $P(t)$, и λ_1 не является корнем $Q(t)$. Тогда $P(t)=(t-\lambda_1)^r$, $Q(t)=\sum\limits_{i=0}^{r-1}q_it^i$. Разложение $P^{-1}(t)$ по степеням имеет вид

$$P^{-1}(t)=(-1)^r\lambda_1^{-r}\left(1-\frac{t}{\lambda_1}\right)^r=\left(-\frac{1}{\lambda_1}\right)^r\sum_{n=0}^{\infty}\binom{-r}{n}\frac{t^n}{\lambda_1^n}.$$

Тогда

$$A(t)=\frac{Q(t)}{P(t)}=\left(-\frac{1}{\lambda_1}\right)^r\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{t}{\lambda_1}\right)^n\sum_{i=0}^{r-1}q_i\binom{-r}{n-i}\lambda_1^i.$$

Отсюда $a_n=(-1)^r\lambda_1^{-(r+n)}\sum\limits_{i=0}^{r-1}q_i\binom{-r}{n-i}\lambda_1^i$. В общем случае $A(t)=A_1(t)+$ $+\sum\limits_{s=1}^{k}\dfrac{Q_s(t)}{(t-\lambda_s)^{r_s}}$, где $A_1(t)$ — многочлен, $Q_s(t)$ — многочлен степени меньше r_s. В этом случае асимптотическое значение для a_n определяется коэффициентом при t^n в разложении дроби $Q_1(t)/(t-\lambda_1)^{r_1}$. Задача сводится к уже рассмотренной.

5.18. 1) $2\cdot3^n$. Воспользуемся результатами задачи 5.17, 1). Многочлен $P_1(t)=3t^2-4t+1$ имеет корни $\lambda_1=\dfrac{1}{3}$ и $\lambda_2=1$. Положим $Q(t)=\dfrac{1}{3}(1+t)$, $P(t)=t^2-\dfrac{4}{3}t+\dfrac{1}{3}$. Тогда

$$a_n\sim-\frac{Q(1/3)}{P'(1/3)}\left(\frac{1}{3}\right)^{-n-1}=-\frac{4/9}{2/3-4/3}\cdot3^{n+1}=2\cdot3^n.$$

2) $a_n\sim\left(-\dfrac{1}{13}\left(\dfrac{3}{2}\right)^{n+1}\right)$. Наименьший по модулю корень многочлена $6t^2+5t-6$ равен $2/3$. Используя задачу 5.17, 1), получаем результат.

3) $a_n\sim\left(-\dfrac{8}{13}\left(\dfrac{3}{2}\right)^{n+1}\right)$. 4) $a_{2n}=0$, $a_{2n+1}\sim(-1)^n2^{n+3}$.

5) Указание. $6t^4-17t^3+35t^2-22t+4=6\left(t-\dfrac{1}{2}\right)\left(t-\dfrac{1}{3}\right)(t-1+$ $+i\sqrt{3})(t-1-i\sqrt{3})$, $a_n\sim\dfrac{2}{31}\cdot3^n$.

6) $\dfrac{1}{15}2^{n+1}$.

7) $\binom{-2}{n}(\sqrt{3}-1)^{-n-2}$. Корни уравнения t^2+2t-2 есть $\lambda_1=\sqrt{3}-1$, $\lambda_2=-\sqrt{3}-1$. Представив $A(t)$ в виде

$$A(t)=\frac{at+b}{(t-\lambda_1)^2}+\frac{ct+d}{(t-\lambda_2)^2},$$

найдем методом неопределенных коэффициентов, что $a = 0$, $b = 1$. С использованием задачи 5.17, 2) получим, что

$$a_n = (-1)^2\lambda_1^{-n-2}\left(b\binom{-2}{n} + \lambda_1 a\binom{-2}{n-1}\right) = (\sqrt{3}-1)^2\binom{-2}{n}.$$

8) $a_n \sim \left(\frac{10}{7}\right)^{n+2}\binom{-2}{n}$. Наименьший по модулю корень знаменателя равен 0,7 и имеет кратность 2. Заметим, что

$$A(t) = \frac{t+1}{(t-0{,}7)^2} - \frac{2}{2t^2+1}.$$

С использованием задачи 5.17, 2) получаем $a_n \sim \left(\frac{10}{7}\right)^{n+2}\binom{-2}{n}$.

5.19. 1) $a_n \sim (-3(-2)^n)$. Пусть $A(t) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n t^n$. Умножая обе части соотношения на t^{n+2} и складывая, получаем, что $A(t) - a_1 t - a_0 + 3t(A(t) - a_0) + 2t^2 A(t) = 0$. Отсюда с учетом того, что $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, имеем $A(t) = (1-t)/(2t^2+3t+1)$. Корни знаменателя есть $\lambda_1 = -1/2$, $\lambda_2 = -1$. Используя задачу 5.17, 1), получаем, что $a_n \sim (-3(-2)^n)$.

2) 1/2. Так же, как и в задаче 1), находим, что $A(t) = (2(1-t))^{-1} + (2(1-(q-p)t))^{-1}$. Поскольку $q+p=1$, p, $q>0$, то $|q-p|<1$. Корнями знаменателя являются $\lambda_1 = 1$ и $\lambda_2 = q-p$, $|\lambda_1| < |\lambda_2|$. Теперь с использованием задачи 5.17, 1) или непосредственно получаем, что $a_n \sim 1/2$.

3) $a_n = \frac{2^{n+1}}{\sqrt{3}}\left(\sin\frac{2\pi n}{3} - \sin\frac{4\pi n}{3}\right)$. 4) $a_n \sim 3^n$. 5) $a_n \sim n^2 \cdot 2^{n-5}$.

5.20. 1) Наводящее соображение: если предел a_n существует и равен a, то из рекуррентного соотношения получаем, что $a = (a + b/a)/2$, или $a = \sqrt{b}$, так как $a > 0$. Если $a_0 = \sqrt{b}$, то $a_1 = (a_0 + b/a_0)/2 = (\sqrt{b} + \sqrt{b})/2 = \sqrt{b}$. По индукции легко получим, что $a_n = \sqrt{b}$. Рассмотрим случай, когда $a_0 > b$ (случай $a_0 < b$ аналогичен). Докажем, что в этом случае a_n убывает и $a_n > \sqrt{b}$ при всех $n \geqslant 0$. Если $a_n > \sqrt{b}$ при некотором $n \geqslant 0$, то

$$a_{n+1} - a_n = \left(\left(a_n + \frac{b}{a_n}\right)\Big/2\right) - a_n = \frac{b - a_n^2}{2a_n} < 0.$$

Таким образом, a_n убывает с ростом n,

$$a_{n+1} - \sqrt{b} = \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{b}{a_n}\right) - \sqrt{b} = \frac{(a_n - \sqrt{b})^2}{2a_n} > 0.$$

Следовательно, a_n убывает и ограничено снизу. Значит, существует предел $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Как мы убедились, этот предел равен $\sqrt{b}$.

2) Как и в задаче 1), если предел a_n существует, то он равен $\sqrt[3]{b}$. Рассмотрим случай $a_0 < \sqrt[3]{b}$. Так же, как и в задаче 1), доказывается, что a_n монотонно возрастает и $a_n < \sqrt[3]{b}$ при всех n. Отсюда следует существование предела a_n. Если $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$, то, переходя к пределу в рекуррентном соотношении, получаем, что $a = \sqrt[3]{b}$.

3) $\sqrt{1+b}-1$. Заметим, что $a_1 - a_0 = \dfrac{b-a_0^2}{2} - a_0 = \dfrac{-b-b^2}{2} < 0$ и $a_1 = \dfrac{b-b^2}{2} > 0$, т. е. $0 < a_1 < a_0$. Далее, $a_2 - a_1 = \dfrac{b-a_1^2}{2} + \dfrac{b+b^2}{2} = \dfrac{a_1^2-b^2}{2} > 0$, а $a_2 - a_0 = \dfrac{b-a_1^2}{2} - \dfrac{b}{2} = -\dfrac{a_1^2}{2} < 0$. Отсюда $a_1 < a_2 < a_0$. Вообще $a_{n+2} - a_n = \dfrac{a_n^2 - a_{n+1}^2}{2}$. Отсюда по индукции следует, что $\{a_{2n}\}$ возрастает и $a_{n2} < a_0$ при всех $n \geqslant 1$, $\{a_{2n+2}\}$ убывает и $a_{2n+1} > a_1$. Следовательно, существуют пределы $c = \lim\limits_{n\to\infty} a_{2n}$ и $d = \lim\limits_{n\to\infty} a_{2n+1}$. Переходя к пределу в рекуррентном соотношении, получаем $c = (b-d^2)$ и $d = (b-c^2)$. Отсюда $(c-d)(2-c-d) = 0$, а поскольку $c < b/2 < 1/2$ и $d < b/2 < 1/2$, то $2-c-d > 0$; следовательно, $c = d$. Отсюда $c = \sqrt{1+b}-1$.

5.21. 1) С помощью соотношений (3) и (4) получаем, что $a_3 = 9/128$, $a_4 \leqslant 11/128$. При $n \geqslant 3$ неравенство (4) можно переписать в виде

$$a_{n+2} \leqslant \frac{17}{1024} + a_n\left(\frac{323}{1024} + a_n\right).$$

Отсюда вытекает, что если $a_n \leqslant 1/8$, то и $a_{n+2} \leqslant 1/8$ при $n \geqslant 3$.

2) Пользуясь тем, что $a_n \leqslant 1/8$, выведем из (4) новое неравенство:

$$a_{n+2} \leqslant \frac{1}{2^{n+3}} + \frac{n+1}{4^{n+1}} + \frac{1}{8}\left(\left(\frac{3}{4}\right)^{n+2} + \frac{n+2}{2^{n+2}} + 4a_n\right) \leqslant \left(\frac{3}{4}\right)^{n+2} + \frac{1}{2}\,a_n.$$

Отсюда по индукции $a_n \leqslant 9\left(\dfrac{3}{4}\right)^n$.

3) Используя задачу 2), выводим из (4) $a_{n+2} \leqslant \dfrac{1}{2^{n+3}} + 66\,a_n\left(\dfrac{3}{4}\right)^{n+2}$. Пользуясь последним, получаем, что $a_n = 2^{-n-1}\left(1 + O\left(\left(\dfrac{3}{4}\right)^n\right)\right)$.

5.22. Индукция по n. При $n = 1$ имеем $a_1 = a_1 \cdot 1$. Если $a_n \leqslant a_1 \cdot n$, то $a_{n+1} \leqslant a_n + a_1 \leqslant a_1(n+1)$.

5.23. 1) Рассмотрим отношение $a_k = \dfrac{f(n,\,k+1)}{f(n,\,k)} = \dfrac{n-k}{k+1} \cdot 2^{-2^k}$. Если $k < [\log_2 \log_2 n]$, то $a_k > 1$, если же $k > [\log_2 \log_2 n]$, то $a_k < 1$. Следовательно, максимальное значение $f(n,\,k)$ достигается либо при $k = [\log_2 \log_2 n]$, либо при $k = [\log_2 \log_2 n] + 1$.

2) Тот же результат, что и в задаче 1).

5.24. Заметим, что $\lambda(n,\,r,\,k) = f(n,\,r+1,\,k)/f(n,\,r,\,k) = (k-r) \times 2^{2^r-1}/(r+1)$ и что $\lambda(n,\,r,\,k) > 1$ при $k \geqslant r > 0$. Следовательно, $f(n,\,r,\,k)$ возрастает по r. Отсюда

$$\max_r f(n,\,r,\,k) = f(n,\,k,\,k) = \binom{n}{k} 2^{-k+2^k}, \quad \min_r f(n,\,r,\,k) = 2\binom{n}{k}.$$

5.25. 1)

$$g(n) \sim \begin{cases} 2^{n+1}/n, & \text{если } [\log_2 n] > \log_2(n - \log_2 n), \\ (2^n/n)\left(1 + 2^{2^{[\log_2 n] - \log_2(n - \log_2 n)}}\right), & \\ \qquad \text{если } \log_2(n - \log_2 n) \leqslant [\log_2 n] \leqslant \log_2(n - \log_2 n - \log_2 \log_2 n), & \\ 2^{n-[\log_2 n]}, & \text{если } [\log_2 n] < \log_2(n - \log_2 n - \log_2 \log_2 n). \end{cases}$$

Функция $f(n,\,k)$ как функция действительного аргумента k выпукла вниз, причем минимум достигается при $k = k^* = \log_2\left(n - \log_2 n + O\left(\frac{\log_2 n}{n}\right)\right)$. Положим $k_0 = [\log_2 n]$. Очевидно, что либо $g(n) = f(n,\,k_0)$, либо $g(n) = f(n,\,k_0 - 1)$. Для нахождения $g(n)$ нужно выбрать минимум из $f(n,\,k_0)$ и $f(n,\,k_0 - 1)$.

Пусть а) $\log_2 n \geqslant k_0 > \log_2(n - \log_2 n)$. Тогда

$$f(n,\,k_0 - 1) = 2^{n-k_0+1} + 2^{2^{k_0-1}} \sim 2^{n+1}/n,$$

$$f(n,\,k_0) = 2^{n-k_0} + 2^{2^{k_0}} \gtrsim 2^{n-\log_2 n} + 2^{2^{\log_2(n-\log_2 n)}} \sim 2^{n+1}/n.$$

Пусть б) $\log_2(n - \log_2 n) \geqslant k_0 > \log_2(n - \log_2 n - \log_2\log_2 n)$. Тогда $f(n,\,k_0) \sim \frac{2^n}{n} + 2^{2^{k_0}} = \frac{2^n}{n}\left(1 + 2^{2^{k_0} - \log_2(n-\log_2 n)}\right)$, $f(n,\,k_0 - 1) \sim \frac{2^{n+1}}{n}$. Следовательно, $g(n) \sim f(n,\,k_0)$.

Пусть в) $k_0 \leqslant \log_2(n - \log_2 n - \log_2\log_2 n)$. Тогда

$$f(n,\,k_0) = 2^{n-k} + 2^{2^{k_0}} \sim 2^{n-k_0} \sim \frac{2^n}{n}\cdot 2^{\log_2 n - k_0},$$

$$f(n,\,k_0 - 1) \geqslant 2^{n-k_0+1} > f(n,\,k_0).$$

Отсюда $f(n,\,k_0) \sim g(n) = 2^{n-k_0}$.

2) $g(n) \sim 2^n\left(2^{\alpha(n)} + 2^{-\alpha(n)}\right)$, где $\alpha(n) = \log_2 n - [\log_2 n]$, если $\alpha(n) < 1/2$, $g(n) \sim 2^n(2^{1-\alpha(n)} + 2^{\alpha(n)-1})$, если $\alpha(n) > 1/2$.

§ 6

6.1. 1) Граф с n помеченными вершинами без петель и кратных ребер полностью определяется множеством ребер. Поэтому число таких графов равно числу подмножеств $\binom{n}{2}$ — элементного множества, т. е. равно $2^{\binom{n}{2}}$.

6.2. 1) $2^{\binom{n}{2}}$.

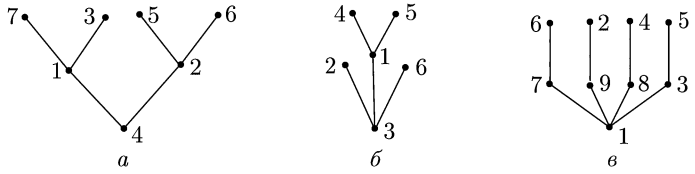
2) $\binom{n^2}{m}$. Число равно числу выборок из n^2 возможных дуг (включая петли) по m.

6.4. Если $\mu(G)$ — число различных помеченных графов из $\mathcal{G}_n$, изоморфных графу G, а $\mathcal{G}_n^*$ — множество всех неизоморфных n-вершинных графов, то $|\mathcal{G}_n| \leqslant n!\,|\mathcal{G}_n^*|$, поскольку $\mu(G) \leqslant n!$.

6.5. 1) Воспользоваться результатом задачи 6.1, 2) с учетом того, что число m ребер связного n-вершинного графа без кратных ребер и петель удовлетворяет неравенствам $n - 1 \leqslant m \leqslant \binom{n}{2}$.

2) Воспользоваться тем, что $\binom{\binom{n}{2}}{m} < \binom{\binom{n+1}{2}}{m}$, $\binom{\binom{m+1}{2}}{m} < e\left(\frac{l(m+1)}{2}\right)^m$.

6.8. 1) См. рис. О.8.1.



а *б* *в*

Рис. О.8.1

2) Алгоритм восстановления вектора $I = (i_1, i_2, \ldots, i_{n-2})$ таков: координата i_1 равна наименьшему числу из множества $N = \{1, 2, \ldots, n\}$, не входящему в набор $J = (j_1, j_2, \ldots, j_{n-2})$. Проведем ребро (i_1, j_1) и положим $N_1 = N \backslash \{i_1\}$, $J_1 = (j_2, \ldots, j_{n-2})$. Далее положим i_2 равным наименьшему числу из N_1, не входящему в J_1. Проводим ребро (i_2, j_2) и т. д. Последними соединяются ребром две вершины, оставшиеся в N_{n-2}.

3) Утверждение вытекает из того, что соответствие между векторами $J = (j_1, j_2, \ldots, j_{n-2})$ и нумерованными n-вершинными деревьями взаимно однозначно, а число векторов равно n^{n-2}.

6.9. Использовать задачи 6.4, 6.8 и формулу Стирлинга.

6.15. 1) Провести доказательство индукцией по числу вершин.

3) Вывести из рекуррентного соотношения для числа t дихотомических деревьев следующее соотношение для производящей функции $T(x)$: $T(x) - 1 = xT^2(x)$. Отсюда $T(x) = (2x)^{-1}(1 - \sqrt{1-4x})$. Разлагая $T(x)$ в ряд, получаем, что

$$t_m = 2(-4)^m \binom{1/2}{m} = \frac{1}{m+1}\binom{2m}{m}.$$

6.18. 1) Число графов G из $\mathscr{G}_n$ таких, что для фиксированной пары вершин $\{i, j\}$ в G отсутствуют цепи длины меньше 3, равно $3^{n-2} \times \times 2^{\binom{n}{2}-2(n-2)-1}$. Поэтому

$$\overline{p}(n) = 2^{-\binom{n}{2}} \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} 3^{n-2} \cdot 2^{\binom{n}{2}-2(n-2)-1} = \frac{1}{2}\binom{n}{2}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-2}.$$

2) Из того, что $\lim\limits_{n\to\infty} \overline{p}(n) = 0$, вытекает, что $p(G) = 0$ для почти всех графов. Отсюда следует, что диаметр почти всех графов меньше 3.

3) Пусть $p_1(G)$ — число вершин степени $n-1$ в графе G из $\mathscr{G}_n$, а $\overline{p}_1(n) = 2^{-\binom{n}{2}} \sum\limits_{G \in \mathscr{G}_n} p_1(G)$. Тогда $\overline{p}_1(n) = n \cdot 2^{-n+1}$. Отсюда следует, что $p_1(G) = 0$ для почти всех графов, а значит, радиус их не меньше 2. Теперь с учетом задачи 2) получаем утверждение.

6.19. Число гамильтоновых циклов в полном графе из $\mathscr{G}_n$ равно $\frac{1}{2}(n-1)!$. Доля графов, у которых присутствует заданный гамильтонов цикл, равна 2^{-n}.

6.20. 1) $\overline{p}(n) = \binom{n}{3} \cdot 2^3$.

2) $Dp(n) = \frac{7}{8}\binom{n}{3} \cdot 2^{-3} + \binom{n}{2}(n-2)(n-3) \cdot 2^{-6}$.

3) Вытекает из неравенства Чебышева с учетом того, что $Dp(n) \leqslant n^4 = o((\overline{p}(n))^2)$.

6.21. 1) $\overline{p}(n, m) = \binom{n}{3}(m)_3 \Big/ \left(\binom{n}{2}\right)_3$.

6.22. $\binom{n}{k} \cdot 2^{-\binom{n}{k}}$.

6.23. $n\binom{n-1}{k}\binom{\binom{n}{2}-n+1}{m-k}\binom{\binom{n}{2}}{m}^{-1}$.

Глава IX

§ 1

1.2. 1) Если множество $\{i_1, \ldots, i_k\}$ зафиксировано, то число граней $B^{n,i_1,\ldots,i_k}_{\sigma_1\ldots\sigma_k}$ равно числу двоичных наборов $(\sigma_1 \ldots \sigma_k)$, т. е. равно 2^k.

2) Если $\widetilde{\alpha} \in B^{n,i_1,\ldots,i_k}_{\sigma_1\ldots\sigma_k} \cap B^{n,i_1,\ldots,i_k}_{\tau_1\ldots\tau_k}$, то $\sigma_1 = \tau_1, \ldots, \sigma_k = \tau_k$, а следовательно, грани совпадают. Приходим к противоречию.

3) Вытекает из задач 1) и 2) с учетом того, что $\left|B^{n,i_1,\ldots,i_k}_{\sigma_1\ldots\sigma_k}\right| = 2^{n-k}$.

4) Число способов выбора направления $\{i_1, \ldots, i_k\}$ равно $\binom{n}{k}$. Теперь утверждение следует из задачи 1).

5) Следует из задачи 4).

6) Если $\widetilde{\alpha} \in B^{n,i_1,\ldots,i_k}_{\sigma_1\ldots\sigma_k}$, то вектор $(\sigma_1 \ldots \sigma_k)$ однозначно определяется вектором $\widetilde{\alpha}$ и множеством $\{i_1, \ldots, i_k\}$. Последнее можно выбрать $\binom{n}{k}$ способами.

7) Код грани G размерности k, содержащей заданную грань H размерности l, получается из кода грани H расстановкой $k-l$ прочерков среди $n-l$ координат, имеющих значение 0 или 1.

8) Для символов α и β из множества $\{0, 1, —\}$ введем операцию $\circ$, полагая: $\alpha \circ \beta = \alpha$, если $\alpha = \beta$; $\alpha \circ \beta = \alpha$ $(\alpha \circ \beta = \beta)$, если $\alpha \in \{0, 1\}$; $\beta = —$ (соответственно если $\beta \in \{0, 1\}$, $\alpha = —$), значение $\alpha \circ \beta$ неопределенно, если $\alpha \neq \beta$ и $\alpha, \beta \in \{0, 1\}$. Естественным образом операция $\circ$ распространяется на векторы из G^n. Нетрудно убедиться в том, что если $\widetilde{\alpha}$ и $\widetilde{\beta}$ — коды граней F и H, то вектор $\widetilde{\alpha} \circ \widetilde{\beta}$ определен тогда и только тогда, когда $F \cap H \neq \varnothing$. В последнем случае $\widetilde{\alpha} \circ \widetilde{\beta}$ является кодом грани, совпадающей с $F \cap H$.

9) Вытекает из задачи 7).

1.4. Положим $l_i = n - n_i$. Тогда числа l_i удовлетворяют неравенству Макмиллана $\sum\limits_{1 \leqslant i \leqslant s} 2^{-l_i} \leqslant 1$. Поэтому существует префиксный двоичный код с длинами кодовых слов $l_1, \ldots, l_s$. Дополним каждое кодовое слово w_i длины l_i прочерками в количестве $n - l_i$. Тогда каждое из так полученных слов w_i можно рассматривать как код грани размерности $n - l_i = n_i$. То, что грани попарно не пересекаются, следует из префиксности кода.

1.5. 1) Рассмотрим множество всех интервалов $I(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta})$ таких, что $\widetilde{\alpha} \in B^n_{[n/3]}$, $\widetilde{\beta} \in B^n_{n-[n/3]}$. Для каждой из $\binom{n}{[n/3]}$ вершин $\widetilde{\alpha} \in B^n_{[n/3]}$ существует $\binom{n-[n/3]}{[n/3]}$ вершин $\widetilde{\beta} \in B^n_{n-[n/3]}$ таких, что $\widetilde{\alpha} \leqslant \widetilde{\beta}$. Таким образом, число пар $(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta})$ указанного вида, а значит, и число интервалов $I(\widetilde{\alpha}, \widetilde{\beta})$ рав-

но $\binom{n}{[n/3]}\binom{n-[n/3]}{[n/3]}$. Нетрудно видеть, что все они попарно несравнимы.

2) Аналогично задаче 5.19.1 из гл. II.

1.6. 1) 2. 2) 3. 3) 2. 4) 3. 5) 2. 6) 3.

1.7. 1) 2. 2) 4. 3) 3. 4) 3. 5) 2. 6) 3.

1.8. 1) 2. 2) 1. 3) 1. 4) 2. 5) 5. 6) 4.

1.9. 1) 2. 2) 1. 3) 3. 4) 5. 5) 5. 6) 4.

1.10. 2) Рассмотреть матрицу вида $(P_{k-1}I_{n-k+1})$, где P_{k-1} — матрица размерности $(n-k+1)\times(k-1)$, состоящая сплошь из единиц, а I_{n-k+1} — единичная матрица размерности $(n-k+1)\times(n-k+1)$.

1.11. Пусть A — множество векторов (базисных) линейного (n, k)-кода. Тогда $|A|=k$ и A — покрытие. Последнее вытекает из следующих соображений. Пусть j-й столбец имеет единицу в i-й координате. Поскольку i-я строка является линейной комбинацией базисных строк, то существует базисный вектор, имеющий единицу в j-м разряде.

1.12*. 1) Пусть R_k — семейство всех k-элементных подмножеств строк матрицы M. Для $P\in R_k$ обозначим через $\nu(P)$ множество столбцов, не покрытых строками из P, и пусть $\overline{\nu}_k=\binom{m}{k}\sum\limits_{P\in R_k}\nu(P)$ — среднее число непокрытых вершин по подмножествам P из R_k. Пусть V — множество столбцов матрицы M, а $\rho(v)$ — число тех P из R_k, которые не покрывают столбец v, а $\sigma(v)$ — число строк, покрывающих столбец v. Тогда

$$\overline{\nu}_k=\binom{m}{k}^{-1}\sum_{v\in V}\rho(v)=\binom{m}{k}^{-1}\sum_{v\in V}\binom{m-\sigma(v)}{k}\leqslant$$

$$\leqslant n\binom{m-s}{k}\Big/\binom{m}{k}\leqslant n\left(1-\frac{s}{m}\right)^k\leqslant ne^{-sk/m}.$$

Для всякого натурального k имеем $\xi(M)\leqslant k+\overline{\nu}_k$. Поэтому, полагая $k=\left]\dfrac{m}{s}\ln\dfrac{sn}{m}\right[$, получаем $\xi(M)\leqslant 1+\dfrac{m}{s}\ln\dfrac{esn}{m}$.

2) Пусть δ_k — доля тех столбцов матрицы M, которые остались непокрытыми после k-го шага градиентной процедуры. Ясно, что $\delta_0=1$. Покажем, что $n(\delta_k-\delta_{k+1})\geqslant n\delta_k s/m$. Неравенство равносильно утверждению о том, что на $(k+1)$-м шаге можно выбрать строку, покрывающую не менее $sn\delta_k/m$ столбцов. В самом деле, в каждом из $n\delta_k$ непокрытых столбцов содержится не менее s единиц, а число строк не превышает m. Таким образом, $\delta_{k+1}\leqslant\delta_k(1-s/m)$. Отсюда по индукции следует, что $\delta_k\leqslant(1-s/m)^k\leqslant e^{-sk/m}$. Для всякого натурального k имеем $L_P(M)\leqslant k+n\delta_k\leqslant k+ne^{-sk/m}$. Полагая $k=\left]\dfrac{m}{s}\ln\left(\dfrac{ns}{m}\right)\right[$, получаем требуемое неравенство.

1.13*. Аналогично тому, как в задаче 1.12, 2) доказывается, что $\delta_k\leqslant\varepsilon+(1-\varepsilon)\left(1-\dfrac{s}{m}\right)^k\leqslant\varepsilon+e^{-sk/m}$. Далее, полагая $k=\left]\dfrac{m}{s}\ln\left(\dfrac{nse}{m}\right)\right[$ в неравенстве $L_\Gamma(M)\leqslant k+n\delta_k$, получаем требуемое утверждение.

1.14. На первом шаге градиентной процедуры в покрытие войдет строка, покрывающая не менее n/p столбцов, и не более $n(1-1/p)$ останутся непокрытыми. Если A_k — множество непокрытых после k-го шага столбцов и $|A_k|\leqslant n(1-1/p)^k$, то на $(k+1)$-м шаге по крайней мере одна из строк

покрывает не менее $|A_k|/p$ столбцов. Отсюда $|A_{k+1}| \leqslant |A_k|(1-1/p) \leqslant n(1-1/p)^{k+1}$. Таким образом, $|A_k| \leqslant n(1-1/p)^k$. Поскольку $L_\Gamma(P) \leqslant k + |A_k|$ при любом натуральном k, то, полагая

$$k = \left]\left(\ln\frac{p}{n}\right)\Big/\ln\left(1-\frac{1}{p}\right)\right[,$$

получаем утверждение.

1.15. $\frac{q}{2} = \frac{1}{2}\left(\log_2\left(\frac{n}{2}+1\right)\right)$.

1.16. 1) Множество $N = \{\widetilde{\alpha} \in B^n : \|\widetilde{\alpha}\|,\ n \text{ четное}\}$ является $(n, 1)$-протыкающим и $|N| = 2^{n-1}$. Остается показать, что $L(n, 1) \geqslant 2^{n-1}$. В силу задачи 1.2 куб B^n разбивается на 2^{n-1} 1-мерных граней одного направления. В каждой из них должна присутствовать вершина $(n, 1)$-протыкающего множества.

2) Нижняя оценка очевидна. С другой стороны, $N = \{\widetilde{0}, \widetilde{1}\}$ является $(n, n-1)$-протыкающим.

3) (В.В. Глаголев.) Указание. Рассмотреть $N = \{\widetilde{\alpha} \in B^n : \|\widetilde{\alpha}\| \equiv \equiv O \pmod 3\}$ или $N_1 = \{\widetilde{\alpha} \in B^n : \nu(\widetilde{\alpha}) \equiv 3 \pmod 4\}$.

4) (О.Б. Лупанов.) Нижняя оценка. Заметим, что, для того чтобы вершина $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ содержалась в $(n-2)$-мерной грани с кодом $\widetilde{\gamma} = (\gamma_1, \ldots, \gamma_n)$, в котором $\gamma_i,\ \gamma_j \in \{0, 1\}$, нужно, чтобы $\alpha_i = \gamma_i,\ \alpha_j = \gamma_j$. Пусть $N \subseteq B^n$ — $(n, n-2)$-протыкающее множество и $|N| = m$. Рассмотрим матрицу M, строками которой являются векторы из N. Из предыдущего следует, что для каждой пары чисел $(i, j),\ 1 \leqslant i < j \leqslant n$, и любой пары $(\sigma, \tau),\ \sigma, \tau \in \{0, 1\}$, должна найтись строка $\widetilde{\alpha} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ такая, что $\alpha_i = \sigma,\ \alpha_j = \tau$. Отсюда вытекает, что любые два столбца матрицы M попарно несравнимы. Число попарно несравнимых двоичных наборов длины m не превосходит $\binom{m}{[m/2]}$. Отсюда вытекает, что $\binom{m}{[m/2]} \geqslant n$.

Верхняя оценка. Пусть m — наименьшее целое такое, что $\binom{m}{[m/2]} \geqslant n$. Построим двоичную матрицу M с m строками и n попарно несравнимыми столбцами. Добавим к матрице две строки: $\widetilde{0}$ и $\widetilde{1}$. Тогда множество строк полученной матрицы будет $(n, n+2)$-протыкающим.

5) Вытекает из того, что множество $N = \bigcup\limits_{i=0}^{[n/k]} B^n_{(k+1)i}$ является (n, k)-протыкающим.

6) Если N является (n, k)-протыкающим и G — r-мерная грань куба B^n, то $N \cap G$ является (r, k)-протыкающим. Отсюда и из задачи 1.2, 1) вытекает требуемое неравенство.

7) Неравенство вытекает из задачи 1.12, если положить $m = 2^n,\ s = 2^k$, $n = \binom{n}{k}2^{n-k}$.

1.17. 1) $l + 1$.

2) Положим $\xi(M_{n,k,l}) = \mu_{n,k,l}$. Утверждение вытекает из того, что $k\mu_{n,k,l} \geqslant n\mu_{n-1,k-1,l-1}$, $\mu_{n,k,l}$ целое и $\mu_{n-l+1,k-l+1,1} = \left]\frac{n-l+1}{k-l+1}\right[$.

3) Ясно, что $\xi(M_{n,n-k,l}) > l$, поскольку при любом выборе l векторов $\widetilde{\alpha}_1, \ldots, \widetilde{\alpha}_l$ из B^n_{n-k} можно подобрать вектор $\widetilde{\beta} \in B^n_l$, не покрываемый ни одним из выбранных l векторов. Это можно сделать, выбрав по одной нулевой координате в каждом из векторов $\widetilde{\alpha}_1, \ldots, \widetilde{\alpha}_r$ и положив их равными 1 в векторе $\widetilde{\beta}$. Если же выбраны $l+1$ векторов из B^n_{n-k} так, что

множества нулевых координат попарно не пересекаются, то все векторы из B_l^n оказываются покрытыми.

4) Нижняя оценка вытекает из мощностных соображений: число покрываемых столбцов равно $\binom{n}{l}$, а каждая строка покрывает $\binom{n}{k}$ столбцов. Верхняя оценка вытекает из задачи 1.12.

5) Верхняя оценка. Пусть $n = q(l-1)+r$, $0 \leqslant r \leqslant l-2$. Разобьем n координат на $l-1$ блоков так, что два любых блока различаются по мощности не больше, чем на 1. Всего имеется r блоков мощности $q+1$, $l-1-r$ блоков мощности q. Для каждой пары координат произвольного из этих блоков возьмем вектор из B_{n-2}^n, имеющий нули в этих координатах. Множество P получаемых таким образом векторов имеет мощность $r\binom{q+1}{2} + (l-1-r)\binom{q}{2}$. Покажем, что для каждого $\widetilde{\alpha}$ из B_{n-l}^n существует $\widetilde{\beta}$ из P такой, что $\widetilde{\alpha} < \widetilde{\beta}$. В самом деле, поскольку число нулей в $\widetilde{\alpha}$ равно l, а число блоков равно $l-1$, то некоторый блок содержит некоторые две нулевые координаты. В P содержится вектор $\widetilde{\beta}$, имеющий нули в этих координатах. Ясно, что $\widetilde{\alpha} < \widetilde{\beta}$.

1.19. 1) 2. 2) 2. 3) 4. 4) 3. 5) 3. 6) 3.

1.20. 1) n. 2) $n-1$. 3) $n-1$. 4) n.

1.21. Указание. Два столбца матрицы M различаются в j-й строке тогда и только тогда, когда j-я строка матрицы $M^{(2)}$ покрывает сумму по модулю 2 этих столбцов.

1.22. 1), 4), 5), 7) Да. 2), 3), 6), 8), 9) Вообще говоря, нет.

1.23. Если матрица составлена менее чем из $\log_2 n$ строк, то число попарно различных столбцов меньше n.

1.24. Пусть A и B — тупиковые тесты матрицы M с m строками. Тогда ни одно из включений $A \subset B$, $B \subset A$ не имеет места. Отсюда вытекает, что число тестов не превосходит числа попарно несравнимых наборов в B^m, а значит, не превосходит $\binom{m}{[m/2]}$.

1.25. Число матриц размерности $k \times n$ с попарно различными столбцами равно $2^k(2^k+1)\dots(2^k-n+1)$. Число матриц размерности $m \times n$, у которых фиксированные k строк заданы, равно $2^{n(m-k)}$.

1.26. 1) $\{1, 2\}$, $\{1, 4\}$, $\{2, 3\}$, $\{3, 4\}$. 2) $\{1, 2, 3\}$, $\{1, 2, 4\}$, $\{1, 3, 4\}$.

1.27. (Э.Ш. Коспанов.) Если в матрице M с попарно различными столбцами расстояние между любыми двумя столбцами не меньше d, то в матрице $M^{(2)}$ каждый столбец содержит не менее d единиц. Теперь утверждение вытекает из задач 1.21 и 1.12.

§ 2

2.1. 1) x_1, $x_2\overline{x}_3$. 2) $x_1\overline{x}_2$. 3) $x_2\overline{x}_3$, $\overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_4$. 4) x_1.

2.2. 1) После применения правила обобщенного склеивания имеем $D_1 = \overline{x}_1\overline{x}_2 \vee x_1\overline{x}_2x_4 \vee x_2\overline{x}_3x_4 \vee \overline{x}_2x_4 \vee x_1\overline{x}_3x_4 \vee \overline{x}_1\overline{x}_3x_4 \vee \overline{x}_3x_4$. После применения правила поглощения получаем $D_2 = \overline{x}_1\overline{x}_2 \vee \overline{x}_2x_4 \vee \overline{x}_3x_4$.

2) $x_1\overline{x}_2x_3 \vee x_1\overline{x}_2\overline{x}_4 \vee \overline{x}_1x_2\overline{x}_4 \vee \overline{x}_1\overline{x}_3\overline{x}_4 \vee \overline{x}_2\overline{x}_3\overline{x}_4$. 3) $x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4$.

4) $\overline{x}_3\overline{x}_4 \vee \overline{x}_2x_3x_4 \vee x_1\overline{x}_2x_4 \vee \overline{x}_1\overline{x}_2x_3 \vee x_1\overline{x}_2\overline{x}_3 \vee \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_4$.

5) $D \vee \overline{x}_1x_3 \vee \overline{x}_3x_4 \vee \overline{x}_2x_3 \vee x_1x_2\overline{x}_4$.

2.3. 1) $\overline{x}_1\overline{x}_3 \vee x_1\overline{x}_2x_3$. 2) $x_1 \vee \overline{x}_2\overline{x}_3$. 3) $x_1x_2 \vee \overline{x}_1\overline{x}_2x_3$.

4) $x_1\overline{x}_2 \vee \overline{x}_1x_2 \vee x_2\overline{x}_3 \vee \overline{x}_2x_3 \vee x_1\overline{x}_3 \vee \overline{x}_1x_3$. 5) $x_1x_2x_3 \vee \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3$.

6) $x_1x_2x_3 \vee x_1x_2\overline{x}_4 \vee x_1\overline{x}_3\overline{x}_4$.

2.4. 1) $\overline{x}_1x_3 \vee \overline{x}_1x_2 \vee \overline{x}_2x_3 \vee x_2\overline{x}_3$.

2) $x_2x_3 \vee \overline{x}_2\overline{x}_3 \vee x_1\overline{x}_2 \vee x_1\overline{x}_3 \vee \overline{x}_1x_2 \vee x_1x_3$. 3) $x_1 \vee x_2\overline{x}_3$.

4) $\overline{x}_1\overline{x}_2 \vee \overline{x}_1\overline{x}_3 \vee \overline{x}_2x_3$. 5) $\overline{x}_2x_2 \vee x_2x_3 \vee x_3x_4 \vee x_1\overline{x}_3\overline{x}_4 \vee x_1\overline{x}_2\overline{x}_3 \vee x_1\overline{x}_2x_4$.

6) $x_1\overline{x}_2 \vee \overline{x}_1x_2 \vee x_1\overline{x}_3x_4 \vee x_2\overline{x}_3x_4 \vee x_2x_3\overline{x}_4 \vee x_1x_3\overline{x}_4$.

2.5. 1) $\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2x_3$. 2) $\overline{x}_1x_3 \vee x_2x_3 \vee x_1x_2$. 3) $\overline{x}_1\overline{x}_2 \vee \overline{x}_1x_3 \vee x_2x_3 \vee x_1x_2$.

4) $\overline{x}_1\overline{x}_2 \vee \overline{x}_1x_3 \vee x_2x_3 \vee x_1x_3 \vee \overline{x}_1\overline{x}_3 \vee \overline{x}_2\overline{x}_3$.

5) $\overline{x}_1\overline{x}_2 \vee \overline{x}_1\overline{x}_3\overline{x}_4 \vee x_2\overline{x}_3\overline{x}_4 \vee x_1x_2\overline{x}_3 \vee x_1\overline{x}_3x_4 \vee \overline{x}_2\overline{x}_3x_4$.

6) $x_1x_2 \vee x_1\overline{x}_3 \vee x_1\overline{x}_3 \vee x_1\overline{x}_4 \vee x_2x_3 \vee x_2x_4 \vee \overline{x}_1x_3x_4$.

2.6. 1) $x_3 \vee x_1x_2$. 2) $\overline{x}_1\overline{x}_2 \vee \overline{x}_1x_3 \vee \overline{x}_2\overline{x}_3 \vee x_1\overline{x}_3 \vee x_1x_2 \vee x_2x_3$.

3) $\overline{x}_1\overline{x}_3 \vee \overline{x}_1x_2$. 4) $x_1 \vee \overline{x}_2 \vee \overline{x}_3$.

5) $x_2\overline{x}_4 \vee x_1\overline{x}_3 \vee x_3x_4 \vee x_2x_3 \vee x_1x_4 \vee x_1x_2$.

6) $\overline{x}_2x_3 \vee x_2\overline{x}_3 \vee x_3x_4 \vee x_1\overline{x}_2 \vee x_1\overline{x}_3 \vee x_1x_4$.

2.7. 1) $x_2 \vee x_3$. 2) $\overline{x}_2 \vee \overline{x}_1x_3 \vee x_1\overline{x}_3$. 3) $\overline{x}_1 \vee x_2\overline{x}_3$. 4) $\overline{x}_2 \vee \overline{x}_1x_3$.

5) $x_3x_4 \vee \overline{x}_1\overline{x}_4 \vee \overline{x}_1x_3 \vee x_1x_3 \vee x_1x_4 \vee \overline{x}_2\overline{x}_3 \vee x_3\overline{x}_4$.

2.8. 1) x_3, x_1x_2. 2) Ядровых импликант нет. 3) $\overline{x}_1\overline{x}_3$, $\overline{x}_1x_2$.

4) x_1, $\overline{x}_2$, $\overline{x}_3$. 5) $x_2\overline{x}_4 \vee x_1\overline{x}_3$, x_3x_4. 6) $x_2\overline{x}_3$, $\overline{x}_2x_3$.

2.9. 1) 2^{n-1}. 2) 2^{n-1}. 3) $6 \cdot 2^{n-4}$. 4) $k(n-k)$. 5) 2^{n-2}.

6) $k + (n-k)(n-k-1)$. 7) 2. 8) $n(n-1)$. 9) 2^n.

2.10. 1) $\binom{n-k}{m}$. 2) $\binom{l}{k}\binom{n-l}{k+m-l}$. 3) Вытекает из задачи 1).

4) Вытекает из того, что

$$\min_{0\leqslant k,m\leqslant n}(k!)(n-k-m)!m! = \left(\left[\frac{n}{3}\right]!\right)^2\left(n-\left[\frac{n}{3}\right]\right)!.$$

2.11. Каждый интервал функции f однозначно определяется заданием любой пары противоположных в этом интервале точек. Эти точки, очевидно, принадлежат множеству N_f. Поэтому число максимальных интервалов не превосходит числа неупорядоченных пар вершин (быть может, совпадающих) из множества N_f.

2.12. 1) 2^{n-1}. 2) 2^{n-3}. 3) 0.

4) $k(n-k)$. Указание. В любом максимальном интервале монотонной функции нижняя единица является собственной точкой того интервала, которому она принадлежит.

5) 2^{n-2}. Указание. Использовать задачу 1.9, 5) и то, что все интервалы имеют размерность 0.

6) k. 7) 2. Заметить, что $f = x_1 \ldots x_n \vee \overline{x}_1 \ldots \overline{x}_n$. 9) 2^n.

2.13. Выберем для каждого ядрового импликанта функции $f(\widetilde{x}^n)$ в точности по одной собственной точке. Рассмотрим все ребра куба B^n некоторого направления. Никакое ребро не может содержать двух выделенных собственных точек. Отсюда и вытекает утверждение.

§ 3

3.1. 1) а) Нет. б) Да. в) Нет. 2) а) Нет. б) Нет. в) Нет.

3.3. 1) $D_{\Sigma T} = xy \vee \overline{x}z$. 2) $D_{\Sigma T} = D$.

3.7. 1) $\tau(f) = \mu(f) = 1$. 2) $\tau(f) = 5^{2^{n-4}}$, $\mu(f) = 2^{2^{n-4}}$.
4) $\tau(f) = 58$, $\mu(f) = 6$.

3.8. Указание. Оценка следует из того, что число элементарных конъюнкций над переменными $x_1, \ldots, x_n$ равно 3^n, длина тупиковой д. н. ф. не превосходит 2^n и ни одна из конъюнкций в тупиковой д. н. ф. не поглощает другую.

3.9. Указание. Верхняя оценка устанавливается по индукции.

3.11. 1) 2. 2) 2^n.

3.12. 3) Указание. См. задачу 5.17 гл. VIII.

3.13. $2^n/n$.

Глава X

§ 1

1.2. 1) а) $((x_1 \mid x_2) \mid (x_2 \mid x_2)) \mid (x_1 \mid x_2)$. б) $\overline{\overline{(x_1 \to \overline{x}_2)} \to (\overline{x}_1 \to x_2)}$.

2) а) $((x_2 \downarrow x_2) \downarrow x_1) \downarrow ((x_2 \downarrow x_2) \downarrow x_1)$. б) $\overline{x_1 \,\&\, \overline{x}_2}$.

3) а) $(x_1 \mid x_1)(x_2 \mid x_2)$. б) $((x \,\&\, y) \sim x) \sim y$.

1.3. 1) а) $\overline{x}_2 \vee x_1$. б) $x_2 \mid (x_1 \mid x_1)$.

2) а) $(x_1 \to x_2) \,\&\, (x_2 \to x_1)$. б) $((x_1 \downarrow x_1) \downarrow x_2) \downarrow ((x_2 \downarrow x_2) \downarrow x_1)$.

3) а) $(\overline{(x_1 \mid x_2)} \mid x_3) \mid ((x_1 \mid x_2) \mid \overline{x}_3)$. б) $x_1x_2x_3 \oplus (x_1 \oplus 1)(x_2 \oplus 1)(x_3 \oplus 1)$.

1.4. 1) $f_1 = \overline{x}_1\overline{x}_2$, $f_2 = x_1 \sim x_2$.

2) $f_1 = x_1x_2 \oplus x_2x_3 \oplus x_3x_1$, $f_2 = x_1 \oplus x_2 \oplus x_3$.

3) $f_1 = x_1 \vee x_2 \vee x_3$, $f_2 = \overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3$.

1.6. Указание. 1) $f = x_2 \vee \overline{x}_1\overline{x}_3$. 2) $f = x_1\overline{x}_2 \vee x_2\overline{x}_3 \vee x_2\overline{x}_1$.

3) $f = \overline{x}_3(x_1 \vee x_2) \vee \overline{x}_1(x_2 \vee x_3)$. 4) $f = (x_1 \vee \overline{x}_2)(x_2 \vee \overline{x}_3)$.

1.7. Указание. 1) $f = \overline{x}_2x_3 \vee x_1x_2\overline{x}_3$.
2) $f = x_1\overline{x}_2 \vee x_2\overline{x}_3 \vee x_3\overline{x}_1$. 3) $f = x_1 \vee x_2x_3$.

1.8. Утверждение вытекает из того, что замена в СФЭ Σ всех пометок $\vee$ на $\&$ и $\&$ на $\vee$ приводит к схеме Σ^*, реализующей двойственную функцию f^*.

1.13. 1) См. рис. О.10.1.

2) Индукция по n. Базис индукции доказан в п. 1. Пусть U_n — схема универсального многополюсника сложности $2^{2^n} - n$. Добавим к ней вход x_{n+1} и инвертор для реализации $\overline{x}_{n+1}$. Реализуем все функции вида $x_{n+1}^{\sigma} \,\&\, f$, где $f = f(x_1, \ldots, x_n)$ — функции, отличные от констант и реализованные в U_n. Далее с использованием уже построенных функций реализуем функции вида $(\overline{x}_{n+1} \,\&\, f) \vee (x_{n+1} \,\&\, g)$, где $f = f(x_1, \ldots, x_n)$, $g = g(x_1, \ldots, x_n)$, $f \not\equiv g$, $f \vee g \not\equiv 0$. Для реализации каждой из упомянутых (кроме x_{n+1}) функций требуется дополнительно ровно один элемент. Таким образом, к $2^{2^n} - n$ элементам схемы U_n добавляются один инвертор, $2(2^{2^n} - 2)$

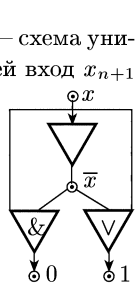


Рис. О.10.1

конъюнкторов и $(2^{2^n}-1)(2^{2^n}-2)$ дизъюнкторов. Всего в полученной схеме $2^{2^{n+1}}-(n+1)$ элементов.

Нижняя оценка следует из того, что каждая функция, отличная от x_i, $i=1,\ldots,n$, должна быть реализована на выходе некоторого элемента.

1.15. 2) Утверждение вытекает из представлений $S^{k,m}(\widetilde{x}^n)=$ $=S^{k,n}(\widetilde{x}^n)\,\&\,S^{0,m}(\widetilde{x}^n)$ и $S^{0,m}(\widetilde{x}^n)=\overline{S^{n-m,n}(\widetilde{x}^n)}$.

1.16. Заметим, что функции $S^{k,3}(\widetilde{x}^3)$ $(k=0,\,1,\,2,\,3)$ монотонны и могут быть реализованы схемами, не содержащими отрицаний. Покажем сначала, что совокупность всех схем вида $S^{k,k}(\widetilde{x}^3)$ $(k=0,\,1,\,2,\,3)$ может быть реализована с применением двух отрицаний. Имеем $S^{0,1}(\widetilde{x}^3)=\overline{S^{2,3}(\widetilde{x}^3)}$, $S^{1,1}(\widetilde{x}^3)=S^{0,1}(\widetilde{x}^3)\,\&\,S^{1,3}(\widetilde{x}^3)$. Далее, полагая $l_\sigma(\widetilde{x}^3)=x_1\oplus x_2\oplus x_3\oplus\sigma$, получаем $l_0(\widetilde{x}^3)=S^{1,1}(\widetilde{x}^3)\cup S^{3,3}(\widetilde{x}^3)$, $l_1(\widetilde{x}^3)=\overline{l_0(\widetilde{x}^3)}$, $S^{2,2}(\widetilde{x}^3)=l_1(\widetilde{x}^3)\,\&$ $\&\,\overline{S^{2,3}(\widetilde{x}^3)}$, $S^{0,0}(\widetilde{x}^3)=l_1(\widetilde{x}^3)\,\&\,S^{0,1}(\widetilde{x}^3)$. Теперь из функций $S^{k,k}(\widetilde{x}^3)$ и элементарных монотонных конъюнкций можно без применения отрицаний построить любую конъюнкцию вида $x_1^{\sigma_1}x_2^{\sigma_2}x_3^{\sigma_3}$. Например, $x_1\overline{x}_2\overline{x}_3=$ $=S^{1,1}(\widetilde{x}^3)\,\&\,x_1$, $\overline{x}_1x_2x_3=S^{2,2}(\widetilde{x}^3)\,\&\,x_2x_3$. Располагая всеми элементарными конъюнкциями ранга 3, функции $\overline{x}_i$ $(i=1,\,2,\,3)$ можно строить с применением только элементов дизъюнкции. Например, $\overline{x}_1=\overline{x}_1x_2x_3\vee\overline{x}_1x_2\overline{x}_3\vee$ $\vee\,\overline{x}_1\overline{x}_2x_3\vee\overline{x}_1\overline{x}_2\overline{x}_3$.

1.17. Рис. 10.2, *г* и задача 1.8 показывают, что $L(x\oplus y)\leqslant 4$. Неравенство $L(x\oplus y)\geqslant 4$ вытекает из следующих соображений. В силу немонотонности функции $f=x\oplus y$ она не может быть реализована без отрицаний. В минимальной схеме Σ_f, реализующей f, элемент отрицания не может стоять на выходе схемы; в противном случае в вершине, предшествующей выходу, реализовалась бы функция $\overline{f}=f^*$, и в силу утверждений задачи 1.8 схема Σ_f неминимальная. Таким образом, выход схемы Σ_f совпадает с выходом одного из элементов $\&$ или $\vee$. Обозначим этот элемент через $\circ$. Тогда $f=f_1\circ f_2$, где функции f_1, f_2 реализованы в вершинах схемы Σ_f, предшествующих выходу. Ни одна из этих функций не является одноместной, так как f отлична от функций вида $x^\sigma\vee h$, $x^\sigma\,\&\,h$. Кроме того, функция f_1 не является отрицанием функции f_2, поскольку f не является константой. Отсюда следует, что схема Σ_f должна содержать еще по меньшей мере два двухместных элемента.

1.19. Провести индукцию по l.

1.20. Указание. Рассмотреть схему Σ_f, реализующую функцию $f=$ $=x_1\vee\ldots\vee x_{l+1}$ и имеющую глубину l.

1.21. Утверждение вытекает из задачи 1.19 и из того, что сложность СФЭ, реализующей функцию, существенно зависящую от n переменных, не меньше, чем $n-1$.

§ 2

2.1. а) $f=x_1\oplus x_2=x_1\overline{x}_2\vee\overline{x}_1x_2$. б) $f=x_1x_4\vee x_1x_3x_5\vee x_2x_3x_4\vee x_2x_5$.
в) $f=(x_1\vee x_2)(\overline{x}_1\vee\overline{x}_2)=x_1\oplus x_2$. г) $f=x_1\oplus x_2\oplus x_3\oplus 1$.
д) $f=x_1\overline{x}_2\vee x_2(x_3\overline{x}_2\vee\overline{x}_3x_2)\vee\overline{x}_1x_2$. е) $f=x_1x_2\vee x_2x_3\vee x_3x_1$.

2.4. Указание. Представить функцию f формулой в базисе $\{\vee,\ \&\ ,\ -\}$. Если число букв окажется равным l, то построить схему по формуле. Если число букв окажется больше, чем l и формула не упрощается, то реализовать отдельные подформулы схемами и попытаться совместить куски полученных схем так, чтобы не возникало «ложных» цепей.

1) $f = \overline{x}_1 x_2 x_3 \vee x_1(\overline{x}_2 \vee \overline{x}_3)$. 2) $f = x_2 \vee \overline{x}_1 x_3 \vee x_1 \overline{x}_3$.
3) $f = x_2(\overline{x}_1 \vee \overline{x}_3) \vee \overline{x}_1 \overline{x}_3$. 4) $f = x_1(x_2 \vee x_3) \vee \overline{x}_2(\overline{x}_2 \vee x_3)$.
5) $f = \overline{x}_2(x_1 \vee x_3) \vee x_1 x_3$.

2.5. 1) $f = (x_1 \vee x_2 x_3)(\overline{x}_2 \vee x_4)$. 2) $f = x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4$. 3) $f = x_1$.
4) $f = (\overline{x}_1 \vee \overline{x}_2)(\overline{x}_4 \vee \overline{x}_6)(x_5 \vee x_7)$. 5) $f = x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4$.
6) $f = x_1 x_2 \vee x_1 x_3 \vee x_1 x_4 \vee x_2 x_3 \vee x_2 x_4 \vee x_3 x_4$.

2.7. 1) $f = x_1 x_2 \ldots x_n \vee \overline{x}_1 \overline{x}_2 \ldots \overline{x}_n$. 2) $f = x_1 x_2 \ldots x_{n-1} \overline{x}_n$.
3) $f = x_1 \oplus x_2 \oplus \ldots \oplus x_n$.
4) $f = (x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) = P_n$, где $P_1 = x_1 \vee y_1$, $P_{k+1} = x_k y_k \vee \vee P_k(x_k \vee y_k)$, P_n реализует перенос в $(n+1)$-й разряд сумматора.
5) $f(\widetilde{x}^{2n}) = \mathop{\&}\limits_{1 \leqslant i \leqslant n} (x_{2n-1} \sim x_{2n})$.

2.9. См. задачу 2.6, 1).

2.10. 3) Представив каждую из функций системы Ф совершенной д. н. ф., отождествим выходы схемы D_n^k, соответствующие элементарным конъюнкциям, относящимся к одной функции.

2.12. 2) Докажем утверждение индукцией по n. Нетрудно видеть, что $L(U_1^k) = 2 < 2 \cdot 2^{2^1}$. По предположению индукции существует схема для U_{n-1}^k сложности, не большей чем $2 \cdot 2^{2^{n-1}}$. Все функции $f(\widetilde{x}^n)$, не зависящие существенно от x_n, реализованы в U_{n-1}^k. Если функция f зависит от x_n существенно, то она представима в виде $f = x_n g \vee \overline{x}_n h$, где g и h — различные функции переменных $x_1, \ldots, x_{n-1}$. Если одна из этих функций (g или h) равна нулю, то отнесем f к классу K_1, в противном случае — к классу K_2. Добавим к схеме U_{n-1}^k по одной вершине v_f для каждой функции f из $K_1 \cup K_2$. Если $f \in K_1$ и имеет вид $f = x_n^\sigma h$, то соединим вершину v_h схемы U_{n-1}^k контактом x_n^σ с новой вершиной v_f. Если $f \in K_2$ и $f = x_n g + \overline{x}_n h$, то соединим вершины v_g и v_h схемы U_{n-1}^k с новой вершиной v_f соответственно контактами x и $\overline{x}$. Таким образом, добавляется всего $|K_1| + 2|K_2|$ контактов. Ясно, что такое добавление контактов к схеме U_{n-1}^k не вносит каких-либо цепей с ненулевой проводимостью в U_{n-1}^k и, следовательно, не изменяет функций, реализуемых схемой U_{n-1}^k. Ясно также, что в новых вершинах реализуются соответствующие им функции из $K_1 \cup K_2$, и, значит, построена схема для U_n^k. Оценим сложность построенной схемы. Имеем

$$L_k(U_n^k) \leqslant L_k(U_{n-1}^k) + |K_1| + 2|K_2| < 2 \cdot 2^{2^{n-1}} + 2|K_1| + |K_2| = 2 \cdot 2^{2^n}.$$

3) Выбирая $m = [\log_2(n - 2\log_2 n)]$, получаем при достаточно больших n

$$L_k(f(\widetilde{x}^n)) \leqslant L_k(D_{n-m}^k) + L_k(U_m^k) \leqslant 2 \cdot 2^{n - \log_2(n - 2\log_2 n) + 1} + \\ + 2 \cdot 2^{2^{\log_2(n - 2\log_2 n)}} = \frac{2^{n+2}}{n \log_2(n - 2\log_2 n)} + \frac{2^{n+1}}{n^2} \lesssim 4\frac{2^n}{n}.$$

2.17. 1) Схема для U_1^k может быть получена по методу каскадов. Эта схема имеет сложность, равную 2. Предположим, что схема для U_{n-1}^k, полученная по методу каскадов, содержит не более $2 \cdot 2^{2^{n-1}}$ контактов. Построим схему для U_n^k. Множество V_0 вершин этой схемы соответствует множеству всех функций $f(\widetilde{x}^n)$. Вершины из V_0, соответствующие функциям $f(\widetilde{x}^n)$, не

зависящим от переменной x_n, содержатся также и в V_1. Пусть K_1, K_2 — классы функций, зависящих от n переменных, определенные в решении задачи 2.12, 2). Правило проведения контактов метода каскадов предписывает провести один контакт для каждой вершины, соответствующей функции f из K_1, и два контакта для вершины, соответствующей функции f из K_2. Таким образом, общее количество ребер, соединяющих вершины множеств V_0 и V_1, равно $|K_1| + 2|K_2|$. Дальнейшие рассуждения повторяют решение задачи 2.12, 2).

2.18. Утверждение вытекает из того, что для реализации всех конъюнкций по методу каскадов $|V_i| = 2^{n-i}$ $(i = 0, 1, \ldots, n)$ и из каждой вершины i-го яруса $(0 \leqslant i < n)$ в следующий ярус выходит ровно одно ребро.

2.19. Доказательство отличается от предыдущего только тем, что количество ребер, исходящих из вершины, отличной от полюса b, равно 2 при $0 \leqslant i < n-2$. При $i = n-1$ из каждой вершины исходит одно ребро.

2.21. Пусть, например, схема Σ представляет собой последовательное соединение некоторой двухполюсной схемы A и контакта x. Преобразуем схему Σ, отбросив все контакты $\overline{x}$ и стянув в точку каждый из контактов x в A. Ясно, что функция проводимости новой схемы Σ' совпадает с прежней, а число контактов уменьшилось.

2.22. Если схема Σ не является сильно связной, то в ней имеется отросток. Отбрасывая его, мы не изменяем, очевидно, функцию проводимости. Поэтому Σ не может быть минимальной.

2.25. То, что $L_k(x \oplus y) \leqslant 4$, вытекает из того, что существует схема для $x \oplus y$ (см. задачу 2.1) сложности 4. Предположим, что минимальная схема для $x \oplus y$ содержит менее четырех контактов. В силу утверждения задачи 2.23 эта схема не может иметь ровно три контакта. Каждая минимальная схема с двумя контактами реализует либо функцию вида $x^\alpha y^\beta$, либо функцию вида $x^\alpha \vee y^\beta$.

2.26. Пусть x_1^α — буква, встречающаяся в качестве пометки контакта в бесповторной схеме Σ. Поскольку Σ сильно связная, то существует цепь, соединяющая полюса a и b схемы Σ и содержащая контакт x_1^σ. Зафиксируем значения $\sigma_2, \ldots, \sigma_n$ переменных, отличных от x_1, так что все контакты рассматриваемой цепи, кроме x_1^α, оказались замкнутыми, а все контакты, не входящие в цепь, — разомкнутыми. Тогда $f_{a,b}(x_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n) = x_1^\alpha$. Отсюда и следует, что функция проводимости $f_{a,b}$ существенно зависит от x_1.

2.27. Утверждение вытекает из того, что для каждого n существует сильно связная бесповторная схема с n контактами.

2.32. Всякая контактная схема с семью ребрами остается планарной после добавления полюсного ребра, так как не существует неплanарных графов с восемью ребрами. Поскольку для всякой такой схемы двойственная схема определена и имеет такую же сложность, то отсюда вытекает, что $L_k(f) = L_k(f^*)$. Второе равенство следует из того, что $\overline{f}(x_1, \ldots, x_n) = f^*(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n)$.

2.33. Утверждение следует из того, что всякая π-схема является планарной и остается таковой после добавления к ней полюсного ребра.

2.34*. Схема Σ, указанная на рис. 10.12, имеет среди своих сечений множества $\{x, y\}$, $\{r, w\}$, $\{x, r, v, z\}$ и $\{x, w, t, u\}$. Тогда, если существует бесповторная схема Σ_1, реализующая функцию f^*, то в ней имеются цепи с проводимостями xy, rw, $xrvz$, $xwtu$. Без ограничения общности можно считать, что контакт x примыкает к полюсу a сети Σ_1. Тогда к этому

полюсу примыкает также и контакт r или контакт w. В первом случае в Σ_1 не существует цепи $xrvz$, а во втором — цепи $xwtu$.

2.35. Неверно. Воспользоваться тем, что $f(x_1, \ldots, x_n) = f^*(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n)$, и результатом задачи 2.34.

2.38. Пусть $H(K)$ — число связных двухполюсных сетей с k ребрами. Каждая из рассматриваемых контактных схем может быть получена из некоторой двухполюсной сети в результате приписывания каждому ребру одного из 2^n символов $x_1, \ldots, x_n, \overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n$. Поскольку $H(k) \leqslant (ck)^k$ (см. задачу), то

$$S(n, m) \leqslant \sum_{k=0}^{m} H(k)(2n)^k \leqslant \sum_{k=0}^{m} (ck)^k (2n)^k \leqslant (c'mn)^m.$$

2.40. (О. Б. Лупанов.) Каждая формула, содержащая k символов переменных, имеет $k-1$ символов связок $\&$ и $\vee$, не более $k-1$ левых и не более $k-1$ правых скобок. Общее число символов не превосходит $4k-3$. Таким образом, всякая такая формула есть слово длины, не превышающей $4k-3$, в алфавите $\{(\,,\,), \vee, \&\} \cup X^n$, где $X^n = \{x_1, \ldots, x_n, \overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n\}$, причем число букв из X^n равно k. Число слов длины s, содержащих k букв из алфавита A и $s-k$ букв алфавита B, не превосходит $C_s^k |A|^k |B|^{s-k}$. Поэтому

$$\Phi(n, m) \leqslant \sum_{k \leqslant m} C_{4k-3}^k (2n)^k 4^{3k-2} \leqslant (cn)^m.$$

2.42. 1), 2) С использованием результата предыдущей задачи имеем при $n \to \infty$

$$\log_2 \frac{N\left(n, \frac{1}{n} 2^n (1-\varepsilon)\right)}{2^{2^n}} \leqslant \left(n + (1-\varepsilon)\frac{2^n}{n}\right) \log\left(16\left(n + \frac{2^n}{n}(1-\varepsilon)\right)\right) -$$
$$- 2^n \lesssim n^2 + (1-\varepsilon)2^n - 2^n = n^2 - \varepsilon \cdot 2^n \to -\infty.$$

Отсюда вытекает задача 2), а значит, и задача 1).

2.43. 1) Число самодвойственных функций $f(\widetilde{x}^n)$ равно $2^{2^{n-1}}$. С использованием задачи 2.38 имеем при $n \to \infty$

$$\log_2 S\left(n, \frac{2^{n-1}}{n}(1-\varepsilon)\right) \leqslant \frac{2^{n-1}}{n}(1-\varepsilon)\log_2(c \cdot 2^{n-1}(1-\varepsilon)) =$$
$$= 2^{n-1}(1-\varepsilon)\left(1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right) < 2^{n-1}.$$

Отсюда вытекает утверждение.

2) С использованием задачи 2.39 имеем при $n \to \infty$

$$\log_2 P\left(n, \frac{2^{n-1}}{\log_2 n}(1-\varepsilon)\right) \leqslant \frac{2^{n-1}(1-\varepsilon)}{\log_2 n}\log_2(cn) =$$
$$= 2^{n-1}\left(1 - \varepsilon + O\left(\frac{1}{\log_2 n}\right)\right).$$

Список литературы *)

1. Автоматы / Под ред. К. Э. Шеннона и Дж. Маккарти. — М.: ИЛ, 1956. (IV)
2. *Алферова З. В.* Теория алгоритмов. — М.: Статистика, 1973. (V)
3. *Арбиб М.* Мозг, машина и математика. — М.: Наука, 1968. (IV, V)
4. *Берж К.* Теория графов и ее применения. — М.: ИЛ, 1962. (VI)
5. *Виленкин Н. Я.* Комбинаторика. — М.: Наука, 1969. (VIII)
6. *Грехем Р., Кнут Д., Паташник О.* Конкретная математика. — М.: Мир, 1998. (VI, VIII)
7. Дискретная математика и математические вопросы кибернетики. Т. 1. — М.: Наука, 1974. (I–III, VI, VII, IX, X)
8. *Емеличев В. А., Мельников О. И., Сарванов В. И., Тышкевич Р. И.* Лекции по теории графов. — М.: Наука, 1990. (VI, VIII–X)
9. *Зыков А. А.* Теория конечных графов. — Новосибирск: Наука, 1969. (VI)
10. *Кобринский Н. Е., Трахтенброт Б. А.* Введение в теорию конечных автоматов. — М.: Физматгиз, 1962. (IV)
11. Комбинаторный анализ. Задачи и упражнения / Под ред. К. А. Рыбникова — М.: Наука, 1982. (VI, VIII)
12. *Кристофидес Н.* Теория графов. Алгоритмический подход. — М.: Мир, 1978. (VI)
13. *Лавров И.А., Максимова Л.Л.* Задачи по теории множеств математической логике и теории алгоритмов. — М.: Физматлит, 2001. (I, II, V)
14. *Леонтьев В.К.* Избранные задачи комбинаторного анализа. — М.: МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001. (VIII)
15. *Мальцев А. И.* Алгоритмы и рекурсивные функции. — М.: Наука, 1986. (V)
16. *Марченков С.С.* Замкнутые классы булевых функций. — М.: Физматлит, 2000. (II)
17. *Матросов В.Л., Стеценко В.Н.* Лекции по дискретной математике. — М.: МПГУ, 1997. (I, II, VI)
18. *Минский М.* Вычисления и автоматы. — М.: Мир, 1971. (IV, V)
19. *Нефедов В.Н., Осипова В.А.* Курс дискретной математики. — М.: МАИ, 1992. (I, II, VIII)
20. *Оре О.* Теория графов. — М.: Наука, 1980. (VI)

*) Римские цифры, стоящие после названия, указывают главы задачника, при работе над которыми эта литература может оказаться полезной.

21. *Питерсон У., Уэлдон Э.* Коды, исправляющие ошибки. — М.: Мир, 1976. (VII)
22. *Риордан Дж.* Введение в комбинаторный анализ. — М.: ИЛ, 1963. (VI, VIII)
23. *Рыбников К. А.* Введение в комбинаторный анализ. — М.: Изд-во МГУ, 1985. (VI, VIII)
24. *Сачков В. Н.* Введение в комбинаторные методы дискретной математики. — М.: Наука, 1982. (VI, VIII)
25. *Свами М., Тхуласираман К.* Графы, сети и алгоритмы. — М.: Мир, 1984. (VI)
26. *Трахтенброт Б. А.* Алгоритмы и вычислительные автоматы. — М.: Советское радио, 1974. (IV, V)
27. *Трахтенброт В. А., Барздинь Я. М.* Конечные автоматы. — М.: Наука, 1970. (IV)
28. *Уилсон Р.* Введение в теорию графов. — М.: Мир, 1977. (VI)
29. *Феллер В.* Введение в теорию вероятностей и ее приложения. Т. 1. — М.: Мир, 1984. (VIII)
30. *Харари Ф.* Теория графов. — М.: Мир, 1973. (VI)
31. *Холл М.* Комбинаторика. — М.: Мир, 1970. (VI, VIII)
32. *Ширяев А.Н.* Вероятность. — М.: Физматлит, 1989. (VI, VIII)
33. *Яблонский С. В.* Функциональные построения в k-значной логике // Труды МИАН СССР. — 1958. — Т. 51. — С. 5–142. (I–III, VI, IX, X)
34. *Яблонский С.В.* Введение в дискретную математику. — М.: Наука, 1986. (I–X)
35. *Яблонский С. В., Гаврилов Г. П., Кудрявцев В. Б.* Функции алгебры логики и классы Поста. — М.: Наука, 1966. (I, II)
36. *Alon N., Spencer J.* The Probabilistic Method. — J. Wiley & Sons, 2000. (VI, VIII)
37. *Bollobas B.* Random Graphs. — N.Y.: Academic Press, 1985. (VI, VIII)

Предметный указатель

Автомат без входа 147
— — выхода 146
Алгоритм Квайна 297
Алфавит входной 103
— выходной 103
— кодирующий 230
— машины Тьюринга внешний 182
— — — внутренний 182
Арность функционального символа 10

Базис замкнутого класса 60
— схемы 311
Буква (символ) алфавита 102

Вектор значений булевой функции 11
— коэффициентов полинома 53
Вершины графа смежные 203
Вес набора 9
— о.-д. функции 103

Глубина формулы 30
Грань булева куба 290
— плоского графа 216
Граф 203
— двудольный 205
— кубический 205
— направленный 210
— однородный (регулярный) 205
— ориентированный 210
— планарный 215
— полный 205
— пустой (вполне несвязный) 205
— связный 204
— k-связный 206
Графы гомеоморфные 205
— изоморфные 204

Дерево 205
— бесконечное информативное 104
— корневое 219
— растущее 212
Деревья одинаковые 220
Диаметр графа 204
Дизъюнкция 12
— над множеством переменных 47
— элементарная 47
Длина д. н. ф. 47
— к. н. ф. 47
Длина маршрута 204, 211
— слова 102
— теста 291
Дополнение графа 205

Замыкание множества функций 60
Знак условного равенства 181
Зона работы машины Тьюринга 181

Избыточность кода 235
Импликанта 296
— простая 78, 296
— ядровая 296
Импликация 12, 89
Интервал функции максимальный 296
— — ядровый 296
Инцидентность вершины и ребра 203
Источник орграфа 212
Итерация машины Тьюринга 186

Класс вычислимых функций 196
— общерекурсивных функций 196
— предполный 60
— примитивно рекурсивных функций 196
— функционально замкнутый 60
— частично рекурсивных функций 196
Код алфавитный 230
— дерева 220
— набора основной машинный 190
— — решетчатый 191
— префиксный 231
Композиция машин Тьюринга 186

Компонента связности графа 204
Конденсация орграфа 212
Контакт замыкающий 312
— размыкающий 312
Контур в орграфе 211
Конфигурация машины Тьюринга 179
Конъюнкция 11
— над множеством переменных 47
— элементарная 47
— — монотонная 52
Критерий планарности 216
— Са́ломаа 97
— Слупецкого 97
— Яблонского 97

Лемма Бернсайда 274
— о нелинейной функции 68
— — немонотонной функции 75
— — несамодвойственной функции 64
Лес 205

Максимум x и y 89
Маршрут в графе 204
— — орграфе 211
Метод Блейка 296
— минимизирующих карт 298
— Нельсона 297
— неопределенных коэффициентов 53, 94
— Хэмминга 245
Минимум x и y 89
Мультиграф 203
— ориентированный 210
— планарный 215

Набор булев (двоичный) 9
— —, предшествующий набору 10
Наборы булевы противоположные 9
— — соседние 9
— — сравнимые 10
Неравенство Чебышева 279

Объединение графов 205
Оператор, порожденный функциями 120
Операция введения обратной связи 146
— минимизация 196
— объединения д. функций 147
— отождествления переменных 33, 146
Операция примитивной рекурсии 195
— разветвления выхода 149
— суперпозиции 147
— удаления выходной переменной 146
Орграф 203
— транзитивный 215
Отрицание Лукасевича 88
— Поста 88
— x 11
Отросток в сети 223
Ошибка в канале связи 245

Паросочетание 205
Переменная существенная 33
— фиктивная 33
Подграф 204
— остовный 204
—, порожденный подмножеством вершин 204
Подразбиение графа 205
Подфункция 39
Покрытие матрицы 290
Полином Жегалкина (по модулю 2) 52
Полином по модулю k 93
Полустепень захода 211
— исхода 211
Префикс (начало) слова 103, 230
Принцип двойственности 31
Произведение по модулю k 89
Псевдограф 203
— ориентированный 210
Путь в орграфе 211

Разветвление машин Тьюринга 186
Разность по модулю k 89
— усеченная 89
Ранг элементарной конъюнкции 47
Расстояние Хэмминга 9
Ребра кратные (параллельные) 203, 210

Связка логическая 12
Сеть 219
— разложимая 223
— k-полюсная 219
Система Поста 97
— Россера–Туркетта 97
— функционально полная 60
Слово бесконечное 102
— квазипериодическое 102

Слово пустое 102, 180
Сложность д. н. ф. 47
Слой булева куба 9, 247
Соединение слов 102
Степень вершины графа 203
Сток орграфа 212
Стрелка Пирса 12
Сумма по модулю 2 12
— — — k 89
Суперпозиция сетей 224
— функций 14, 195
Сфера в булевом кубе 241
Схема, реализующая функцию 145

Таблица каноническая 130
— критериальная 81
Теорема Визинга 217
— Кёнига 205
— о представлении вычислимой функции 196
— Пикар 97
— Поста (критерий полноты в алгебре логики) 81
— Шеннона 217
Тест 291
Точка сочленения (разделяющая вершина) 206
Турнир 212

Уравнения канонические 128

Форма дизъюнктивная нормальная 47
— — — кратчайшая 296
— — — минимальная 296
— — — совершенная 40
— — — сокращенная 296
— — — тупиковая 296
— конъюнктивная нормальная 47
— — — совершенная 40
— k-значной функции вторая 91
— — — первая 91
Формула над множеством связок 13
— — — функциональных символов 12
— Стирлинга 278
Формулы одинакового строения 14
— эквивалентные 14
Функции конгруэнтные 60
— равные 31
Функции эквивалентные (неразличимые) 103
Функция автономная (константная, без выхода) 123
— булева (булевская, алгебры логики) 10
— —, двойственная к функции 31
— — линейная 68
— — монотонная 75
— — самодвойственная 31, 64
— — симметрическая 21
— —, сохраняющая константу 72
— — шефферова 81
— — элементарная 11
— Вебба 89
— выходов 127, 179
— вычислимая 196
— детерминированная 103
— ограниченно-детерминированная 103
— переходов 127, 179
— проводимости 312
— , реализуемая формулой 13
— k-значной логики 88
— — —, сохраняющая множество 92
— — —, — разбиение 93
— — — характеристическая второго рода 88
— — — — первого рода 88
— — — элементарная 88
— k-фактор графа 205

Центр графа 223
Цепь в графе 204
Цикл в булевом кубе 242
— — графе 204

Число кликовое 216
— реберно-хроматическое 216
— хроматическое 216

Шар в булевом кубе 241
Штрих Шеффера 12

Эквивалентность машин Тьюринга 181
Эквиваленция 12
Элемент единичной задержки 151

$]x[$ — минимальное целое число, не меньшее x 64
π-сеть 224